

Adequacy and Sufficiency

大阪市大 理学部 杉浦 誠

§ 1. 序

この小論は Bahadur [1] の Sufficiency - Transitivity, Hall - Wijsman - Ghosh [2] の Conditional independence, そして Skibinsky [3] の Adequacy の相互関係をはっきりさせることを目的としている。従って十分統計量の性質などには触れていない。

§ 2 では記号の説明及び諸定義, § 3 では [1], [2], [3] の関係を示し最後にある条件のもとで, Adequacy に関する因子分解定理を証明した。§ 4 では Adequacy の予測問題への応用を竹内啓 [4] に従って示し, Adequate 統計量の例をいくつか示した。

§ 2. 諸定義, 記号

$(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ を標本空間, $\mathcal{P} = \{P\}$ を $\mathcal{U}$ 上の確率測度の集合とする。 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{X}$ の部分集合のつくる σ -field とし, $\mathcal{B}$ の

元がすべて $\mathcal{U}$ の元であるならば, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{U}$ の sub-field とい
 い $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ とかく。 $x \in \mathcal{X}$ に対し $\pi(x)$ を x を含むある命題と
 する。ある $\mathcal{U}$ - $\mathcal{P}$ -零集合 N があって $\pi(x)$ は $x \in \mathcal{X} - N$ で真
 であるとき, $\pi(x) [\mathcal{U}, \mathcal{P}]$ とかく。

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{U}$ とする。そこでどんな $B_1 \in \mathcal{B}_1$ に対しても $B_2 \in \mathcal{B}_2$
 が存在して $(B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1)$ が $\mathcal{U}$ - $\mathcal{P}$ -零集合であるな
 りば $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 [\mathcal{U}, \mathcal{P}]$ とかく。またこの逆が成り立てば $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$
 $[\mathcal{U}, \mathcal{P}]$ と定義する。

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ であって, P を $\mathcal{U}$ 上の確率測度, $f(x)$ を $\mathcal{U}$ - P -可積分
 とする。Radon-Nikodym theorem からどんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても
 も, $\int_B g(x) dP = \int_B f(x) dP$ を満足する $g(x)$ ($\mathcal{B}$ - P -可積分)
 が存在する。(この $g(x)$ は $\mathcal{B}$ - P -零集合を除いて一意である。)
 上で存在した $g(x)$ を $E_P[f(x)|\mathcal{B}]$ と書き, $\mathcal{B}$ が与えられたとき
 の P に関する $f(x)$ の条件付期待値という。なお $f(x) = \chi_A(x)$
 ($A \in \mathcal{U}$) のときは, $E_P[\chi_A(x)|\mathcal{B}] (= P(A|\mathcal{B}))$ を A の条
 件付確率という。

§ 3. Adequacy, Sufficiency, Transitivity & Conditional independence.

$\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{P}$ を $\mathcal{U}$ 上の確率測度の集合とする。

定義 1. [3]. ① どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても, $\mathcal{B}_0$ -可測 $\varphi_B(x)$ が

存在して、どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても、 $\varphi_B(x) = E_P[\chi_A(x) | \mathcal{B}_0]$

$[\mathcal{U}, P]$

② どんな $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対しても $E_P[\chi_C(x) | \mathcal{B}] = E_P[\chi_C(x) | \mathcal{B}_0]$

$[\mathcal{U}, P]$

上の①, ② が成り立つとき, $\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ に関して adequate であるといひ $\mathcal{B}_0 \text{ adq} [\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ とかく。

また $\mathcal{U}_0 = \{\phi, \neq\}$ とすれば, $\mathcal{B}_0 \text{ adq} [\mathcal{B}; \mathcal{U}_0, \mathcal{P}]$ は $\mathcal{B}_0$ が $\mathcal{P}$ に対して $\mathcal{B}$ の十分 sub-field であることの定義と一致する。
(これを $\mathcal{B}_0 \text{ suf} [\mathcal{B}; \mathcal{P}]$ とかくことにする。)

