

固体中の Stark ラダー電子と光学的フォノンの 弱結合理論

東大教養物理 齊 藤 基 彦

(6 月 1 9 日 受 理)

§ 1. 序

固体中の電子エネルギー準位は、外電場によって量子化されることが Wannier¹⁾ によって理論的に予言され、Stark ラダーと呼ばれている。この準位は x 方向にかけられた電場を $-F$ 、電子の電荷を $-e$ 、 x 方向の Brillouin 域の周期を $2\pi/a$ 、 x 軸に垂直な方向の自由度によるエネルギーを $\epsilon_{\perp}$ で表わす時、

$$\epsilon_{\nu} = eFa\nu + \epsilon_{\perp} \quad (\nu: \text{整数}) \quad (1.1)$$

で与えられる。この予言によると、完全結晶においては電場を作用させても、Bragg 反射のために電子の波動関数は $x = -a\nu$ の近傍に局在して、電流は生じない。この著しい特徴のため、この準位を実験的に検証しようとする試みが数多くなされたが、いずれも十分な確証を得るに至っていない。²⁾

最近 Maekawa³⁾ は閃亜鉛鉱型の ZnS の蒸着膜結晶を用い、 $[1, 1, 1]$ 方向に強電場をかけ電気伝導率を測定したところ、伝導率は電場と共に振動する事を見出した。更に最近 Yao, Inagaki, Maekawa⁴⁾ はこの実験を精密化したところ、 ω を光学的フォノンの角振動数として、伝導率の山の起る電場は

$$F = \hbar\omega / ena \quad (n: \text{整数}) \quad (1.2)$$

である事を確認した。

この事は 1 個のフォノンの放出吸収によって $\nu \rightarrow \nu \pm n$ のラダーの遷移が起り、そのために生ずる電流が観測されているものと考えられる。⁵⁾ ここではこのような 1 フォノン-多ラダー遷移に起因する電流を計算してみた。その結果 (1.2) における山は Stark ラダー電子の 2 次元的な状態密度の反映したものである事が判明した。そして定量的にも満足すべき結果を得たので報告

する。

§ 2. 電流の表式

現象が1個のフォノンの放出吸収に関するものであるから、電子格子相互作用を考えるのに Tamm-Dankoff 近似を用いるのが適當である。ハミルトニアン H は電子系と格子系のハミルトニアン H_e , H_L と電子格子相互作用ハミルトニアン H_{eL} の和

$$H = H_e + H_L + H_{eL} \quad (2.1)$$

で書かれる。電子系の固有函数を $| \alpha \rangle$, 固有値を ϵ_α , フォノン系の固有関数を $| N_q \rangle$, 固有値を $N \hbar \omega$ とする。全系の固有関数を

$$\Psi_\alpha = A \sum_{\beta} \{ h_{\beta} + \sum_q g_{\beta}(q) | 1_q \rangle \} | \beta \rangle \quad (2.2)$$

としよう。ただし A は規格化定数, h_{β} , $g_{\beta}(q)$ は定められるべき定数で $h_{\alpha} \simeq 1$ のごとく選ばれる。電子格子相互作用をフォノンの生成消滅演算子 b_q^+ , b_q を用いて

$$H_{eL} = \sum_q \{ U_q(r) b_q + h.c. \} \quad (2.3)$$

と書く事にする。ただし

$$U_q(r) = \frac{c}{\sqrt{\Omega q}} e^{i q \cdot r} \quad (2.4)$$

で, Ω は系の体積, c は結合強度で, 有効質量 m , Fröhlich の結合強度 α と

$$c^2 = 4 \pi \alpha \hbar^2 \omega^2 (\hbar / 2 m \omega)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

