

# 数式処理システムによる入試問題の解法 Solving problems in entrance examinations with computer algebra systems

山口大・教育学部 北本 卓也 (Takuya Kitamoto)  
Yamaguchi University, Faculty of Education

## 1 序論

近年の計算機の発展に伴ない、その計算機を教育へ応用する様々な試みが行われている。数式処理は数値計算よりも人間の行う計算に似た所があり、特に応用問題を解くために有望と考えられている。著者は以前、条件付き最適化問題を QE (Quantifier Elimination) を用いて解く方法を延べ、実際の大学入試問題を数式処理システムを用いて解いた。その結果、数式処理システムを使えば、多項式の実根の存在範囲に関する問題や関数の最大化、最小化問題を解くことができる（ただし、問題によっては計算量過多のため事実上とけないものもある）ことがわかったが、それをどのように教育へ応用するのかという点については、課題が残った。

本稿では、数式処理システムの幾何問題への応用を述べる。このような試みは色々な手法で従来からなされているが、今回は機械的に計算が実行できるということを主眼に置く。

## 2 問題例

まず、次の問題 1 を考える。「正方形 ABCD において、BC を一辺とする正三角形 PBC を作ったとき（図 1）、 $\angle PAD$  は何度か？」

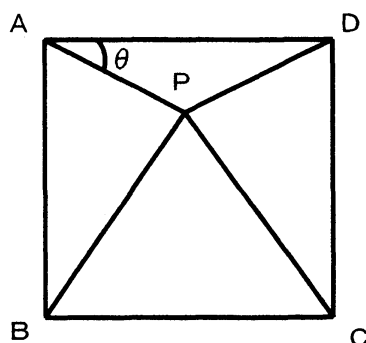


図 1 : 問題 1

この問題を従来の方法で解くと、次のようになる。

「正三角形の内角は60度」であるから、 $\angle PBC=30$ 度、よって $\angle ABP=30$ 度。また、「三角形の内角の和は180度」と「二等辺三角形の底角は等しい」から $\angle PAB=75$ 度であるから、 $\angle PAD=15$ 度。

このように、従来の方法では定理と推論を用いてながら答えを導いていく。それに対して、今回提案する手法では次のようにこの問題を解く。

まず、図1の図形を座標系に置き、A, B, C, Dの座標をそれぞれ $(0,1), (0,0), (1,0), (1,1)$ とする。点Pの座標を求めるため、これを $(x, y)$ と置く（ただし、 $x, y$ は未知変数）。そうすると、辺PBと辺BCの長さが等しいことより $x^2 + y^2 = 1$ 、辺PCと辺BCの長さが等しいことより $(1-x)^2 + y^2 = 1$ を得る。これらの方程式を解くと $(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ となり、

$$\angle PAD = \cos^{-1} \left( \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right) = 15 \text{ 度}$$

を得る。

### 3 計算機を用いた図形問題（計算問題）の解法

#### 3.1 解法の説明

先の例で示したように、計算機を用いて図形問題の解法は次の4つのステップからなる。

- (i) 図形を座標系におき、それぞれの点の座標を定める（必要であれば、未知変数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を用いる）。
- (ii) 問題で求める値を上 (i) のステップの未知変数 $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を用いて表し、 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  と置く。
- (iii) 問題で与えられた条件を $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) の式で表す。
- (iv) 上のステップ (iii) の式を解き、未知変数 $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) の値 $\bar{\alpha}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を求め、 $f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$  を答えとして返す。

上の計算ステップからわかるように、計算機を用いた上の解法は通常の解法に比べ、次のような長所を持っている。

- (a) いろいろな定理を覚える必要がない。
- (b) ヒラメキを必要とせず、統一的な解法に従って機械的に問題を解くことができる。
- (c) 天下りの的に与えられた定理を用いずに証明が行える。

### 3.2 図形の条件を等式へ変換する

先程の計算ステップ (iii) で、問題で与えられた図形の条件を等式に変換する方法について述べる。

#### 3.2.1 条件が辺の長さで与えられる場合

点  $A, B$  の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  であり、辺  $AB$  の長さが  $l$  の場合は、容易にわかるようにこの条件より与えられる等式は