定義 2. [1] $\mathcal{B}_m^0 \subseteq \mathcal{B}_m$, $\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{B}_{m+1}$, $\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{U}$, $m = 1, 2, 3, \dots$
とする。① $\mathcal{B}_m^0 \text{ suf} [\mathcal{B}_m; \mathcal{P}]$, $m = 1, 2, \dots$, ② どんな $C \in \mathcal{B}_{m+1}^0$
 $P \in \mathcal{P}$ に対しても, $E_P[\chi_C(x) | \mathcal{B}_m] = E_P[\chi_C(x) | \mathcal{B}_m^0]$, $[\mathcal{U}, P]$, $m = 1, 2, \dots$

上の①, ② が成り立つとき, $\{\mathcal{B}_m^0\}$ は $\{\mathcal{B}_m\}$ の十分, transitive な列といふ。(注意. ②の条件を transitive といふ。)

なお定義 2 を定義 1 を使って云えば, $\mathcal{B}_m^0 \text{ adq} [\mathcal{B}_m; \mathcal{B}_{m+1}^0, \mathcal{P}]$,
 $m = 1, 2, \dots$ である。

定義 3. [2] $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{U}$ とする。どんな $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$, $P \in \mathcal{P}$ に対しても, $E_P[\chi_{B_1}(x) \cdot \chi_{B_2}(x) | \mathcal{B}_3] = E_P[\chi_{B_1}(x) | \mathcal{B}_3] \cdot E_P[\chi_{B_2}(x) | \mathcal{B}_3]$, $[\mathcal{U}, P]$ が成り立つならば, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ は $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立であるといふ。

定理 1. [2] 定義 1 の条件②の必要十分条件は $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ が $\mathcal{B}_0$

に關して条件付独立であることである。

(証明), (必要性). $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{B_0} E_P[\chi_B \cdot \chi_C | B_0] dP &= \int_{B_0} \chi_B \cdot \chi_C dP = \int_{B_0 \cap B} \chi_C dP = \int_{B_0 \cap B} E_P[\chi_C | B] dP \\ &= \int_{B_0} \chi_B E_P[\chi_C | B_0] dP = \int_{B_0} E_P[\chi_B | B_0] \cdot E_P[\chi_C | B_0] dP, \forall B_0 \in \mathcal{B}_0 \end{aligned}$$

(十分性). $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_B E_P[\chi_C | B] dP &= \int \chi_B \cdot \chi_C dP = \int E_P[\chi_B \cdot \chi_C | B_0] dP \\ &= \int E_P[\chi_B | B_0] \cdot E_P[\chi_C | B_0] dP = \int_B E_P[\chi_C | B_0] dP \end{aligned}$$

次に $P \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{C}$, ($P(C) > 0$), なる (P, C) に対して $P^C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$ ($A \in \mathcal{A}$) で P^C を定義すれば P^C は $\mathcal{A}$ 上の確率測度になる。そこで $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{P^C; P \in \mathcal{P}, C \in \mathcal{C}, P(C) > 0\}$ とおくならば次の定理が成り立つ。

定理 2. [3] 次の i) ~ iv) は同値である。

i) $\mathcal{B}_{\text{inf}}[\mathcal{B}; \mathcal{P}(\mathcal{C})]$

ii) どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても, $\mathcal{B}_0$ -可測 $\varphi_B(x)$ が存在して,

$$E_P[\chi_{B_0} \cdot \varphi_B | \mathcal{C}] = E_P[\chi_{B_0 \cap B} | \mathcal{C}], [\mathcal{C}, P], \forall B_0 \in \mathcal{B}, P \in \mathcal{P}$$

iii) どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても, $\mathcal{B}_0$ -可測 $\varphi_B(x)$ が存在して,

$$\varphi_B(x) = E_P[\chi_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}], [\mathcal{A}, P], \forall P \in \mathcal{P}$$

iv) $\mathcal{B}_{\text{adq}}[\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$

