

An example of an m -isometry

神奈川大学 長 宗雄, Muneo Chō, Kanagawa University
九州大学 太田昇一, Shōichi Ôta, Kyushu University
東北薬科大学 棚橋浩太郎, Kotaro Tanahashi,
Tohoku Pharmaceutical University

1. 概要

本論の目的は、ある可逆な $(m+1)$ -isometry 作用素の中で m -isometry にならない作用素の例を構成することである。

2. 歴史

ヒルベルト空間上の isometry ($T^*T = I$) は基本的な作用素の 1 つで、その構造については Wold 分解が知られている。 m -isometry の研究は J. Agler, M. Stankus (1995) [1,2,3] によって精力的になされた。次がその定義である。

[定義] ヒルベルト空間上の作用素 T が m -isometry であるとは

$$\begin{aligned} 0 &= B_m(T) \\ &= T^{*m}T^m - \binom{m}{1} T^{*(m-1)}T^{m-1} + \binom{m}{2} T^{*(m-2)}T^{m-2} - \cdots + (-1)^m I. \end{aligned}$$

従って 1-isometry なら

$$B_1(T) = T^*T - I = 0$$

なので isometry に一致する。よって m -isometry は isometry の一般化であるが、より一般に次がわかっている。([1, 2, 3])

[命題 1]

T が m -isometry なら T は $(m+1)$ -isometry である。

[証明]

$$B_{m+1}(T) = T^*B_m(T)T - B_m(T) = 0.$$

本論はこの逆を考えるが、一般に逆は成立しない。

[反例 2] (A. Athavale 1991 [4])

ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上の weighted unilateral shift を

$$Te_n = w_n e_{n+1}, \quad w_n = \sqrt{\frac{n+m}{n}} \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots$$

と定める。このとき T は $(m+1)$ -isometry であるが m -isometry ではない。

例えば $m = 1$ の場合

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ \sqrt{\frac{2}{1}} & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

とおくと

$$B_1(T) = T^*T - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \neq 0$$

であるが

$$\begin{aligned} B_2(T) &= T^*T^*TT - 2T^*T + I \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{1} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{4}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

である。従って T は 2-isometry であるが 1-isometry ではない。この他の性質として次が知られている。([1, 2, 3])

[命題 3]

(1) T が m -isometry なら、近似点スペクトルは $\sigma_a(T) \subset \{z : |z| = 1\}$ である。よって T が可逆でないなら $\sigma(T) = \{z : |z| \leq 1\}$ で、可逆なら $\sigma(T) \subset \{z : |z| = 1\}$ となる。

(2) T が m -isomery なら $B_{m-1}(T) \geq 0$ である。

さて命題 1 の逆問題に戻る、反例 2 の作用素は unilateral shift なので可逆ではない。可逆という条件を加えると次が成立する。([1, 2, 3])

[定理 4]

T が可逆な m -isomery で m が偶数なら T は $(m-1)$ -isomery である。

従って、可逆な 2-isometry は 1-isomery になる。次に m が奇数ならこの結果が成立するかという問題を考える。とりあえず可逆な 3-isometry

は 2-isometry になるかを調べる。この問題に対し太田が次のような解答を与えた。

[反例 5] (太田 2011)

ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の weighted bilateral shift を

$$Te_n = w_n e_{n+1}, \quad w_n = \sqrt{\frac{|n|+3}{|n|+1}} \text{ for } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

と定める。このとき T は可逆な 3-isometry であるが 2-isometry ではない。

本論では一般の偶数 m について、可逆な $(m+1)$ -isometry であるが m -isometry ではない例を構成する。なお、詳しくは [5] を参照して欲しい。

3. 主結果

[定理 6]

偶数 m と定数 $a > 0$ に対して関数

$$\phi(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)$$

を考える。ここで $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の weighted bilateral shift $Te_n = w_n e_{n+1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を

$$w_n = \sqrt{\frac{\phi(n+1) + a}{\phi(n) + a}} = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m) + a}{n(n+1)\cdots(n+m-1) + a}}$$

とおくと T は可逆な $(m+1)$ -isometry であるが m -isometry でない。

[証明]

関数 $\phi(x)$ は偶関数なのですべての整数 n に対して

$$\phi(n) + a \geq 0 + a > 0$$

となることに注意する。weight を計算すると

$$w_n = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m) + a}{n(n+1)\cdots(n+m-1) + a}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \pm\infty)$$

となるので $\sigma(T) = \{z : |z| = 1\}$ である。よって T は可逆である。

定義から T が m -isometry になる必要十分条件は $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} 0 = I_{m,n} &= w_n^2 w_{n+1}^2 \cdots w_{n+m}^2 - \binom{m+1}{1} w_n^2 w_{n+1}^2 \cdots w_{n+m-1}^2 \\ &+ \binom{m+1}{2} w_n^2 w_{n+1}^2 \cdots w_{n+m-2}^2 + \cdots + (-1)^m \binom{m+1}{m} w_n^2 + (-1)^{m+1} \end{aligned}$$