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2 \quad (1)$$

である。

#### 3.2.2 条件が2辺の間の角度で与えられる場合

3点  $A, B, C$  の座標がそれぞれ  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  であり、辺  $AB$  と辺  $CB$  がなす角度が  $\theta$  であるとき、この条件より与えられる等式は

$$(s_1 s_2 + t_1 t_2) \tan \theta = s_2 t_1 - s_1 t_2 \quad (2)$$

(ただし  $s_1 = x_0 - x_1, s_2 = x_2 - x_1, t_1 = y_0 - y_1, t_2 = y_2 - y_1$ )

である。この等式の導出は少しわかりにくいが次のようにする。  $B$  が原点  $(0,0)$  に来るように平行移動すると、 $A, C$  の座標がそれぞれ  $(s_1, t_1), (s_2, t_2)$  となり、辺  $AB, CB$  の傾きがそれぞれ  $t_1/s_1, t_2/s_2$  で与えられる。よって  $\alpha, \beta$  を辺  $AB, CB$  が  $x$  軸となす角、つまり、 $\tan \alpha = t_1/s_1, \tan \beta = t_2/s_2$  とすると、 $\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$  であることから上の (2) が導かれる。

### 3.3 応用例

上の解法の応用として、次の問題2を考える。

図2のような5角形が与えられたとき、点  $E$  の内角の角度  $x$  を求めなさい。

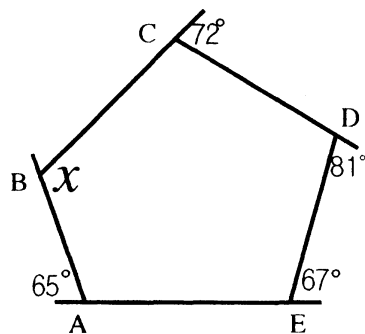


図2：問題2

この問題の従来の解法での解答は次のようになる。

「多角形の外角の和は360度」という定理より点Bの外角は  $360 - (65 + 67 + 81 + 72) = 75$  度なので、 $x$  は  $180 - 75 = 105$  度である。

この解答は一見、容易に見えるが、「多角形の外角の和は360度」は誰もが知っているような事実ではなく、この定理を知らない人には難しい問題になっている。これを計算機を用いた解法で解くと次のようになる。

まず、ステップ(i)でA, B, C, D, Eの座標をそれぞれ  $(0, 0), (a, b), (c, d), (e, f), (1, 0)$  と置く。次にステップ(ii)で、 $x$ の値を  $a, b, c, d, e, f$  を用いて表すのであるが、点A, B, Cの座標がわかっているの、(2)より

$$\tan x = \frac{bc - ad}{a^2 + b^2 - ac - bd} \quad (3)$$

を得るので、

$$x = \tan^{-1} \left( \frac{bc - ad}{a^2 + b^2 - ac - bd} \right) \quad (4)$$

である。また、 $\angle A, C, D, E$ の内角がそれぞれ115度、108度、99度、113度で与えられることと(2)より、

$$\begin{cases} f + (-1 + e)p_1 = 0, \\ b - ap_2 = 0, \\ -d + de + f - cf + (-c + e + ce - e^2 + df - f^2)p_3 = 0, \\ bc - ad - be + de + af - cf + (ac - c^2 + bd - d^2 - ae + ce - bf + df)p_4 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

を得る。ただし、 $p_1 = \tan(113^\circ)$ ,  $p_2 = \tan(115^\circ)$ ,  $p_3 = \tan(99^\circ)$ ,  $p_4 = \tan(108^\circ)$  である。式(4), (5)より、

$$\tan x = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - p_2p_3p_4 - p_1p_3p_4 - p_1p_2p_4 - p_1p_2p_3}{-1 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4} \quad (6)$$