(証明), i) ⇔ ii) よりどんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても,

$\mathcal{B}_0$ -可測 $\varphi_B(x)$ が存在して,

$$P^G(B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B dP^G \quad \forall B_0 \in \mathcal{B}_0, P \in \mathcal{P}, C \in \mathcal{C} \text{ である.}$$

$$\text{従って, } \int_C E_P[\chi_{B_0 \cap B} | \mathcal{C}] dP = \int_C \chi_{B_0 \cap B} dP = \int_C E_P[\chi_{B_0} \cdot \varphi_B | \mathcal{C}] dP$$

ii) $\Rightarrow$ iii) ii) より $B \in \mathcal{B}, B_0 \in \mathcal{B}_0, C \in \mathcal{C}, P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\int_C E_P[\chi_{B_0 \cap B} | \mathcal{C}] dP = \int_C E_P[\varphi_B \cdot \chi_{B_0} | \mathcal{C}] dP \quad \text{である} \quad \text{--- ①}$$

$$\text{①の左辺} = \int_{B_0 \cap C} \chi_B dP = \int_{B_0 \cap C} E_P[\chi_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] dP$$

$$\text{①の右辺} = \int_C \varphi_B \chi_{B_0} dP = \int_{B_0 \cap C} \varphi_B dP$$

$$\text{従って, } \varphi_B(x) = E_P[\chi_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}], [\mathcal{A}, P]$$

iii) $\Rightarrow$ iv) iii) より どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても $\mathcal{B}_0$ -可測 $\varphi_B(x)$ が存在して, どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても

$$\varphi_B(x) = E_P[\chi_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] = E_P[\chi_B | \mathcal{B}_0], [\mathcal{A}, P] \quad \text{であるから}$$

$\mathcal{B}_0 \text{adg}[\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ の定義の①が云えた。

次に $B_0 \in \mathcal{B}_0, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}, P \in \mathcal{P}$ に対して

$$P(B_0 \cap B \cap C) = \int_{B_0 \cap C} \varphi_B dP = \int_{B_0 \cap C} E_P[\chi_B | \mathcal{B}_0] dP = \int_{B_0 \cap B} E_P[\chi_C | \mathcal{B}_0] dP$$

$$\text{従って, } B_0 = \mathcal{X} \text{ とおくと } \int_B E_P[\chi_C | \mathcal{B}_0] dP = \int_B E_P[\chi_C | \mathcal{B}] dP$$

故に $\mathcal{B}_{\text{adq}}[\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ の定義の②が云々した。

iv) $\Rightarrow$ i) $B_0 \in \mathcal{B}_0, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}, P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\begin{aligned} P(B_0 \cap B \cap C) &= \int_{B_0 \cap B} E_P[\chi_C | \mathcal{B}] dP = \int_{B_0 \cap B} E_P[\chi_C | \mathcal{B}_0] dP \\ &= \int_{B_0 \cap C} E_P[\chi_B | \mathcal{B}_0] dP = \int_{B_0 \cap C} \varphi_B dP, \quad \left(\text{iii) の } \mathcal{B}_{\text{adq}}[\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}] \text{ の定義のから} \right) \end{aligned}$$

従って $P(C) > 0$ に対して

$$\frac{P(B_0 \cap B \cap C)}{P(C)} = \int_{B_0} \varphi_B \cdot \frac{\chi_C}{P(C)} dP \quad \therefore P^C(B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B dP^C$$

系 2.1 $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ とするならば $\mathcal{B}_{\text{adq}}[\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{B}_{\text{suf}}[\mathcal{B}; \mathcal{P}]$ とは必要十分である。

(証明) $\mathcal{B}$ 上では $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}$ である。従って定理の i) $\Leftrightarrow$ iv) より結論を得る。

定義 4. [3]. $P \in \mathcal{P}$ に対して $\mathcal{X} \times \mathcal{B}$ 上の関数 $P_B^{\mathcal{C}}$ が次の①, ②を満足するならば $P_B^{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}, \mathcal{P}$ に関する $\mathcal{B}$ の regular な条件付確率という

- ① $P_B^{\mathcal{C}}(\cdot, B) \quad (\forall B \in \mathcal{B})$ は $E_P[\chi_B | \mathcal{C}]$ の version
- ② $P_B^{\mathcal{C}}(x, \cdot) \quad (\forall x \in \mathcal{X})$ は $\mathcal{B}$ 上の確率測度

今どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても, regular な条件付確率 $P_B^{\mathcal{C}}$ が存在すると仮定して, その全体を $\mathcal{P}_B^{\mathcal{C}} = \{P_B^{\mathcal{C}}(x, \cdot); P \in \mathcal{P}, x \in \mathcal{X}\}$

