

# 対相互作用模型の対角化と基底状態について

信州大学理学部・佐々木 格, 宇佐美 京介

Itaru Sasaki and Kyosuke Usami

Department of Mathematics, Shinshu University

## 1 復習・主結果

この解説文は「RIMS 講究録量子場の数理とその周辺 2019」の佐々木の講究録の続きである\*1。

フォック空間と関連する事柄についての定義や記号は教科書 [1], [5] にしたがう。 $\mathcal{H}$  を可分な複素ヒルベルト空間とし, フォック空間  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上に作用するハミルトニアン

$$H = d\Gamma_b(T) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_S(g_n)^2 \quad (1)$$

を考える。これによって定義される量子場の模型を対相互作用模型という。

ハミルトニアンを定める  $T, \lambda_n, g_n$  に対して, 次の条件を定める:

(B1)  $T > 0$ . つまり  $T$  は非負で単射な自己共役作用素である。

(B2)  $\lambda_n \in \mathbb{R}, g_n \in \text{dom}(T^{1/2}) \cap \text{dom}(T^{-1/2}), n = 1, 2, \dots$

(B3)  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{-1/2} g_n\|^2 < \infty$

(B4)  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{1/2} g_n\|^2 < \infty$

(B5) ある  $\varepsilon > 0$  があって, 次の作用素の等式が成り立つ:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |T^{-1/2} g_n\rangle \langle T^{-1/2} g_n| \geq \varepsilon$$

(B6) 次を満たす  $\mathcal{H}$  上の共役子  $J$  が存在する:

$$J T J = T, \quad J g_n = g_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

---

\*1 論文 [7] の後半の解説でもある。講演内容は松澤泰道氏 (信州大学) との共同研究に基づく。

定理 1. 仮定 (B1)–(B6) のもとで,  $H$  は  $\text{dom}(d\Gamma_b(T))$  上で自己共役かつ  $d\Gamma_b(T)$  の任意の芯上で本質的に自己共役である。

(B1)–(B6) を仮定し,

$$S := \left( T^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |T^{1/2} g_n\rangle \langle T^{1/2} g_n| \right)^{1/2} \quad (2)$$

とすると (B5) より  $S > 0$  である。作用素  $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  を

$$X := \frac{1}{2} \left( \overline{T^{-1/2} S^{1/2}} + \overline{T^{1/2} S^{-1/2}} \right), \quad Y := \frac{1}{2} \left( \overline{T^{-1/2} S^{1/2}} - \overline{T^{1/2} S^{-1/2}} \right) \quad (3)$$

によって定義し,  $B(f) := \overline{A(Xf) + A(JYf)}$  とおくと,  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上のユニタリ作用素  $U$  で

$$UB(f)U^* = A(f), \quad f \in \mathcal{H} \quad (4)$$

を満たすものが存在する。この  $U$  を Bogoliubov 変換という。次が主定理である。

定理 2. (B1)–(B6) を仮定する。  $U$  を (4) を満たす Bogoliubov 変換とするとき

$$UHU^* = d\Gamma_b(S) + E \quad (5)$$

となる。ここに, 基底状態エネルギー  $E$  は

$$E = \frac{1}{2} \text{tr}(\overline{S - T}) \quad (6)$$

で与えられる。

主定理の証明のうち (5) を導出する対角化部分については, 2019 年度の講究録で解説したのでそちらを参照していただきたい。本講究録では, 次の第 2 節で (6) の導出を解説し, 第 3 節で双極近似の Pauli-Fierz 模型を含む応用例について紹介する。

## 2 基底状態エネルギーの表示

この節では (6) の証明を行う。次は対角化 (5) の直接の帰結である。

命題 3. (B1)–(B6) を仮定する。このとき  $\overline{YS^{1/2}}$  は Hilbert-Schmidt であり,

$$E = \langle \Omega, H\Omega \rangle - \|\overline{YS^{1/2}}\|_{\text{HS}}^2. \quad (7)$$