で結びついている。 Ψ_α の固有値 E を定める永年方程式は $(H - E) \Psi_\alpha = 0$ の左側から, $\langle 0 | (r |$ と $\langle 1_q | (r |$ をかけて得られる。それらはそれぞれ

$$(\epsilon_r - E)h_r + \sum_{\beta q} g_{\beta}(q)(r|U|\beta) = 0, \quad (2.6)$$

$$\sum_{\beta} (r|U^*|\beta)h_{\beta} + (\epsilon_r + \hbar\omega - E)g_r(q) = 0 \quad (2.7)$$

である。ここで $U_q(r)$ を U と略記した。

(2.7) よりただちに

$$g_{\beta}(q) = \frac{1}{E - \epsilon_{\beta} - \hbar\omega} \sum_{\delta} (\beta|U^*|\delta)h_{\delta} \quad (2.8)$$

が得られ、これを (2.6) に代入すれば

$$(E - \epsilon_r)h_r - \sum_{\beta \delta q} \frac{(r|U|\beta)(\beta|U^*|\delta)}{E - \epsilon_{\beta} - \hbar\omega} h_{\delta} = 0 \quad (2.9)$$

が得られる。従って固有値は

$$\det \left| (E - \epsilon_r) \delta_{r\delta} - \sum_{\beta q} \frac{(r|U|\beta)(\beta|U^*|\delta)}{E - \epsilon_{\beta} - \hbar\omega} \right| = 0. \quad (2.10)$$

の解として得られる。

ここではこの解を U^2 まで正しく求めてみよう。このとき

$$h_{\delta} = \delta_{\alpha\delta} + O(U) \quad (2.11)$$

だから、(2.9) より

$$h_r = \frac{1}{E - \epsilon_r} \sum_{\beta} \frac{(r|U|\beta)(\beta|U^*|\alpha)}{E - \epsilon_{\beta} - \hbar\omega}, \quad (2.12)$$

また (2.8) より

$$g_{\beta}(q) = \frac{(\beta|U^*|\alpha)}{E - \epsilon_{\beta} - \hbar\omega} \quad (2.13)$$

が得られる。これらを (2.2) 代入すれば固有函数 ψ_{α} が求められる。

次に得られた Ψ_α で速度の期待値を求めよう。I と同じく、考えているエネルギー帯は

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m} - W \cos a k_x \quad (2.14)$$

の形をとる事としよう。ただし $k_\perp$ は電場 F と垂直な方向の波数ベクトル、 $2w$ は電場方向の帯巾である。そうすると Stark ラダーの波動関数は

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} | \alpha) &\equiv (\mathbf{r} | \nu, k_\perp) \\ &= L^{-1} \exp(i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}) \varphi_\nu(x), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\varphi_\nu(x) = \sqrt{a} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk_x}{2\pi} \exp \left[i(x + \nu a) k_x + \frac{iW}{eFa} \sin a k_x \right] \quad (2.16)$$

の形をとる。 $\varphi_\nu(x)$ は $x = -\nu a$ を中心として w/eFa 程度のところに局在する波動関数である。また電場方向の速度演算子は考えているエネルギー帯では

$$v = \frac{aW}{\hbar} \sin a k_x$$

で与えられるから、Stark ラダー間の行列要素は

$$\begin{aligned} (\nu, k_\perp | v | \nu', k'_\perp) \\ = \delta(k_\perp - k'_\perp) \frac{a^2 W}{2\pi\hbar} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_x \sin a k_x \\ \times \exp[ia(\nu' - \nu)k_x] \end{aligned}$$

となる。ただし δ は Kronecker のデルタである。従って

$$\langle \nu_1, k_\perp | v | \nu \pm 1, k_\perp \rangle = \pm \frac{aWi}{2\hbar}, \quad (2.17)$$

その他の行列要素は 0 である。すなわち Stark ラダー電子は電流を運ばない。

齊藤基彦

また同様の計算により

$$\begin{aligned}
 (\nu k_{\perp} | U_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) | \nu', k'_{\perp}) &= \frac{c}{\sqrt{\Omega} q} \delta(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) \\
 &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \{ (\nu + \nu') a q_x + (\nu - \nu') \pi \} \right] \\
 &\times J_{\nu - \nu'} \left(\frac{2W}{eFa} \sin \frac{a q_x}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