とおく。そうすれば次の定理が成り立つ。

定理 3. [3] i) どのような $P \in \mathcal{P}$ に対しても regular な条件付確率が存在するとする。

$$\mathcal{B}_0 \text{ suf} [\mathcal{B}; \mathcal{P}_B^e] \implies \mathcal{B}_0 \text{ adq} [\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$$

ii) また $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ が可分ならば定義 4 の ①, ② を満足する regular な条件付確率が存在して, i) の逆が成り立つ。

(証明) i) $f(x)$ も $\mathcal{B}$ - P -可積分とある。regular な条件付確率 P_B^e が存在するならば $E_P[f|\mathcal{C}] = \int f dP_B^e [\mathcal{C}, P]$ である。

いま $\mathcal{B}_0 \text{ suf} [\mathcal{B}; \mathcal{P}_B^e]$ かつ, どのような $B \in \mathcal{B} \setminus \emptyset$ に対しても $\mathcal{B}_0$ -可測

$\varphi_B(x)$ が存在して, $P_B^e(\cdot, B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B(x) dP_B^e, (\forall B_0 \in \mathcal{B}_0, P \in \mathcal{P})$ ①

$$\text{①の左辺} = E_P[\chi_{B_0 \cap B} | \mathcal{C}] [\mathcal{C}, P]$$

$$\text{①の右辺} = E_P[\chi_{B_0} \varphi_B | \mathcal{C}] [\mathcal{C}, P]$$

であるから定理 2 の ii) が云えた。

ii) i) の逆を仮定することは定理 2 の ii) を仮定することである。 $B_0 \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B}, P \in \mathcal{P}$ に対して, $\mathcal{C}$ - P -零集合 $N_{B_0, B}(P)$ が存在して, どのような $x \in X - N_{B_0, B}(P)$ に対しても

$$P_B^e(x, B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B dP_B^e(x, \cdot) \quad \text{である。}$$

$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ が可分であることより $\hat{\mathcal{B}}_0 = \{B_{0i} : i=1, 2, \dots\}$
 $\hat{\mathcal{B}} = \{B_j : j=1, 2, \dots\}$ を $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ を生成する $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ の可付随

部分集合族とする。そこで $N(p) = \bigcup_{i,j} N_{B_0 \cup B_j}(p) \ (\forall p \in \mathcal{P})$
 とおく。 $N(p)$ は $\mathcal{C}$ - $\mathcal{P}$ -零集合であつて、 $x \in X - N(p)$ に対し

$$P_B^{\mathcal{C}}(x, B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B dP_B^{\mathcal{C}}(x, \cdot) \ (\forall B_0 \in \hat{\mathcal{B}}_0, B \in \hat{\mathcal{B}}) \quad \text{--- (2) である。}$$

従つて (2) はどんな $B_0 \in \hat{\mathcal{B}}_0, B \in \hat{\mathcal{B}}$ に対しても成り立つ。この
 ことより $\hat{\mathcal{B}}_0$ が $\{P_B^{\mathcal{C}}(x, \cdot) : p \in \mathcal{P}, x \in X - N(p)\}$ に対しても
 分であることとを意味している。

今 $Q = \{Q_{p,x} : p \in \mathcal{P}, x \in X\}$

$$\begin{aligned} \text{但し } Q_{p,x} &= P_B^{\mathcal{C}}(x, \cdot) && : x \in X - N(p) \\ &= P_B^{\mathcal{C}}(\zeta_p, \cdot) && : x \in N(p) \quad (\zeta_p \text{ は } X - N(p) \text{ の任意の点}) \end{aligned}$$

とすれば $Q_{p,x}$ は定義4の①, ②を満足し $\mathcal{B}_0 \text{ suf } [\mathcal{B}; Q]$ である。

定義5.13 $\mathcal{B}^* \leq \mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ とする。

① $\mathcal{B}^* \text{ adq } [\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$

② $\mathcal{B}_0 \text{ adq } [\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ とすれば $\mathcal{B}^* \leq \mathcal{B}_0 [\mathcal{A}, \mathcal{P}]$

上の①, ②が成り立つとき $\mathcal{B}^*$ を $\mathcal{B}$ に対し $\mathcal{C}, \mathcal{P}$ に関して
 最小な adequate であるといふ。 $\mathcal{B}^* \text{ min adq } [\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ とかく。

