

Absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(\mathbb{R}^3)$

京都大学 野村祐司 (Yuzi Nomura)

§ 1. Introduction

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、 $\omega \in \Omega$ に対して、

$$H_\omega \equiv -\Delta + V_\omega(x) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$V_\omega(x) \equiv \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} g_i(\omega) f(x-i)$$

とする。ここで、 $\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}^3}$ は、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立同分布の実数値確率過程で、その分布は $[0, 1]$ 上の一様分布とする。又、 $f(x)$ については、ある正の数 C_0, C_1 が存在して、

$$C_0 \chi_{\Lambda_0}(x) \leq f(x) \leq C_1 \quad \text{on } \Lambda_0$$

$$x \notin \Lambda_0 \Rightarrow f(x) = 0$$

とする。ただし、 $\Lambda_0 \equiv [0, 1)^3$ で、 χ_{Λ_0} は Λ_0 上の characteristic function である。

$V_\omega(x)$ は有界だから、

H_ω ; self-adjoint operator on $L^2(\mathbb{R}^3)$

with $\text{Dom}(H_\omega) = H^2(\mathbb{R}^3)$

が成り立つ。

H_ω はランダム金属媒質中の電子の hamiltonian に対応する operator と考えられ、alloy type または Anderson type と呼ばれることがある。

H_ω について次の事が知られている。 $\sigma(H_\omega)$ は H_ω のスペクトルを表す。

Proposition 1 (Kirsch, Martinelli)

$$\sigma(H_\omega) = [0, \infty) \quad \text{a.s.}$$

§2. Absence of diffusion.

$E > 0$ を fix して、 g_E は以下の性質を満たすとする。

(*) $0 \neq g_E \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $g_E \geq 0$, $\text{supp } g_E \subset (0, E)$

この時、

$$\Phi_\omega \equiv g_E(H_\omega)\psi, \quad \psi \in L_2^2(\mathbb{R}^3) \equiv \{f; \langle x \rangle^2 f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

$$V_E^2(t) \equiv \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |e^{-itH_\omega} \Phi_\omega(x)|^2 dx \right]$$

と定義する。但し Π は P による積分を表す。

$V_E^2(t)$ は、スペクトルの下端にエネルギーを持つ電子の初期波動関数 Ψ_0 を時間発展した時、時刻 t における電子の原点からの距離の二乗平均を表すと考えられる。

$V \equiv 0$ 又は *periodic* の時、(自由電子、又は金属の純粋結晶中の電子に対応する。)

$$V_E^2(t) \sim C_E t^2 \quad (t \rightarrow \infty)$$

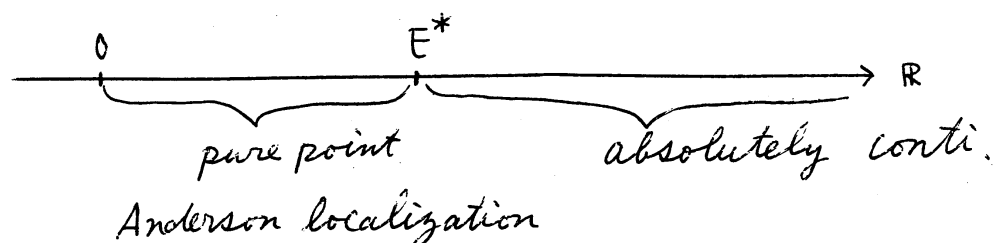
という漸近挙動を示す。ところが、

V が *random potential* の場合、

$$V_E^2(t) \sim D_E t \quad (t \rightarrow \infty)$$

という漸近挙動を示すと、物理的には思われている。この D_E を *diffusion constant* と呼ぶ。(D_E の存在は、数学的には示されていないが。)

3次元空間の場合、物理的には、 H_0 のスペクトルに関して次のように予想されている。



即ち、ある $E^* > 0$ が存在して、 E^* 以下では、pure point spectrum で、固有関数は、exponential decay する。これを Anderson localization (Anderson, '58) と呼ばれる。又、 E^* 以上では、絶対連続スペクトルのみが見られる。この予想が正しければ、

$$E: \text{十分小} \Rightarrow D_E = 0$$

が成立するであろう。

実際、以下のように ergodic な意味でこれが示せる。

Theorem Z.

$$\exists E^* > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < E \leq E^*$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_E^2(t)}{t} dt = 0$$

for $\forall g_E$ satisfying (*), $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

§3. Theorem Z の証明について

次の proposition から Th. Z がほとんど自動的に従う。

Proposition 3

for $0 < \eta < 1$ $\kappa \neq 1$.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\eta T}^T \frac{r_E^2(t)}{t} dt = 0$$

Proposition 3 の証明について.