*Proof.* まず, 定理 2 から  $H = U^* d\Gamma_b(S)U + E$  であり, これの真空期待値を取れば

$$E = \langle \Omega, H\Omega \rangle - \langle U\Omega, d\Gamma_b(S)U\Omega \rangle$$

となる (ここで定理 1 より  $\Omega \in \text{dom}(d\Gamma_b(T)) = \text{dom}(H)$  であることに注意)。つぎに,  $S \geq 0$  なので  $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{dom}(S)$  を  $\mathcal{H}$  の CONS とするとき

$$\langle U\Omega, d\Gamma_b(S)U\Omega \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \|A(S^{1/2}e_k)U\Omega\|^2 < \infty$$

が成り立つ。ここで (4) を使うと

$$\begin{aligned} \|A(S^{1/2}e_k)U\Omega\| &= \|U^*A(S^{1/2}e_k)U\Omega\| = \|B(S^{1/2}e_k)\Omega\| = \|A^*(JYS^{1/2}e_k)\Omega\| \\ &= \|JYS^{1/2}e_k\| = \|YS^{1/2}e_k\| \end{aligned}$$

となる。したがって,  $\overline{YS^{1/2}}$  は Hilbert-Schmidt であり, (7) が成り立つ。  $\square$

$H$  の具体形 (1) を使って (7) を計算すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|\Phi_S(g_n)\Omega\|^2 - \|\overline{YS^{1/2}}\|_{\text{HS}}^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|g_n\|^2 - \text{tr}(\overline{YSY^*}) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで  $\overline{YS^{1/2}}(\overline{YS^{1/2}})^* = \overline{YSY^*}$  を用いた\*2。

$\text{tr}(\overline{YSY^*})$  を計算するために補題を用意する。

**補題 4.** (B1)–(B6) を仮定する。このとき, 任意の  $-1/2 \leq p, q \leq 1/2$  を満たす  $p, q$  に対して  $T^p(S - T)T^q$  は稠密に定義された有界作用素であり,  $\overline{T^p(S - T)T^q}$  はトレース型作用素である。

*Proof.* 証明の方針は  $S$  を  $S = (2/\pi) \int_0^\infty (S^2 + t^2)^{-1} t^2 dt$  と  $S^2$  のレゾルベントで表わし,  $S - T$  を積分表示することと,  $S^p T^{-p}$  が有界であることを適切に用いることである。詳細は [7] の Lemma 6.2 の証明を参照していただきたい。  $\square$

---

\*2 これは自明ではないが, 今の仮定のもとでは  $Y^* \text{dom}(S) \subset \text{dom}(S)$  が成り立ち,  $YSY^*$  が稠密に定義されることから示すことができる。

さて、 $Y$  の定義にしたがって、 $\overline{YSY^*}$  を変形しよう。 $\text{dom}(T^k) = \text{dom}(S^k)$  ( $k = 1, 2$ ) に注意すると、 $\text{dom}(T^2) \cap \text{dom}(T^{-1/2})$  上で

$$\begin{aligned}\overline{YSY^*} &= YSY^* = \frac{1}{4}(T^{-1/2}S^{1/2} - T^{1/2}S^{-1/2})S(S^{1/2}T^{-1/2} - S^{-1/2}T^{1/2}) \\ &= \frac{1}{4}(T^{-1/2}S^2T^{-1/2} - T^{-1/2}ST^{1/2} - T^{1/2}ST^{-1/2} + T) \\ &= \frac{1}{4}\{T^{-1/2}WT^{-1/2} + T^{-1/2}(T - S)T^{1/2} + T^{1/2}(T - S)T^{-1/2}\}\end{aligned}$$

となる。最後の等式で  $W := \sum_{n=1}^{\infty} |T^{1/2}g_n\rangle \langle T^{1/2}g_n|$  として  $S^2 = T^2 + W$  となることを使った。 $\overline{T^{-1/2}WT^{-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |g_n\rangle \langle g_n|$  であり、これのトレースは  $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2$  なので、(8) は