今 $\mathcal{P}$ が dominated であるとする。 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ も dominated であり
 定理2の i) $\Leftrightarrow$ iv) と [3] の定理6.2 から次の系を得る。

系2.2 どんな $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ に対しても、 $\mathcal{B}_0 \text{ min adq } [\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ である。

ある $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ が存在する。

次に条件付独立性に関する定理，補題を [2] に従って述べてみる。

定理 4. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ が $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立であるための必要十分条件は，どんな $B_2 \in \mathcal{B}_2$ に対しても

$$E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1, \forall \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] \quad [\mathcal{U}, P], \forall p \in P \quad \text{である。}$$

(証明) (必要性) $B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2, p \in P$ に対して

$$E_p[\chi_{B_1} \chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1, \forall \mathcal{B}_3] | \mathcal{B}_3] \quad [\mathcal{U}, P] \text{ ① が成り立つ。}$$

$$\text{また } E_p[\chi_{B_1} | \mathcal{B}_3] \cdot E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] | \mathcal{B}_3] \quad [\mathcal{U}, P] \text{ ②}$$

仮定より ①, ② の左辺が等しい。

$$\therefore \int_{B_3} \chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1, \forall \mathcal{B}_3] dP = \int_{B_3} \chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] dP \quad \forall B_3 \in \mathcal{B}_3$$

$$\therefore \int_{B_3 \cap B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1, \forall \mathcal{B}_3] dP = \int_{B_3 \cap B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] dP$$

(十分性) 上の証明を逆にたどればよい。

系 4.1 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ が $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立であるための必要十分条件は $\mathcal{B}_1, \forall \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2$ が $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立である。

系 4.2 $\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_2$ であるための必要十分条件は，どんな B_2 -可測 $f(x)$ に対しても， $E_p[f | \mathcal{B}_1] = E_p[f] \quad [\mathcal{U}, P] \quad (\forall p \in P)$ である。

補題 1. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ は $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立で， $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$ とするならば $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2$ は $\mathcal{B}_3$ に関して条件付独立である。

系 4.3 $B_1 \perp B_2$, $B_0 \subseteq B_1$ ならば $B_0 \perp B_2$ である。 $\perp$

補題 2. $B_1 \perp B_2$, $B_3 \subseteq B_1$ ならば B_1, B_2 は B_3 に関して
条件付独立である。 $\perp$

定理 5. [2]. $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$ を互に独立な Ω の sub-field とする。
 $B_m = \mathcal{C}_1 \vee \dots \vee \mathcal{C}_m$ とし、 $\{B_m^0\}$ を $B_m^0 \subseteq B_m$, $B_{m+1}^0 \subseteq B_m^0 \vee \mathcal{C}_{m+1}$
 $m=1, 2, \dots$ なる列とする。すると $\{B_m^0\}$ は $\{B_m\}$ に対して
transitive である。

(証明) $\{B_m\}$ の作り方より $B_m \perp \mathcal{C}_{m+1}$ である。

補題 2 より $B_m, \mathcal{C}_{m+1}$ は B_m^0 に関して条件付独立である。

また系 4.1 より $B_m, \mathcal{C}_{m+1} \vee B_m^0$ は B_m^0 に関して条件付独立である。

また補題 1 より B_{m+1}^0, B_m は B_m^0 に関して条件付独立である。

従って定理 1 より結論を得る。 $\perp$

補題 3. $B_1, B_2 \subseteq \Omega$, $B_1^0 \subseteq B_1$, $B_2^0 \subseteq B_2$ とし、 $B_1 \perp B_2$ と
する。よって $B_1^0 \text{ suf}[B_1; \mathcal{P}]$, $B_2^0 \text{ suf}[B_2; \mathcal{P}]$ であるならば
 $B_1^0 \vee B_2^0 \text{ suf}[B_1 \vee B_2; \mathcal{P}]$ が成り立つ。 $\perp$

定理 6. [1]. $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$ を互に独立な Ω の sub-field とする。
 $B_m = \mathcal{C}_1 \vee \dots \vee \mathcal{C}_m$ とし、 $\mathcal{P} \in B_m$ で dominated であるとする。
($m=1, 2, \dots$)。そうすれば $\{B_m\}$ に対して necessary, suffi-
cient, transitive なる列 $\{B_m^0\}$ が存在する。