$\frac{1}{T} = \varepsilon$ と置き換えて、 $r_E^2(t)$ の定義に注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{\eta T}^T \frac{r_E^2(t)}{t} dt &= \frac{1}{T} \int_{\eta T}^T e^{\varepsilon t} e^{-\varepsilon t} \frac{r_E^2(t)}{t} dt \\ &\leq \frac{e}{\eta} \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} r_E^2(t) dt \\ &= \frac{e}{2\pi\eta} \varepsilon^2 \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^\infty \| \chi R_\omega(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} i) \Phi_\omega(x) \|^2 d\lambda \right) \end{aligned}$$

ここで $R_\omega(z) \equiv (H_\omega - z)^{-1}$ とする。

$\varepsilon \downarrow 0$ の時、右辺 $\rightarrow 0$ を示せばよい。

Remark

1. 上の中の左から2番目の不等号の評価は一見、荒そう

だが、

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_E^2(t)}{t} = D \Rightarrow \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} V_E^2(t) dt = D$$

が成り立つので、そうでもない。

2. 上よりもさらに強く、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} V_E^2(t) dt = 0$$

が示されれば、RAGE Th. を使うことがより、

$$\sigma_c(H_\omega) \cap [0, E^*] = \emptyset \quad \text{a.s.}$$

が従う。

上式の右辺の考察に戻る。 $\text{supp } g_E \subset (\bar{E}, E)$, $0 < \bar{E} < E$ とする。

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |R_\omega(E' + i\varepsilon) \Phi_\omega(x)|^2 dx \right] dE' \\ &= \varepsilon^2 \int_E^\infty \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |R_\omega(E' + i\varepsilon) \Phi_\omega(x)|^2 dx \right] dE' \quad \text{--- ①} \\ &+ \varepsilon^2 \int_{\bar{E}}^\infty \mathbb{E} \left[\quad \quad \quad \right] dE' \quad \text{--- ②} \\ &+ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\bar{E}} \mathbb{E} \left[\quad \quad \quad \right] dE' \quad \text{--- ③} \end{aligned}$$

①, ③ について.

$$E' \in (-\infty, \bar{E}] \cup [E, \infty) \quad \text{と する.}$$

$$R_\omega(E' + i\varepsilon)\Phi_\omega(x) = f_{\varepsilon, E'}(H_\omega)\psi(x)$$

そこで

$$f_{\varepsilon, E'}(x) \equiv \frac{g_E(x)}{x - E' - i\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

この時

$$\|f_{\varepsilon, E'}(H_\omega)\|_{L_2^2 \rightarrow L_2^2} \leq \frac{C}{\text{dist}(\text{supp } g_E, E')}$$

が成り立つ。そこで C は、 ε, ω によらない。従って、

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |R_\omega(E' + i\varepsilon)\Phi_\omega(x)|^2 dx\right] \leq \frac{C}{\text{dist}(\text{supp } g_E, E')^2}$$

$$\sim |E'|^{-2} \quad \text{as } |E'| \rightarrow \infty \text{ uniformly in } \varepsilon.$$

これより、①, ③ $\rightarrow 0$ as $\varepsilon \downarrow 0$ がわかる。

② について.

まず、新たな確率空間と、random Schrödinger operator を用意する。

$$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes (\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3), \mu)$$

μ は $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ 上の Lebesgue measure とする。

$(\omega, k) \in (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ に対し、

$$H_{(\omega, k)} \equiv -\Delta + V_{(\omega, k)}(x), \quad V_{(\omega, k)}(x) = V_\omega(x - k).$$