となることがわかる。従って $I_{m+1,n} = 0, I_{m,n} \neq 0$ を示せばよい。

まず $I_{m+1,n} = 0$ を示す。そのために

$$f(x) = x^{n+m-1}(x-1)^{m+1}$$

を考える。ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= (x^{n+m-1})^{(m)}(x-1)^{m+1} + \binom{m}{1} (x^{n+m-1})^{(m-1)} ((x-1)^{m+1})^{(1)} \\ &\quad + \cdots + x^{n+m-1} ((x-1)^{m+1})^{(m)} \end{aligned}$$

となるが

$$((x-1)^{m+1})^{(m)} = (m+1)m \cdots 2(x-1)$$

なので $f^{(m)}(1) = 0$ がわかる。一方、2項展開して

$$f(x) = x^{n+2m} - \binom{m+1}{1} x^{n+2m-1} + \cdots + (-1)^{m+1} x^{n+m-1}$$

を m 回微分することにより

$$\begin{aligned} f^{(m)}(1) &= (n+2m)(n+2m-1) \cdots (n+m+1) \\ &\quad - \binom{m+1}{1} (n+2m-1)(n+2m-2) \cdots (n+m) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{m+1} (n+m-1)(n+m-2) \cdots n \end{aligned}$$

となる。分母をはらうと

$$\begin{aligned} I_{m+1,n}(\phi(n) + a) &= (n+2m)(n+2m-1) \cdots (n+m+1) + a \\ &\quad - \binom{m+1}{1} \{(n+2m-1)(n+2m-2) \cdots (n+m) + a\} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{m+1} \{(n+m-1)(n+m-2) \cdots n + a\} \\ &= f^{(m)}(1) + a(1-1)^{m+1} = 0 \end{aligned}$$

が得られる。よって $I_{m+1,n} = 0$ である。

次に $I_{m,n} \neq 0$ を示す。そのために $g(x) = x^{n+m-1}(x-1)^m$ を考える。ライプニッツの公式から

$$\begin{aligned} g^{(m)}(x) &= (x^{n+m-1})^{(m)}(x-1)^m + \binom{m}{1} (x^{n+m-1})^{(m-1)} ((x-1)^m)^{(1)} \\ &\quad + \cdots + x^{n+m-1} ((x-1)^m)^{(m)} \end{aligned}$$

となるが

$$((x-1)^m)^{(m)} = m!$$

なので $g^{(m)}(1) = m!$ がわかる。一方、2項展開して

$$g(x) = x^{n+2m-1} - \binom{m}{1} x^{n+2m-2} + \cdots + (-1)^m x^{n+m-1}$$

を m 回微分することにより

$$\begin{aligned} g^{(m)}(1) &= (n+2m-1)(n+2m-2)\cdots(n+m) \\ &\quad - \binom{m}{1}(n+2m-2)(n+2m-3)\cdots(n+m-1) \\ &\quad + \cdots + (-1)^m(n+m-1)(n+m-2)\cdots n \end{aligned}$$

となる。分母をはらうと

$$\begin{aligned} I_{m,n}(\phi(n) + a) &= (n+2m-1)(n+2m-2)\cdots(n+m) + a \\ &\quad - \binom{m}{1}\{(n+2m-2)(n+2m-3)\cdots(n+m-1) + a\} \\ &\quad + \cdots + (-1)^m\{(n+m-1)(n+m-2)\cdots n + a\} \\ &= g^{(m)}(1) + a(1-1)^m = m! \neq 0 \end{aligned}$$

が得られる。よって $I_{m,n} \neq 0$ である。

[注意]

$\ell^2(\mathbb{N})$ 上の unilateral shift としたら、この例は可逆でない $(m+1)$ -isometry であるが m -isometry にならない例である。更に $a=0$ とおくと

$$w_n = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)+0}{n(n+1)\cdots(n+m-1)+0}} = \sqrt{\frac{n+m}{n}}$$

となる。これは Athavale による反例 2 である。

REFERENCES

- [1] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space I*, Integr. Equat. Oper. Theory, **21**(1995), 387-429.
- [2] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space II*, Integr. Equat. Oper. Theory, **23**(1995), 1-48.
- [3] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space III*, Integr. Equat. Oper. Theory, **24**(1996), 379-421.
- [4] A. Athavale, *Some operator theoretic calculus for positive definite kernels*, Proc. Amer. Math. Soc. **112**(3)(1991), 701-708.
- [5] M. Chō, S. Ôta and K. Tanahashi, *Invertible weighted shift operators which are m-isometries*, (to appear in Proceedings of American Mathematical Society).

M. Chō

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kanagawa University,
Yokohama 221-8686, Japan

E-mail address: chiyom01@kanagawa-u.ac.jp

S. Ôta

Department of Content and Creative Design
Kyushu University, Fukuoka 815-8540, Japan

E-mail address: ota@design.kyushu-u.ac.jp

K. Tanahashi

Tohoku Pharmaceutical University, Sendai 981-8558, Japan

E-mail address: tanahasi@tohoku-pharm.ac.jp