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|g_n\|^2 - \frac{1}{4} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|g_n\|^2 + \text{tr}(\overline{T^{-1/2}(T - S)T^{1/2}} + \overline{T^{1/2}(T - S)T^{-1/2}}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}(\overline{T^{-1/2}(S - T)T^{1/2}}) + \frac{1}{4} \text{tr}(\overline{T^{1/2}(S - T)T^{-1/2}}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re tr}(\overline{T^{-1/2}(S - T)T^{1/2}}) \quad (9)\end{aligned}$$

となる。上式の変形では、補題 4 により  $\overline{T^{\pm 1/2}(S - T)T^{\mp 1/2}}$  がトレース型となることを用いた。さて、上のトレースを安易に

$$\text{tr}(T^{-1/2}(S - T)T^{1/2}) = \text{tr}((S - T)T^{1/2}T^{-1/2}) = \text{tr}(S - T)$$

と計算するのは論理的に誤りであり、式変形は慎重に議論する必要がある。補題 4 で  $p = 0, -1/2$  とすれば  $\overline{(S - T)T^{1/2}}$  の値域は  $\text{dom}(T^{-1/2})$  に含まれ、

$$\overline{T^{-1/2}(S - T)T^{1/2}} = T^{-1/2}\overline{(S - T)T^{1/2}}$$

が成り立つ\*3。同様に、作用素の等式

$$\overline{T^{1/2}(S - T)} = T^{1/2}\overline{(S - T)}$$

も成り立つ。補題 4 より  $\overline{(S - T)T^{1/2}}$  はトレース型作用素なので、 $\mu_m > 0$  と正規直交系  $\{e_m\}_m, \{f_m\}_m$  を用いて、それを

$$\overline{(S - T)T^{1/2}} = \sum_m \mu_m |e_m\rangle \langle f_m|$$

---

\*3 なぜなら  $h \in \mathcal{H}$  に対して、 $h_n \in \text{dom}(T^{3/2})$  で  $h_n \rightarrow h$ ,  $(S - T)T^{1/2}h_n \rightarrow \overline{(S - T)T^{1/2}h}$  となるものを取れば、 $T^{-1/2}(S - T)T^{1/2}h_n$  は Cauchy 列である。したがって、 $T^{-1/2}$  の閉性より  $\overline{(S - T)T^{1/2}h} \in \text{dom}(T^{-1/2})$  かつ  $T^{-1/2}(S - T)T^{1/2}h = T^{-1/2}\overline{(S - T)T^{1/2}h}$  となるから。

と表すことができる。ここから、

$$\overline{(S-T)T^{1/2}}f_m = \mu_m e_m, \quad \overline{((S-T)T^{1/2})}^* e_m = \mu_m f_m,$$

と

$$\begin{aligned} (\{f_m\}_m)^\perp &\subset \ker(\overline{(S-T)T^{1/2}}), \\ (\{e_m\}_m)^\perp &\subset \ker\left(\overline{((S-T)T^{1/2})}^*\right) = \ker(T^{1/2}(\overline{S-T})) = \ker(\overline{S-T}) \end{aligned}$$

がしたがう。以上を用いると (9) は次のように変形することができる：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{tr}(T^{-1/2} \overline{(S-T)T^{1/2}}) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m \left\langle f_m, T^{-1/2} \overline{(S-T)T^{1/2}} f_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m \left\langle f_m, T^{-1/2} \mu_m e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m \left\langle \mu_m f_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m \left\langle \overline{((S-T)T^{1/2})}^* e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m \left\langle T^{1/2} \overline{(S-T)} e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m \left\langle T^{1/2} \overline{(S-T)} e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m \left\langle \overline{(S-T)} e_m, e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left\langle \overline{(S-T)} e_m, e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\overline{S-T}). \end{aligned}$$

したがって、 $E = (1/2)\operatorname{tr}(\overline{S-T})$  である。(証明終)