がわかる。ただし J_n は n 次の第一種の Bessel 関数である。

速度演算子の期待値は $(\alpha | v | \alpha) = 0$ である事に注意すると、

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha} &\equiv (\Psi_{\alpha} | v | \Psi_{\alpha}) \\
 &= \sum_{\beta} \sum_{r q} \left\{ \frac{(\alpha | v | \beta)(\beta | U | r)(r | U^* | \alpha)}{(E - \epsilon_{\beta})(E - \epsilon_r - \hbar \omega)} + c. c. \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\alpha | U | \beta)(\beta | v | r)(r | U^* | \alpha)}{(E^* - \epsilon_{\beta} - \hbar \omega)(E - \epsilon_r - \hbar \omega)} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

となる。ただし v_{α} は既に U の 2 次であるから規格化因子は 1 にした。(2.17), (2.18) を利用して (2.19) をあらわに計算すると、単純だが長い計算の後に、

$$\begin{aligned}
 v_{\alpha} &= \sum_n \sum_{q m = \pm 1} \frac{a c^2 W}{\Omega \hbar q^2} J_n(\xi) J_{n-m}(\xi) \sin \frac{a q_x}{2} \\
 &\times \frac{\Gamma_{\alpha}}{(\tilde{\epsilon} + eFa n)^2 + \Gamma_{\alpha}^2} \times \frac{1}{m} \left\{ \frac{\tilde{\epsilon} + eFa n + eFam + 4\alpha}{(eFam + 4\alpha)^2 + \Gamma_{\alpha}^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(\tilde{\epsilon} + eFa n) + eFam}{(eFa)^2 + 4\Gamma_{\alpha}^2} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

を得る。ただし

$$\xi = \frac{2W}{eFa} \sin \frac{aq_x}{2}, \quad (2.21)$$

$$E = \varepsilon_\alpha + A_\alpha + i\Gamma_\alpha \quad (2.22)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m} - \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp)^2}{2m} + A_\alpha - \hbar\omega. \quad (2.23)$$

ここでエネルギーのずれ A_α は eFa に較べて無視して良いとし、更に $\tilde{\varepsilon} + eFan \approx 0$ のみが和に寄与する事に注意すると、十分良い近似で

$$\begin{aligned} v_\alpha = & \sum_{nq} \frac{nac^2}{2\hbar q^2} J_n^2(\xi) \frac{\Gamma_\alpha}{(\tilde{\varepsilon} + eFan)^2 + \Gamma_\alpha^2} \\ & \times \left[\frac{(eFa)^2}{(eFa)^2 + \Gamma_\alpha^2} + \frac{(eFa)^2}{(eFa)^2 + 4\Gamma_\alpha^2} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

が得られる。ただし (2.24) を得るには、Bessel 関数の公式

$$J_{n-1}(\xi) + J_{n+1}(\xi) = (2n/\xi) J_n(\xi)$$

を利用した。

(2.24) の物理的な意味は次のように理解される。状態 α にある電子の寿命は

$$\Gamma_\alpha = \sum_{nq} \frac{c^2}{2q^2} J_n^2(\xi) \frac{\Gamma_\alpha}{(\tilde{\varepsilon} + eFan)^2 + \Gamma_\alpha^2} \quad (2.25)$$

で表わされる。簡単のためにこの Γ_α を (2.25) の右辺で $\Gamma_\alpha \rightarrow 0$ とした極限の値

$$r_n = \pi \sum_q \frac{c^2}{2q^2} J_n^2(\xi) \delta(\tilde{\varepsilon} + eFan) \quad (2.26)$$

