

3 次元 billiards に於ける周期軌道の統計性

名古屋大学大学院理学研究科

Graduate School of Science, Nagoya University

浅水屋 剛^{*†}, 小西 哲郎 Takeshi Asamizuya, Tetsuro Konishi

1 introduction

量子カオスとは、カオスを呈する古典系に対応した量子系の挙動の事である。Bohr の対応原理が正しいとすると、—すなわち量子力学が $\hbar \rightarrow 0$ の極限として古典力学を内包するのであれば— 古典力学系に於けるカオスの痕跡に対応する量子系に見出そうとするのは、極めて自然な発想である。

Bohr の対応原理

$\hbar \rightarrow 0$ の極限で量子論と古典論は一致すべき

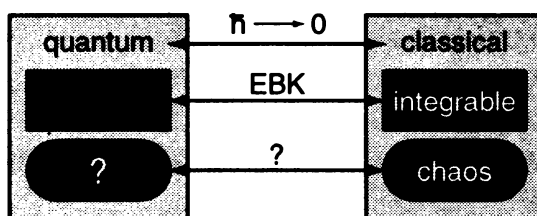


図 1: 量子-古典対応

可積分系に於ける量子-古典対応は Einstein-Brillouin-Keller 量子化条件によりトーラスと量子数との対応で理解される。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \hbar \left(n_j + \frac{\nu_j}{4} \right) \quad (1)$$

^{*} e-mail : asamizu@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

[†] URL : <http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/~asamizu/>

対して非可積分系、則ちトーラスが崩壊した系に於ける量子-古典対応はあまり理解されていない。A. Einstein は量子力学の萌芽期に以下の様な問いかけをしている [6]。

「トーラスが壊れたら量子化条件はどうなるのだろうか？」

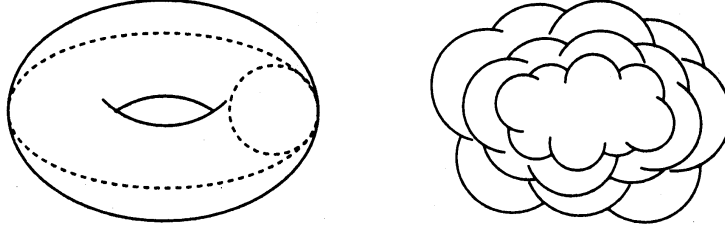


図 2: トーラス (左) とトーラスの崩壊 (右)

以上の事から明らかな様に『量子カオス』は量子-古典対応という文脈では避けて通れない問題として横たわっている。

M. C. Gutzwiller は Feynman の経路積分を用い、古典カオス系に対応する量子系の準位密度を半古典的に評価し、Gutzwiller の跡公式を導出した [7]。この跡公式が言わんとしている事は、準位密度の振動部分 $d_{osc}(E)$ が対応する古典系のすべての周期軌道に関する和として漸近展開される、ということである。この公式は準位密度という量子力学の量を周期軌道という古典力学の量で表していると言う意味で画期的なものである。

$$d(E) = \langle d(E) \rangle + d_{osc}(E) \quad (2)$$

($d(E)$: 準位密度, $\langle d(E) \rangle$: 平均部分, $d_{osc}(E)$: 振動部分)

$$d_{osc}(E) = -\frac{1}{\pi} \Im \left[\sum_{\kappa} \sum_{ppo} \frac{1}{i\hbar} \frac{T_{ppo}}{\sqrt{|\det(\tilde{M}_{ppo}^{\kappa} - I)|}} \exp \left\{ \kappa \left(\frac{i}{\hbar} S_{ppo}(E) - \frac{\pi}{2} \sigma_{ppo} \right) \right\} \right] \quad (3)$$

T_{ppo} : 周期, S_{ppo} : 作用, $\tilde{M}_{ppo}$: *Monodromy* 行列,
 σ_{ppo} : *Maslov* 指数, ppo : 素な周期軌道の *index*, κ : 周期軌道の繰り返し数

ところが Gutzwiller の跡公式は絶対収束しない級数で、収束させる方法が幾つか考えられている [5],[16],[8]。更に周期軌道の膨大な数に比べて決定される準位が極めて少ないという問題がある。又、2点準位相関関数や spectral form factor 等の数値計算から、非対角項の寄与すなわち周期軌道間の相関が示唆されている [1]。従ってカオスを示す系での量子-古典対応を議論する際、周期軌道の相関は避けて通れない問題である。それにもかかわらず周期軌道の相関が如何なるものかは未だ明かではない [15],[18],[4],[11]。