### 3 例

主定理を用いて、以下の量子場の模型の対角化を解説を行う。

(1) 単純な対相互作用模型 (場の 2 次の相互作用が一項だけの場合)

- (2) 調和振動子とボース場の結合模型
- (3)  $x^2$  ポテンシャルを持つ双極近似の Pauli-Fierz 模型
- (4) 並進不変な双極近似の Pauli-Fierz 模型

(4) の場合はハミルトニアンに対角化だけでなく、基底状態が存在する（または存在しない）為の条件についての結果も紹介する。

上の例の対角化には先行研究があり、新井 [2, 3, 4, 6] によって議論されている。それらでは、ハミルトニアンに対角化する Bogoliubov 変換を構成する為に散乱理論が使われたが、定理 2 を用いることでより機械的に対角化することができる。ただし、対角化後の 1 粒子ハミルトニアンの特値解析は別に行わなければならない。

### 3.1 単純な対相互作用模型

$T > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $g \in \text{dom}(T^{1/2}) \cap \text{dom}(T^{-1/2})$  を仮定し、ハミルトニアン

$$H = d\Gamma_b(T) + \frac{\lambda}{2} \Phi_S(g)^2 \quad (10)$$

を考える。この模型を対角化するためには、(B1)–(B6) を確かめればよい。明らかに (B1)–(B4) は成り立つ。この模型では (B6) は次の補題から自動的に従う。

**補題 5.** 可分な複素ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の任意の自己共役作用素  $A$  と  $h \in \mathcal{H}$  に対して、 $AJ = JA$ ,  $Jh = h$  を満たす  $\mathcal{H}$  上の共役子  $J$  が必ず存在する。

*Proof.* 証明のアイディアは次のとおりである。まず、 $A$  を掛け算作用素にユニタリ変換し  $A \rightarrow \hat{A}(m)$ ,  $h \rightarrow \hat{h}(m)$  とする。つぎに  $\hat{h}(m)$  の偏角の複素共役による掛け算を行い  $\hat{h}(m) \rightarrow |\hat{h}(m)|$  とする。この操作もユニタリであり  $\hat{A}(m)$  は不変である。このとき、 $\hat{A}(m)$  と  $|\hat{h}(m)|$  は実数値なので複素共役で不変である。複素共役をとる共役子、偏角の掛け算とユニタリ変換で戻す操作の合成を  $J$  とすれば、これは  $\mathcal{H}$  上の共役子であり補題の条件を満たすものである。詳細は [7] を参照。  $\square$

条件 (B5) は、

$$1 + \lambda |T^{-1/2}g\rangle \langle T^{-1/2}g| > \varepsilon \quad (11)$$

となる  $\varepsilon > 0$  が存在することであるが、これは

$$1 + \lambda \|T^{-1/2}g\|^2 > 0 \quad (12)$$

と同値であることは簡単に確かめられる。したがって次の定理を得る

定理 6.  $1 + \lambda \|T^{-1/2}g\|^2 > 0$  とする。このとき, (B5) が成立する。したがって, (10) で定義される  $H$  は下に有界な自己共役作用素であり,  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上のユニタリ作用素  $U$  で次を満たすものが存在する。

$$UHU^* = d\Gamma_b\left(\sqrt{T^2 + \lambda |T^{1/2}g\rangle \langle T^{1/2}g|}\right) + E, \quad (13)$$

ここで  $E$  は  $H$  の基底状態エネルギーであり

$$E = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \sqrt{T^2 + \lambda |T^{1/2}g\rangle \langle T^{1/2}g|} - T \right) \quad (14)$$

である。

### 3.2 調和振動子とボース場の結合模型

ヒルベルト空間  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上に作用するハミルトニアン

$$H := \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma_b(T) + \lambda x \otimes \Phi_S(g) \quad (15)$$