を用いて

$$\Gamma_{\alpha} = \sum_n r_n \quad (2.27)$$

と近似しよう。 r_n は ν には依存せず n と $|k_{\perp}|$ のみの関数である。ここでラダー ν から $\nu - n$ に距離 na だけ跳びフォノンを 1 個放出する事による電流の寄与を

$$v_n = na / \tau_n \quad (2.28)$$

と書けば (2.24) は

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{r_n}{\hbar} \left[\frac{(eFa)^2}{(eFa)^2 + \Gamma_{\alpha}^2} + \frac{(eFa)^2}{(eFa)^2 + 4\Gamma_{\alpha}^2} \right] \quad (2.29)$$

を意味する。すなわち伝導率の緩和時間は $\hbar / r_n$ に (2.29) のカギカッコのような補正が必要である。

§ 3. 緩和時間の計算

緩和時間を (2.26) によって具体的に計算しよう。そのために q の和を電場方向を極軸とする回転座標系の積分に直すと、

$$r_n = \frac{\pi c^2}{8\pi^3} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq_x \int_0^{\infty} dq_{\perp} q_{\perp} \frac{J_n^2(\xi)}{q^2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ \times \delta \left(eFan - \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k_{\perp}}{m} q_{\perp} \cos \theta - \frac{\hbar^2 q_{\perp}^2}{2m} \right), \quad (3.1)$$

ただし ξ は (2.21) に定義されている。これを θ について積分し、被積分関数が q_x の偶関数である事に注意すると、

$$r_n = \frac{c^2}{2\pi^2} \int_0^{\pi/a} dq_x \int_0^{\infty} \frac{dq_{\perp} q_{\perp}}{q^2} \frac{J_n^2(\xi)}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k_{\perp}}{m}\right)^2 - \left(eFan - \hbar\omega - \frac{\hbar^2 q_{\perp}^2}{2m}\right)^2}} \quad (3.2)$$

ただし * 印は $q_{\perp}$ の積分が平方根の引数が正となる範囲に限られる事を意味する。ここで計算を見易くするために

$$q_x = \frac{2p}{a}, \quad q_{\perp} = \frac{2Q}{a}, \quad k_{\perp} = \frac{2k}{a} \quad (3.3)$$

によって変数変換し、無次元の量

$$D = \frac{ma^2}{2\hbar^2} (eFa - \hbar\omega) \quad (3.4)$$

を定義すると、(3.2)は

$$r_n = \frac{mac^2}{2\pi^2\hbar^2} \int_0^{\pi/2} \frac{dQ Q I_n(Q)}{\sqrt{4K^2 Q^2 - (D - Q^2)^2}} \quad (3.5)$$

と簡単化される。ただし

$$I_n(Q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dP}{P^2 + Q^2} J_n^2(t \sin P), \quad (3.6)$$

$$t = 2W / eFa. \quad (3.7)$$

$I_n(Q)$ は厳密に評価する事はむずかしいが、付録に示した計算によって近似的に

$$I_n(Q) = \frac{A_n Q_n^2}{Q^2 + Q_n^2} \quad (3.8)$$

として良い事がわかる。ただし

$$A_n = \frac{e^2 t}{8\pi n^2} \frac{2n+1}{2n-1}, \quad (3.9a)$$

$$Q_n^2 = \frac{(2n-1)}{2n+1} \ln\left(\frac{\pi e t}{4n}\right) \frac{8n^2}{e^2 t^2}. \quad (3.9b)$$

(3.5) の Q の積分範囲は、平方根の中身が正となる条件

$$(Q-K)^2 < D+K^2 < (Q+K)^2 \quad (3.10)$$

で定められる。従って

$$D + K^2 > 0 \quad (3.11)$$

のとき $|K - \sqrt{K^2 + D}| < Q < K + \sqrt{K^2 + D}$

$$|K - \sqrt{K^2 + D}| < Q < K + \sqrt{K^2 + D} \quad (3.12)$$

が積分範囲となる。ここで

$$Q^2 - (D + 2K^2) = 2K \sqrt{K^2 + D} \quad u$$

によって変数変換すると, u の変域は -1 から 1 になり積分は簡単に実行できて, 結果は

$$r_n = \frac{m a c^2}{4 \pi \hbar^2} A_n Q_n^2 \frac{\theta(D + K^2)}{\sqrt{(Q_n^2 + D)^2 + 4 Q_n^2 K^2}} \quad (3.13)$$