を得、これを数値的に評価して  $x = \tan^{-1}(\tan x)$  に代入すると  $x = 105$  度という解を得る。この計算機を用いた解法では、途中で計算が面倒な所はあるが、手順に従って計算を進めれば解答を出すことが出来る。

## 4 計算機を用いた図形問題（証明問題）の解法

### 4.1 解法の説明

大学入試では、三角形に関する証明問題が多く出題される。この問題に対して次のような解法を考える。

- (i) 三角形ABCの各座標をそれぞれ  $(0, 0), (x, y), (z, 0)$  と置く（三角形ABCを適当に並行移動、回転することにより、このような座標におけることは明らか）。
- (ii) 証明すべき事を  $f(x, y, z) = 0$  の形で表す。

(iii) 問題で与えられた条件（もしあれば）を、 $x, y, z$  で表す.

(iv)  $f(x, y, z) = 0$  を示す.

## 4.2 応用例

上の解法の応用として、余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$ （ただし、 $a, b, c$  はそれぞれ辺 BC, CA, AB の長さ）の証明を考える. 解法のステップ (i) より、点 A, B, C の座標をそれぞれ  $(0, 0), (x, y), (z, 0)$  と置く. そうすると

$$a = \sqrt{(x - z)^2 + y^2}, \quad b = z, \quad c = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos(\angle A) = \frac{x}{c} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (7)$$

である. 解法のステップ (ii) の  $f(x, y, z)$  は  $f(x, y, z) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos(\angle A)$  であるが、これに上の  $a, b, c, \cos(\angle A)$  を代入し、整理すると  $f(x, y, z) = 0$  となり、ステップ (iv) が終わり、証明が終了する（この問題では、与えられた条件はないので、ステップ (iii) は必要ない）.

## 5 計算機を用いた問題解法の特徴

本稿で提案した解法を用いて、いろいろな大学入試の幾何の問題を解いてみると、高校で学ぶ定理を用いると容易に解ける問題にも手がかかる場合がある一方で、逆に高校で学ぶ定理では難しい問題があっさり解ける場合もある. つまり、「通常の解法での問題の難易度と、計算機を用いた問題の難易度は異なる場合が多い」ことがわかった.

高校で学ぶ通常の解法では、様々な法則・定理を覚え、それを活用し、問題を解く. このため、法則や定理を覚える暗記力や問題ごとにどの法則を用いるべきかを判断する力が問われるが、計算機を用いた問題解法の特徴は以下ようになる.

- (i) 定理や問題解法パターンを暗記する必要がある.
- (ii) ヒラメキをひつようとせず、手順に従うだけで問題を解くことができる.
- (iii) 計算が複雑になりがちなので、数式処理システム等を用いる必要がある（それらの使い方に慣れる必要がある）.
- (iv) 実際の試験では使えるわけではない.

## 6 今後の展開

先程述べたように、計算機を用いた問題解法はそのまま実際の試験に使えるとは限らないので、教育にどのように応用するのかが問題となる. 1つの有効な応用例は、幾何問題の問題解答ツールや解答チェッカーとして用いることである. 現在、試験問題に対する目は厳しくなっており、問題に不備があった場合、その責任が厳しく問われるよう

になってきている。しかしながら、問題のチェックは人手によって行われており、完全にチェックが行えているとは言い難い。そこで、作成した図形問題の答えの妥当性を計算機を用いた解法によってチェックできれば、問題作成にかかわる労力の削減と正確性の向上が期待出来る（このような計算機による解答のチェックは、詰将棋作成の現場においては常識的である）。

また、そのためには問題の入力を誰もが簡単に行えるようになることが重要であるので、グラフィカルに図形を入力することにより問題の入力が自動的に行えるようなシステムがあれば、特に有用であると思われる。

## 参考文献

- [1] S. ウルフラム著, “Mathematica ブック”, 東京書籍, 2000.
- [2] 日本 Mathematica ユーザー会編著, “入門 Mathematica”, 東京電機大学出版局, 2009.
- [3] R.J. ゲイロード他著, 榊原訳, “Mathematica プログラミング”, 近代科学社, 1994.