を考える。ここで  $p = -id/dx$ ,  $x$  は掛け算作用素,  $\lambda \in \mathbb{R}$  と  $\omega > 0$  は定数であり,  $T > 0$  は  $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素である。  $g \in \text{dom}(T^{1/2}) \cap \text{dom}(T^{-1/2}) \setminus \{0\}$  とすれば, 定義域について,

$$\text{dom}(x \otimes \Phi_S(g)) \supset \text{dom}(x^2 \otimes 1) \cap \text{dom}(1 \otimes d\Gamma_b(T)) \quad (16)$$

なので,  $\text{dom}(H) = \text{dom}(p^2 + x^2) \cap \text{dom}(1 \otimes d\Gamma_b(T))$  である。

定理 7.  $|\lambda| < \omega \|T^{-1/2}g\|^{-1}$  とする。このとき,  $H$  は自己共役であり, ユニタリ作用素  $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_b(\mathbb{C} \oplus \mathcal{H})$  が存在して,

$$UHU^* = d\Gamma_b\left(\begin{pmatrix} \omega^2 & \lambda |1\rangle \langle T^{1/2}g| \\ \lambda |T^{1/2}g\rangle \langle 1| & T^2 \end{pmatrix}^{1/2}\right) + E, \quad (17)$$

ここで,

$$E = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} \omega^2 & \lambda |1\rangle \langle T^{1/2}g| \\ \lambda |T^{1/2}g\rangle \langle 1| & T^2 \end{pmatrix}^{1/2} - \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & T^2 \end{pmatrix} \right).$$

さて, ハミルトニアン (15) を対角化する為に, 基本となるのは次の構造である:  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  をヒルベルト空間とすると, 2つのフォック空間  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$  と

$\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{H}_2)$ の間には関係式

$$\begin{aligned}\Phi_S(f_1 \oplus f_2) &\cong \overline{\Phi_S(f_1) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi_S(f_2)}, \\ \Omega &\cong \Omega \otimes \Omega.\end{aligned}$$

を満たすような自然な同型が存在する [1, p.208]。

また,  $L^2(\mathbb{R})$  上の消滅作用素を  $a = 2^{-1/2}(\omega^{1/2}x + i\omega^{-1/2}p)$  と定義すると, 同型  $u : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_b(\mathbb{C})$  で

$$uau^* = A(1), \quad u(\omega/\pi)^{1/2} \exp(-\omega x^2/2) = \Omega$$

となるものが存在する。この同型も  $\cong$  で書けば, 調和振動子のハミルトニアンと  $x$  は, それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) &= \frac{\omega}{2}(a^*a + 1) \cong d\Gamma_b(\omega) + \frac{\omega}{2} \\ x &= \omega^{-1/2}(a + a^*)/\sqrt{2} \cong \omega^{-1/2}\Phi_S(1)\end{aligned}$$

となる\*4。したがって, ハミルトニアン (15) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}H &\cong d\Gamma_b(\omega) \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma_b(T) + \omega^{-1/2}\lambda\Phi_S(1) \otimes \Phi_S(g) + \frac{\omega}{2} \\ &\cong d\Gamma_b(\omega \oplus T) + \frac{\omega^{-1/2}\lambda}{4} \left\{ \Phi_S(1, g)^2 - \Phi_S(1, -g)^2 \right\} + \frac{\omega}{2} \\ &= \tilde{H} + \frac{\omega}{2}.\end{aligned}$$

このとき,  $\tilde{H}$  はハミルトニアン (1) の形であり, 記号の対応は

$$T \rightarrow \omega \oplus T, \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{\omega^{-1/2}\lambda}{2}, \quad g_1 = (1, g), \quad g_2 = (1, -g)$$

である。定理 7 の証明のためには (B1)–(B6) を確認すればよいが, (B1)–(B4) は自明, (B5) も補題 5 から成り立つ。いまの場合, (B5) は

$$K := 1 + \lambda_1 |(\omega, T)^{-1/2}g_1\rangle \langle (\omega, T)^{-1/2}g_1| - \lambda |(\omega, T)^{-1/2}g_2\rangle \langle (\omega, T)^{-1/2}g_2| > 0$$