となる。ただし $\theta(x)$ は階段関数で

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

一般に K (あるいは $k_{\perp}$) の値は温度によっていろいろの値を取り得るから, 熱平均

$$\langle r_n \rangle = \int_0^{\infty} dK K r_n(K) \exp\left(-\frac{2 \hbar^2 K^2}{m a^2 k_{\beta} T}\right) \quad (3.14)$$

をとると, これは十分低温では

$$\begin{aligned} \langle r_n \rangle &= \alpha \hbar \omega \left(\frac{m a^2 \omega}{2 \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{A_n Q_n^2}{Q_n^2 + |D|} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{\hbar^2}{m a^2 k_{\beta} T} (D - |D|) \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

で与えられる。 $T = 0$ ではこれは勿論 (3.13) で $K = 0$ としたものと同じ。

§ 4. 実験との比較

以後では話を簡単にするために $T = 0$ で考えよう。 r_n の電場依存性を考えると、 $eFa = \hbar\omega/n$ で

$$\frac{\alpha e^2}{8\pi} \frac{2n+1}{2n-1} \left(\frac{ma^2\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2W}{n} \simeq \frac{3\alpha e^2}{8\pi} \left(\frac{2ma^2W^2}{\hbar^3\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar\omega}{n} \quad (4.1)$$

なる値に跳び $eFa > \hbar\omega/n$ ではほぼこの値に等しい (弱い電場依存性はあるが)。従って (2.27) によって Γ_α は $1nF$ 程度の弱い電場依存性しか持たないから、これを弱電場における準位の巾 $\hbar/2\tau$ で代表して良からう。緩和時間 τ には光学的フォノン以外 (例えば音響型フォノン, 不純物) との相互作用も考慮しなければならない。このとき因子 $(eFa)^2 / \{ (eFa)^2 + \hbar^2/4\tau^2 \}$ は F についてほぼ単調増加の関数で、 $eFa \sim \hbar/2\tau$ の程度の電場までは $(2eFa\tau/\hbar)^2$ で近似できる。このため電流 (2.24) を考えると

$$v \simeq \sum_n B a \omega \left(\frac{eFa\tau}{\hbar} \right)^2 \theta(eFa n - \hbar\omega) \quad (4.2)$$

$$B = \frac{15\alpha e^2}{8\pi} \left(\frac{2ma^2W^2}{\hbar^3\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

として良い事がわかる。従って v は電場 $eFa = \hbar\omega/n$ で $Ba\omega(\omega\tau/n)^2$ だけ不連続に跳ぶ階段状の関数となる。この電場における易動度の跳び $\Delta\mu_n$ を弱電場の易動度 $\mu_0 (= e\tau/m)$ と比較すると、その比は

$$\frac{\Delta\mu_n}{\mu_0} = \frac{B}{n} \frac{ea^2}{\hbar\mu_0} (\omega\tau)^2 \quad (4.4)$$

となるが $\mu_0 \simeq 10 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{S}$ とすれば、ZnS の諸定数⁵⁾ を用いると、 $B = 14.2$, $\omega\tau = 0.15$ となり $\Delta\mu_n/\mu_0 = 0.06n^{-1}$ となる。これは実験の観察⁴⁾ と完全に一致する。

温度を高くするとどのように変化するだろうか。それは (3.14) にもどって考えれば良いが、(3.15) の形より推察されるように r_n は電場巾

齊藤基彦

$\Delta F \sim k_B T / e a n$ 程度のぼけを持つなだらかな階段状の関数になると考えられる。一方階段の平坦部の領域は $\hbar\omega / e a n^2$ の程度であるから $n > \hbar\omega / K_B T$ になると伝導率の振動を観測するのはむずかしくなる。実験では窒素温度で $n \sim 3$ あたりまで観測されているからこの関係は満されている。