ところで半古典論はカオスを示す系での量子-古典対応を議論する際の唯一の道具である。しかし、半古典論はプランク定数が小さいとしたときの量子力学の近似理論であり、常に精度の問題が付きまといっている。半古典論の精度は見積り方によっては次元に依存してしまい、3次元では2次元と比べて精度は良くない、という指摘はあるが[13]、未だにはっきりとした結論は出されていない。そうした議論からも3次元で半古典論を議論するという事は極めて重要である。

2 対象となる系

今回対象となる系は3次元 dispersing billiards というものである。

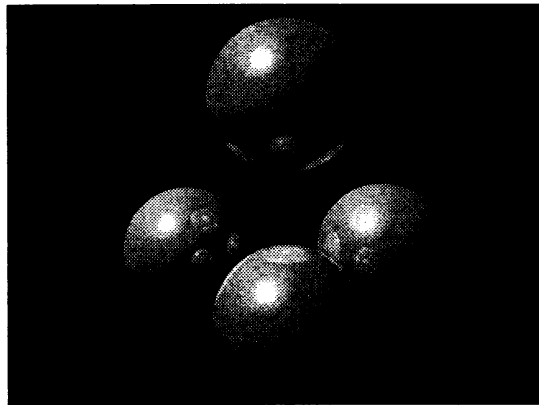


図 3: 3次元 billiards

billiard (撞球) 問題とは本来、ある領域に閉じ込められた撞球の運動のエルゴード性の問題の証明であり、Kelvin 卿が 1900 年に問題提起 [10] して以来 100 年の歴史を持つ。現在では境界が閉じない解放系も研究されている。撞球問題とは基本的には境界内を質点が自由運動し境界上では弾性衝突をする、というものである。

billiard 系で考える事のメリットは、簡単な問題設定で双曲系が構成でき、系の規則性は境界の形に依存する。従って、境界をパラメタとして変化させて特定の値に依存しない性質を抽出できる。又、ある種類の billiard 系では周期軌道を系統的に求める事ができる。

この撞球台の詳細を説明する。この 3 次元 billiards は正四面体の頂点を各々の中心とする 4 つの球からなる billiard である。ただし 4 つの球は対称性を排除する為に各々異なる半径を持つ。質点 (撞球) は境界内で自由運動するものとし、外場は考えない。境界上では弾性衝突を行うものとする。

この billiard 系は dispersing billiards と呼ばれるものの 3 次元版である。dispersing billiards とは、内側に向かって凸な曲線からなる境界を持つ billiards である [9]。この種の billiards では下記の通り、周期軌道が coding できるので周期軌道が系統的に求め易い。coding は周期軌道が衝突する曲線に対応した index によってなされる。下の図の場合では、周期軌道は衝突した円 " C_0, C_1, C_2, C_3 " 各々の index "0, 1, 2, 3" で構成される記号列で表す事ができる。

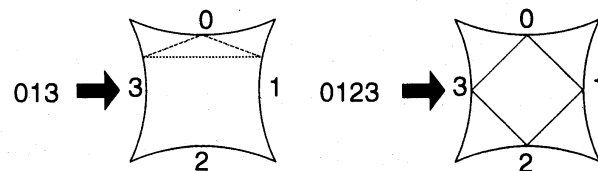


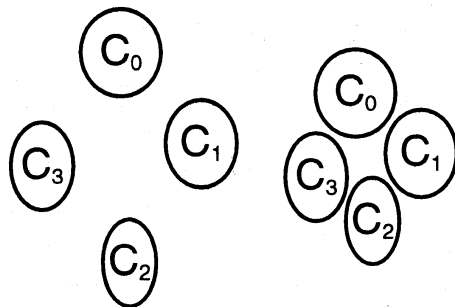
図 4: 周期軌道の coding

周期軌道-記号列の対応関係 [12]

- (i) 非月蝕条件が成り立つ場合：
総ての記号列に対して周期軌道は必ず存在する。
- (ii) 非月蝕条件が破れる場合：
記号列に対して周期軌道は高々一つ存在する。