である。 $K$  は部分空間  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}T^{-1/2}g$  を簡約し, 直交部分は恒等作用素である。簡約部分は  $2 \times 2$  行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega^{-1}\lambda \|T^{-1/2}g\| \\ \omega^{-1}\lambda \|T^{-1/2}g\| & 1 \end{pmatrix}$$

---

\*4 作用素の閉包の記号は省略した。

となる。したがって、これの固有値問題を解けば、 $\lambda$  が定理の条件を満たすことと、上の行列は正定値が正定値であることが同値であることがわかる。したがって (B5) が成り立つ。

### 3.3 $x^2$ ポテンシャルを持つ双極近似の Pauli-Fierz 模型の対角化

$L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  に作用するハミルトニアン

$$H := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (p_j \otimes 1 + 1 \otimes \Phi_S(g_j))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \omega_j^2 x_j^2 \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma_b(T) \quad (18)$$

を考える。ここで  $\omega_j > 0$  は定数,  $T > 0$ ,  $g_1, \dots, g_d \in \text{dom}(T^{1/2}) \cap \text{dom}(T^{-1/2})$  とする。  $p_j = -i\partial/\partial x_j$  である。

定理 8.  $\mathcal{H}$  上の共役子  $J$  が存在して  $TJ = JT$ ,  $Jg_j = g_j$ ,  $j = 1, \dots, d$  とする。このとき,  $H$  は自己共役であり, ユニタリ作用素  $U : L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_b(\mathbb{C}^d \oplus \mathcal{H})$  が存在して

$$UHU^* = d\Gamma_b \left( \sqrt{\text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_d^2) \oplus T^2 + W} \right) + E \quad (19)$$

となる。ここで

$$E = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \sqrt{\text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_d^2) \oplus T^2 + W} - \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_d) \oplus T \right) + \sum_{j=1}^d \frac{\omega_j}{2}, \quad (20)$$

であり,  $W$  は  $\mathbb{C}^d \oplus \mathcal{H}$  上の作用素で

$$W := \sum_{j=1}^d \begin{pmatrix} 0 & \omega_j |e_j\rangle \langle T^{1/2}g_j| \\ \omega_j |T^{1/2}g_j\rangle \langle e_j| & |T^{1/2}g_j\rangle \langle T^{1/2}g_j| \end{pmatrix} \quad (21)$$

と定義されるものである。

定理 8 の証明は, 定理 7 のそれとほぼ同じであるが, 共役子  $J$  に関する部分に少し注意しておく。  $J_0$  を  $L^2(\mathbb{R}^d)$  上の単に複素共役を取る共役子とすると,  $J_0x = J_0x$  だが  $J_0p = -pJ_0$  である。したがって, (18) をそのまま (1) の形にしたときに,  $T$  と  $g_n$  を同時に不変にする共役子を見つけづらい。これを回避するために, 調和振動子のハミルトニアンがフーリエ変換で不変であることを利用する。フーリエ変換では  $p_j \leftrightarrow x_j$  となり, 調和振動子のハミルトニアンは不変であり,  $p_j \otimes \Phi_S(g_j) \leftrightarrow x_j \otimes \Phi_S(g_j)$  とな

る。すると、粒子と場の相互作用項は前節と同じ形を取る。したがって、共役子に関する議論を前小節と同じに行うことができる\*5。

### 3.4 並進不変な双極近似の Pauli-Fierz 模型

$L^2(\mathbb{R}^d, dx) \otimes \mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上のハミルトニアン

$$H := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (p_j \otimes 1 + 1 \otimes \Phi_S(g_j))^2 + 1 \otimes d\Gamma_b(T) \quad (22)$$

を考える。これは前小節で  $\omega_j = 0$  ( $j = 1, \dots, d$ ) としたものである。 $T > 0$  は自己共役,  $g_j \in \text{dom}(T^{1/2}) \cap \text{dom}(T^{-1/2})$  ( $j = 1, \dots, d$ ) と仮定する。