と定義する。 $E' \in [\bar{E}, E]$ とする。以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |R_\omega(E' + i\varepsilon) \Phi_\omega(x)|^2 dx \right] \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} K(x) dx \right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \bar{\mathbb{E}}(|\Phi_{(\omega, k)}(y)|^4) \right\}^{\frac{1}{2}} dy \\
 & \quad + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |x| K(x) dx \right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \bar{\mathbb{E}}(|\Phi_{(\omega, k)}(y)|^4) \right\}^{\frac{1}{2}} dy \\
 & \quad + \left(\int_{\mathbb{R}^3} K(x) dx \right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \bar{\mathbb{E}}(|y \Phi_{(\omega, k)}(y)|^4) \right\}^{\frac{1}{2}} dy \\
 & \leq C'',
 \end{aligned}$$

$$K(x) = K(E' + i\varepsilon; x) \equiv \left\{ \bar{\mathbb{E}}[|G_{(\omega, k)}(E' + i\varepsilon; x, 0)|^4] \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$G_{(\omega, k)}(E' + i\varepsilon; x, 0) \equiv (H_{(\omega, k)} - (E' + i\varepsilon))^{-1}(x, 0)$$

$$\left(= G_\omega(E' + i\varepsilon; x - k, -k) \right)$$

$\bar{\mathbb{E}}$ は $\bar{P}$ による積分を表す。

$$\Phi_{(\omega, k)}(y) \equiv g_E(H_{(\omega, k)}) \psi_{(\omega, k)}(y)$$

$$\psi_{(\omega, k)}(y) \equiv \psi(y - k)$$

と定義する。また、

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \bar{\mathbb{E}}(|y \Phi_{(\omega, k)}(y)|^4) \right\}^{\frac{1}{2}} dy < \infty \text{ である。}$$

$g_E \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ だから、 $g_E(H_{(\omega, k)})$ は $L_2^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_2^\infty(\mathbb{R}^3)$ の

有界作用素となるので、

$$|\langle y \rangle^2 \Phi_{(\omega, k)}(y)| = |\langle y \rangle^2 g_E(H_{(\omega, k)}) \psi_{(\omega, k)}(y)| \leq C$$

C は ω, k によらない。従って

$$|\Phi_{(\omega, k)}(y)| \leq \frac{C}{1+y^2}$$

これと、 $g_E(H_{(\omega, k)})$ が $L_2^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_2^2(\mathbb{R}^3)$ の有界作用素で、その norm は ω, k によらない定数で押さえられることを用いると、

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \overline{E} (|y \Phi_{(\omega, k)}(y)|^4) \right\}^{\frac{1}{4}} dy < C$$

が示される。ここで C は ω, k によらない。

上式の評価で、 ε, E' によっているのは被積分関数に $K(x)$ が入っている積分の部分だけであり、それ以外の部分は今の
ことより有限であることがわかったため、あべては以下の
Theorem 4 に帰着される。

Theorem 4

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|) \left\{ \overline{E} (|G_{(\omega, k)}(E'+i\varepsilon; x, 0)|^4) \right\}^{\frac{1}{4}} dx$$

$$= 0$$

uniformly in $E' \in [E, E]$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|G_{(\omega, t_k)}(E' + i\varepsilon; x, 0)|^4) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,1]^3} |G_{\omega}(E' + i\varepsilon, x-k, -k)|^4 dk\right] \end{aligned}$$

に注意すると、Theorem 4 は次の Theorem 5 より従う。

Theorem 5

$$\forall p > 0, \exists E^*(p) > 0, \exists K_p > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$0 < E \leq E^*(p)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & P\left\{\omega; |G_{\omega}(E + i\varepsilon; x, y)| \leq \max\left\{e^{m(E)(NL(E)^2 - |x-y|)}\right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{e^{m(E)(NL(E)^2 - |x-y|)}}{|x-y|}\right\} \text{ for } \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in [0,1]^3\right\} \\ & \geq 1 - \frac{K_p}{N^p} \end{aligned}$$

for $\forall N \in \mathbb{N}$ uniformly in $\varepsilon > 0$.

$$m(E) = C E^{1/2}, \quad L(E) = \lfloor E^{-1/2} \rfloor$$

参考文献

- [1] J.M. Combes and P.D. Hislop, Localization for some continuous random hamiltonians in d -dimension, preprint.
- [2] J. Fröhlich and T. Spencer, Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy, Comm. Math. Phys. 88, 151-184 (1983)
- [3] W. Kirsch and F. Martinelli, On the spectrum of random Schrödinger operators, Comm. Math. Phys. 85, 329-350 (1982)
- [4] F. Martinelli and H. Holden, On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(\mathbb{R}^d)$, Comm. Math. Phys. 93, 197-217 (1984)