● 非月蝕条件：

任意の 2 つの障害物を結ぶ直線は他の障害物と交わりも接しもしない。



左が非月蝕状態、右が月蝕状態

※ 3 次元でも同様の事が Stoyanov [17] によって証明されている。

なぜ 3 次元で計算を行うかと言うと、3 次元の billiard 系で周期軌道についてはあまり解析がなされていないからである [14]。又、3 次元は 2 次元に無い特異性があるのではないかと期待される。さらに 2 次元と 3 次元とを比較する事により次元に依存しない性質を抽出でき、それにより 2 次元での結果の位置付けがより明らかになる。加えて先程言及した半古典論の精度の問題があるので 3 次元での解析が是非とも必要である。

3 計算した事 & 結果

今回の数値計算では 3 次元 dispersing billiard 系に於いて衝突回数 16 までの周期軌道を数値的に求めた。そこから長さに関するスペクトルの数密度・累積数密度が得られ、topological entropy が決定された。さらに短距離相関である長さスペクトルの最近接間隔分布と spectral rigidity を計算した。

数値計算の具体的な方法は、軌道の長さが最小になるようなパラメタの値を二分法と Newton-Raphson 法で求める、というものである。頂点総てが記号列に対応する円弧上にあるような多角形を考える。周期軌道の経路は多角形の長さが最小となるものである。この事は、質点の描く周期軌道を光りの反射の経路に見立てて考えれば、光学の Fermat の原理と併せて理解は容易である。

周期軌道の性質

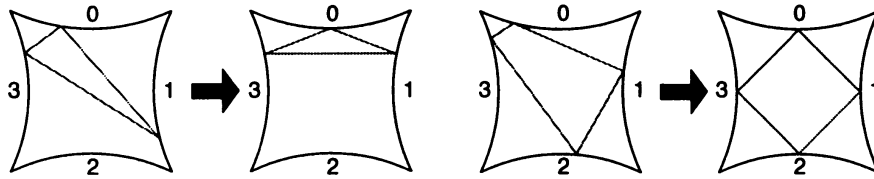
(i) 定常な多角形

$$\frac{\partial L_{ppo}}{\partial \gamma} = 0 \quad (4)$$

(ii) 長さが極小な経路

$$\frac{\partial^2 L_{ppo}}{\partial \gamma^2} > 0 \quad (5)$$

(記号列に対応する) 円弧の頂点を結んだ多角形の最短なもの → 周期軌道



こうして与えられた記号列総てに対し周期軌道の衝突点の座標が数値計算により求められ、これらを総合して長さスペクトルの数密度 & 累積数密度が求められた。

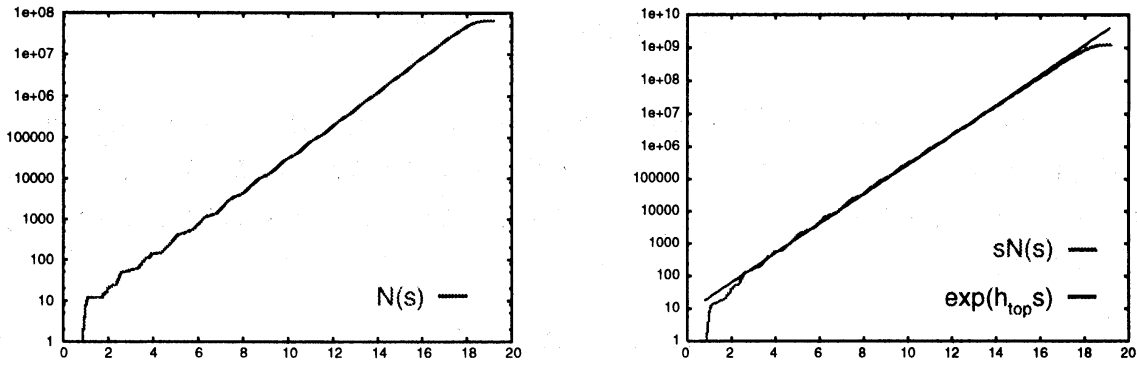
これより、長さスペクトルの累積数密度から

$$N(s) \propto \exp(h_{top}s) / h_{top}s \quad (6)$$

$$h_{top} = 1.0466 \quad (7)$$

衝突回数	個数	衝突回数	個数	衝突回数	個数
2	12	7	2184	12	530640
3	24	8	6480	13	1594320
4	72	9	19656	14	4780776
5	240	10	58800	15	14348640
6	696	11	177144	16	43040160

表 1: 衝突回数ごとの周期軌道の個数

図 5: 長さスペクトルの累積数密度 $N(s)$ (左) と $sN(s)$ (右)

衝突回数に於ける周期軌道の数から

$$h_{\text{top}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(n)}{n} \simeq \frac{\ln N(16)}{16} \simeq 1.098 \quad (8)$$