$\mathcal{F}_d$  を  $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$  から  $L^2(\mathbb{R}^d, dP)$  へのフーリエ変換とし,  $H$  を変換すると  $p_j = -i\partial/\partial x_j$  は変数  $P_j$  による掛け算作用素となる。そこで  $P = (P_1, \dots, P_d) \in \mathbb{R}^d$  に対して  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上の作用素

$$H(P) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (P_j + \Phi_S(g_j))^2 + 1 \otimes d\Gamma_b(T) \quad (23)$$

$$= d\Gamma_b(T) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \Phi_S(g_j)^2 + \sum_{j=1}^d P_j \Phi_S(g_j) + \sum_{j=1}^d \frac{P_j^2}{2} \quad (24)$$

を定義する。

以下,  $H(P)$  を対角化するために,  $TJT$ ,  $Jg_j = g_j$ ,  $j = 1, \dots, d$  となる  $\mathcal{H}$  上の共役子が存在すると仮定する。

$$H_0 := d\Gamma_b(T) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \Phi_S(g_j)^2 \quad (25)$$

は  $d\Gamma_b(T)$  上で自己共役であり,  $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$  上のユニタリ作用素  $U$  で

$$UH_0U^* = d\Gamma_b(S) + E, \quad S := \sqrt{T^2 + \sum_{j=1}^d |T^{1/2}g_j\rangle \langle T^{1/2}g_j|}, \quad (26)$$

---

\*5 論文 [7] では, より直接に共役子を構成しているが, フーリエ変換を使った議論のほうがわかりやすいかもしれない。

$E = \text{tr}(\overline{S - T})/2$  となるものが存在する。このとき,  $U\Phi_S(g_j)U^* = \Phi_S(S^{-1/2}T^{1/2}g_j)$  なので

$$UH(P)U^* = d\Gamma_b(S) + \Phi_S\left(S^{-1/2}T^{1/2}\sum_{j=1}^d P_j g_j\right) + \sum_{j=1}^d \frac{P_j^2}{2} + E \quad (27)$$

となる。 $S^{-1/2}T^{1/2}g_j \in \text{dom}(S^{-1/2})$  なので,  $UH(P)U^*$  は  $\text{dom}(d\Gamma_b(S)) = \text{dom}(d\Gamma_b(T))$  上で自己共役であることに注意する。(27) は van-Hove 模型<sup>\*6</sup>なので対角化可能性は赤外正則条件を調べる事と同値である。ここでは,  $H(P)$  の基底状態の存在に関する結果を紹介する。

**定理 9.** 次の 2 つは同値である。

- (a) すべての  $P \in \mathbb{R}^d$  について  $H(P)$  の基底状態が存在する。
- (b)  $g_j \in \text{dom}(T^{-1}), j = 1, \dots, d$ .

*Proof.* 各  $P \in \mathbb{R}^d$  について  $H(P)$  が基底状態を持つことの必要十分条件は

$$S^{-1/2}T^{1/2}\sum_{j=1}^d P_j g_j \in \text{dom}(S^{-1}) \quad (28)$$

である<sup>\*7</sup>。これは明らかに

$$T^{1/2}\sum_{j=1}^d P_j g_j \in \text{dom}(S^{-3/2}) \quad (29)$$

と同値である。もし,

$$\text{dom}(S^{-3/2}) = \text{dom}(T^{-3/2}) \quad (30)$$

が成り立てば, (b)  $\rightarrow$  (a) がしたがう。(30) は非自明であり, おそらく一般には不成立と思われる。しかし  $g_j \in \text{dom}(T^{-1})$  ( $j = 1, \dots, d$ ) の仮定のもとで (30) を示すことができる ([7, Lemma B.1])。

一方, (a) を仮定すれば, (29) から各  $j$  について  $T^{1/2}g_j \in \text{dom}(S^{-3/2})$  となる。(30) が成り立てば  $g_j \in \text{dom}(T^{-3/2})$  となるので (b) がしたがうのだが, いまの条件のもとでは (30) を直接示すのはおそらく難しい。(b) を示すためにはより込み入った議論が必要になる。詳細は [7, Theorem 7.5] に譲る。□