微分伝導率は (4.2) より明らかなように $e F a = \hbar\omega / n$ で $n^{-1} \delta(e F a n - \hbar\omega)$ に比例するすどい山を持つ。この結果も実験的観測と一致する。

§ 5. 結 論

以上の諸考察により Yao, Inagaki, Maekawa の実験⁴⁾ は Stark ラダー電子の存在を確証するものであると結論する事ができる。

(4.2) にみられるような階段状の電流変化は Stark ラダー電子の2次元的な状態密度の反映である。定量的, 定性的に理論の予想と完全に一致する。

最後に有益な討論, 重要な示唆をしていただいた水野幸夫助教授に感謝の意を表する。

付 録

積 分

$$I_n(Q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP}{P^2 + Q^2} J_n^2(t \sin P) \quad (A.1)$$

を考えよう。この積分は厳密に評価する事が困難なので近似的に計算する。Bessel 関数の近似形として,

$$J_n^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x_n} \left(\frac{x}{x_n}\right)^{2n} & x < x_n \quad (A.2a) \\ \frac{1}{\pi x} & x > x_n \quad (A.2b) \end{cases}$$

$$x_n = [2^{2n} (n!)^2 / \pi]^{1/2n+1} \quad (A.3)$$

を採用する。 x_n は $n!$ に対して Stirling の公式を用いると, ほぼ $2n/e$

に等しい。更に (A. 1) で Bessel 関数の引数を tP で近似すると, (A. 1) は

$$I(Q) = \int_0^{\beta_n} \frac{dP}{P^2 + Q^2} \cdot \frac{1}{\pi x_n} \left(\frac{P}{\beta_n}\right)^{2n} + \int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP}{P^2 + Q^2} \frac{1}{\pi tP}, \quad (A. 4)$$

$$\beta_n = x_n / t \quad (A. 5)$$

となる。今の場合 β_n はほぼ $(2/e)(\hbar\omega/2w)$ に等しいから, 1 より十分小さいとして良い。(A. 4) の第 1 項は Q の小さい場合と大きい場合に応じてそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi t \beta_n^2} \cdot \frac{1}{2n-1} & (Q \ll \beta_n) \\ \frac{1}{\pi t Q^2} \cdot \frac{1}{2n+1} & (Q \gg \beta_n) \end{cases}$$

となり, また第 2 項は

$$\frac{1}{2\pi t Q^2} \ln \frac{1 + (Q/\beta_n)^2}{1 + (2Q/\pi)^2}$$

となり, 従って $I(Q)$ の近似形として $Q \ll \beta_n$ と $Q \gg \beta_n$ で正しいふる舞いをする関数

$$I_n(Q) = \frac{1}{2\pi t \beta_n^2} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{Q_n^2}{Q^2 + Q_n^2} \quad (A. 6)$$

$$Q_n^2 = \frac{2(2n-1)}{2n+1} \left(\ln \frac{\pi}{2\beta_n} \right) \beta_n^2 \quad (A. 7)$$

を選ぶ事が出来る。(A. 5) を用いれば (3.9a) (3.9b) を得る。

参 考 文 献

- 1) G.H.Wannier : Elements of Solid State Theory (Cambridge Univ. Press, N. Y., 1959) p. 190.
G.H.Wannier : Phys. Rev. 117 (1960) 452.
- 2) 前川綱 : 物理学会誌 25 (1970) 313.
- 3) S. Maekawa : Phys. Rev. Letters 24 (1970) 1175.
- 4) 八百隆文, 稲垣勝哉, 前川綱 : 1971年春の分科会 (東大教養) 7 a F 9.
- 5) 齊藤基彦 : 物性研究 15 (1971) 417.

ここでは 2) によって予想された多フォノン-1ラダー遷移の過程が計算されているが, 2) の予想は否定的であった。

以後 I と引用される。