という形で topological entropy h_{top} が各々決定された。特に衝突回数から計算された h_{top} は

$$\ln 3 \simeq 1.098 \quad (9)$$

と良い一致をしている。これは与えられた記号列に対して周期軌道が必ず存在しているという事から当然の事と言える。

さらに周期軌道の長さに於ける短距離相関を見る。その為に先ずアンフォールディングという操作を行う [3]。アンフォールディングとは端的に言うと、スペクトルの local な平均間隔を 1 にする操作である。なぜそのような操作が必要かと言うと、スペクトルの大域的な振る舞いが系によって大きく異なるからである。従ってスペクトルの universality—例えばスペクトルの大域的な振る舞いからの揺動—を見い出そうとするとき、その系の特殊性を取り除く為にこのような操作を行う必要がある。

$$N \rightarrow u \quad (10)$$

$$N_{av} = \int_0^E \rho_{av}(E') dE' = \int_0^u du' = u = \hat{N}_{av}(u) \quad (11)$$

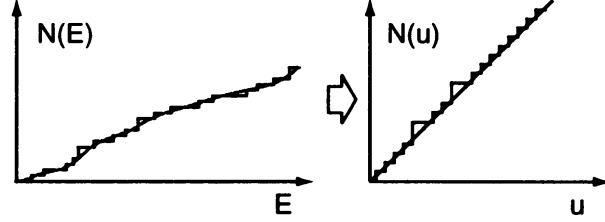


図 6: アンフォールディング

これよりスペクトルの最近接間隔分布と spectral rigidity $\Delta_3(L)$ が求まった [3]。spectral rigidity はアンフォールディングされたスペクトルがどの程度直線に乗っているかを示す量である。rigidity のグラフが $L/15$ の直線に乗る程、スペクトルはランダムであると言える [2]。

$$\Delta_3(L) = \langle \Delta_3(\alpha; L) \rangle \quad (12)$$

$$\Delta_3(\alpha; L) = \frac{1}{L} \min_{A,B} \int_{\alpha}^{\alpha+L} [N(u) - Au - B]^2 \quad (13)$$

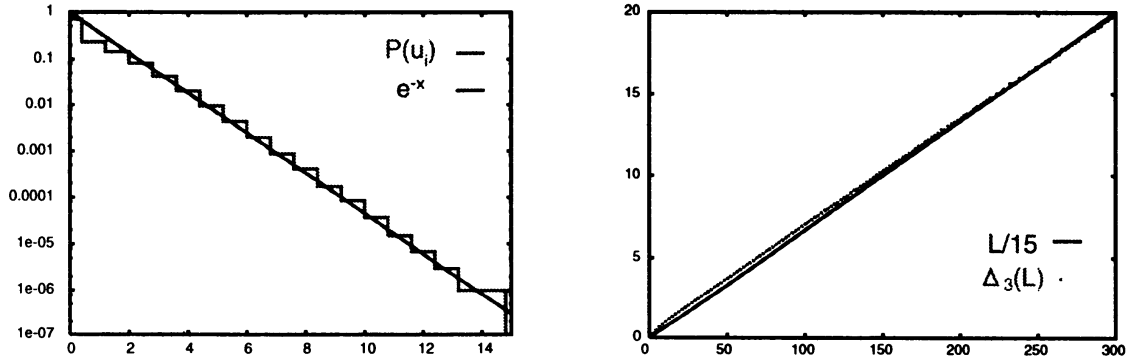


図 7: 長さスペクトルの最近接間隔分布 $P(u)$ (左) と rigidity $\Delta_3(L)$ (右)

最近接間隔分布は Poisson 分布を呈し、rigidity は $L/15$ の直線に乗っている。これらの結果は 2 次元の結果 [9] と同様、周期軌道の長さの相関はこの系ではあからさまには見えてこない、と言う事を示している。周期軌道の長さの統計性を見る限り、周期軌道の相関はこの系でも極めて微妙な問題だということが解る。

4 まとめ&展望

本研究では3次元 billiard 系に於ける周期軌道の数値計算の方法を開発し、周期軌道の長さの統計性について調べた。これまでの所周期軌道の長さに関する相関はあからさまには現れてはいないし、2次元と3次元との違いもそれ程見られない。