---

<sup>\*6</sup> [1](下) p.241

<sup>\*7</sup> 文献については [7] を参照

上の結果では、 $g_j$  には一般性をもたせていたが、より現実的な Pauli-Fierz 模型では、 $g_j$  は偏極ベクトルで作られ、関係式

$$\langle T^{-1/2}g_j, T^{-1/2}g_\ell \rangle = \|T^{-1/2}g_1\|^2 \delta_{j\ell}, \quad j, \ell = 1, \dots, d \quad (31)$$

が成り立つ。この条件のもとでは、より強い次の結果が成り立つ。

**定理 10.** 条件 (31) を仮定する。このとき、任意の  $P \in \mathbb{R}^d$  に対して  $H(P)$  の基底状態エネルギー  $E(P)$  は

$$E(P) = \frac{1}{2(1 + \|T^{-1/2}g_1\|^2)} \sum_{j=1}^d P_j^2 + E \quad (32)$$

となる。さらに次は同値である。

- (i)  $H(P)$  は基底状態を持つ。
- (ii)  $\sum_{j=1}^d P_j g_j \in \text{dom}(T^{-1})$ .

*Proof.* アイディアだけ紹介する。 $A = 1 + \sum_{j=1}^d |T^{-1/2}g_j\rangle \langle T^{-1/2}g_j|$  とおくと、 $S^2 = TAT$  であり、直交性 (31) のもとでは、逆作用素が

$$A^{-1} = 1 - \frac{1}{1 + \|T^{-1/2}g_1\|^2} \sum_{j=1}^d |T^{-1/2}g_j\rangle \langle T^{-1/2}g_j|$$

と求まる。したがって  $S^{-2} = T^{-1}A^{-1}T^{-1}$  から  $S^{-2}$  を  $g_j$  を用いて具体的に表すことができる。 $g := \sum_{j=1}^d P_j g_j$  とおくと  $H(P)$  が基底状態を持つことと  $T^{1/2}g \in \text{dom}(S^{-3/2})$  は同値だが、もしこれが成り立つとすると、上の  $S^{-2}$  の具体形から  $T^{-1}g$  を

$$T^{-1}g = \frac{1}{1 + \|T^{-1/2}g_1\|^2} (S^{-1/2}T^{1/2})^* S^{-3/2}T^{1/2}g$$

と具体的に表すことができ、ここから (ii)  $g \in \text{dom}(T^{-1})$  がしたがう。逆も、 $S^{-2}$  の表示を使い  $S^{-1/2}T^{1/2}$  が有界であることに注意すればよい。□

定理 9 の条件 (a) はすべての  $P \in \mathbb{R}^d$  に関するものだが、定理 10 の条件 (i) や (ii) は固定した  $P \in \mathbb{R}^d$  に関するものである事に注意。

## 4 最後に

この研究は JSPS 科研費 16K17612, 20K03628 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] 新井朝雄, フォック空間と量子場 (上, 下), 増補改訂版, 日本評論社, 2017
- [2] A. Arai, On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. I, *J. Math. Phys.*, **22**, 2539–2548, (1981)
- [3] A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, *J. Math. Phys.*, **24**, 1896–1910, (1983)
- [4] A. Arai, A note on scattering theory in non-relativistic quantum electrodynamics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**, 49–70, (1983)
- [5] A. Arai, *Analysis on Fock spaces and Mathematical theory of quantum fields*, World Scientific, (2018)
- [6] K. Asahara and D. Funakawa, Spectral analysis of an abstract pair interaction model, to appear in *Hokkaido Math. J.*, arXiv:1807.08408v1
- [7] Y. Matsuzawa, I. Sasaki, K. Usami, Explicit diagonalization of pair interaction models, *Anal. Math. Phys.*, to appear, (2021)