今後は周期軌道の長さ以外の性質についても調べていきたい。例えば長さについて行ったものと同様の解析を Ljapunov 指数についても行う。この他に周期軌道の作用の相関が考えられる。さらに二点準位相関関数や spectral form factor といった半古典論での計算を行い、これまでになされた計算との比較をしつつ周期軌道の相関を見ていきたい。周期軌道の相関についての解析はまだ始まったばかりで、何を見ればいいのかと言う事もあまり理解されていないし、ましてや解析の道具ともなると極めて未熟なのが現状である。例えば長さスペクトルの長距離相関については数値計算の困難も去る事ながら、相関の取り方については未知の部分も多い。従って周期軌道の相関を見るには新しい相関の見方の開発まで視野に入れる必要がある。また散乱問題という観点から計算を行い、量子力学と半古典論とで比較をしたい。その際、半古典論の精度についても触れてみたい。

5 謝辞

本研究を進めるに当って、ATR の原山卓久氏からは周期軌道の計算方法等について貴重な助言を、京都大学の佐野光貞助手、東京都立大学の首藤啓助教授からは周期軌道の相関等について貴重なコメントを頂戴しました。広島大学の盛田健彦教授には撞球系の周期軌道の性質について御教授頂き、又 Stoyanov の論文を紹介して頂きました。ここに厚く感謝の意を表したいと思います。

参考文献

- [1] N. Argaman, F. M. Dittes, E. Doron, J. P. Keating, A.Y. Kitaev, M. Sieber, and U. Smilansky. Correlations in the actions of periodic orbits derived from quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, No. 26, p. 4326, 1993.
- [2] Michael V. Berry. Semiclassical theory of spectral rigidity. *Proc. Roy. Soc. London A*, Vol. 400, p. 229, 1985.
- [3] Oriol Bohigas and Marie-Joya Giannoni. Chaotic motion and random matrix

- theories. In H. Araki, J. Ehlers, K. Hepp, R. Kippenhahn, and H. A. Weidenm
 editors, *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics : Proceed-
 ings, Granada, Spain 1983*, Vol. 209, pp. 1–100, Berlin Heidelberg New York
 Tokyo, 1984. Springer-Verlag.
- [4] F. M. Dittes, E. Doron, and Uzy Smilansky. *Phys. Rev. E*, Vol. 49, p. R963,
 1994.
 - [5] B Eckhardt and E Aurell. *Europhys. Lett.*, Vol. 9, No. 6, p. 509, 1989.
 - [6] Albert Einstein. Zum quantensatz von sommerfeld und epstein. *Verh. Deut.
 Phys. Ges.*, Vol. 19, p. 82, 1917.
 - [7] Martin C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechnaics*. Springer-
 Verlag, New York, 1990.
 - [8] Takahisa Harayama and Akira Shudo. Periodic orbits and semiclassical quanti-
 zation of dispersing billiards. *J. Phys. A*, Vol. 25, p. 4595, 1992.
 - [9] 原山卓久, 首藤啓. Dispersing billiards の半古典論. 物性研究, Vol. 61, No. 3, pp.
 222–281, 1993.
 - [10] L. Kelvin. *Phil. Mag. Ser. 6*, Vol. 2, No. 1-40, 1901.
 - [11] 佐野光貞. 半古典論と準位統計. 物性研究, Vol. 67, No. 6, pp. 661–707, 1997.
 - [12] Takehiko Morita. The symbolic representation of billiards without boundary
 condition. *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 325, No. 2, p. 819, 1991.
 - [13] Harel Primack and Uzy Smilansky. On the accuracy of the semiclassical trace
 formula. *J. Phys. A*, Vol. 31, p. 6253, 1998.
 - [14] Harel Primack and Uzy Smilansky. The quantum three-dimensional sinai billiard
 - a semiclassical analysis. *Phys. Rep.*, Vol. 327, pp. 1–107, 2000.
 - [15] Mitsusada M. Sano. Statistical properties of actions of periodic orbits. *Chaos*,
 Vol. 10, No. 1, p. 195, 2000.
 - [16] Martin Sieber and F. Steiner. Generalized periodic-orbit sum rules for strongly
 chaotic systems. *Phys. Lett. A*, Vol. 144, p. 159, 1990.
 - [17] Latchezar Stoyanov. Exponential instability for a class of dispersing billiards.
Ergod. Th. & Dynam. Sys., Vol. 19, p. 201, 1999.
 - [18] Gregor Tanner. Periodic orbit action correlations in the baker map. *J. Phys. A*,
 Vol. 32, p. 5071, 1999.