(証明) まず $\mathcal{P}$ が dominated であることにより定理 6-2 [1]
から、 B_m の necessary, sufficient, sub-field B_m^0 が存在する。($m=1, 2, \dots$)

これが transitive であることと云えはよい。

いま $B_m^0 \supset [B_m; P] \quad m=1, 2, \dots$ である。

また $\mathcal{L}_{m+1} \supset [\mathcal{L}_{m+1}; P] \quad m=1, 2, \dots$ は明らかである。

$B_m \perp \mathcal{L}_{m+1}$ であるから補題3より

$B_m^0 \vee \mathcal{L}_{m+1} \supset [B_m \vee \mathcal{L}_{m+1}; P]$ が成り立つ。

一方 $B_{m+1}^0 \supset [B_{m+1}; P]$ であるから

$B_{m+1}^0 \leq B_m^0 \vee \mathcal{L}_{m+1} [\mathcal{U}, P]$ となる。

従って定理5の条件を満足することにより $\{B_m^0\}$ は $\{B_m\}$ の transitive な列である。(注意: 定理5の条件 $B_{m+1}^0 \leq B_m^0 \vee \mathcal{L}_{m+1} [\mathcal{U}, P]$ であることも定理5は成り立つ。)

定理7 $\mathcal{Y}$ と点 y の集合, $\mathcal{Z}$ と点 z の集合, $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ は $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ の部分集合のつくる σ -field とする。また $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ とし, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \times \mathcal{Z}$, $\mathcal{C} = \mathcal{Y} \times \mathcal{C}'$, $\mathcal{B}_0 \leq \mathcal{B}'$ に対し $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}'_0 \times \mathcal{Z}$ とする。又 $\mathcal{U} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C} (= \mathcal{B}' \times \mathcal{C}')$ とし $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ 上の確率測度の集合で, 直積, 確率測度 $\lambda = \lambda_1 \times \lambda_2$ に関して $\mathcal{P} \ll \lambda$ であると仮定する。

そうすれば $\mathcal{B}_{\text{adg}}[\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ と, どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても, $\frac{dP}{d\lambda} = g(x) h_P(x)$ (但し $g(x)$ は非負, $\mathcal{B}$ - λ -可積分, $h_P(x)$ も非負で $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$ -可測) と分解されることと必要十分である。

(証明) (必要性) $\mathcal{P}$ は dominated であるから, $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_0$ なる $\mathcal{P}$ の可付番部分集合 $\mathcal{P}_0 = \{P_1, P_2, \dots\}$ が存在する。

$c_1, c_2, \dots, \sum c_i = 1$ なる正の定数として次の様に $\mathcal{B}'$ に確率測度 λ_{01} を定義する。 $\mathcal{P} \ll \lambda$ であるから, $\frac{dP}{d\lambda} = k_P(x)$ ($\forall P \in \mathcal{P}$) とおくことにして,

$$d\lambda_{01}(y) = \sum_i c_i \int_{\mathcal{Z}} k_{P_i}(y, z) d\lambda_2(z) d\lambda_1(y) \quad \left(\begin{array}{l} P_i \in \mathcal{P}_0 \quad i=1, 2, \dots \\ x = (y, z) \end{array} \right)$$

そして $\mathcal{U}$ 上の確率測度 λ_0 を $\lambda_{01} \times \lambda_2$ で定義する。このようにして定義された λ_0 に関して $\lambda_0 \ll \lambda$ である。従って,

$\frac{d\lambda_0}{d\lambda} = g(x)$ (≥ 0) が Radon-Nikodym 定理から存在する。

一方 $\frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \frac{d\lambda_{01}}{d\lambda_1} \times \frac{d\lambda_2}{d\lambda_2}$ から $g(x) = \frac{d\lambda_{01}(y)}{d\lambda_1(y)}$ と取り直には無関係に決る。従って $g(x)$ は $\mathcal{B}-\lambda$ -可積分である。

次に上で定義した λ_0 について $\mathcal{P} \ll \lambda_0$ である。このことからどんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても $\frac{dP}{d\lambda_0} = h_P(x)$ (≥ 0) が存在する。もし h が $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$ -可測であるならば, $\frac{dP}{d\lambda} = \frac{dP}{d\lambda_0} \cdot \frac{d\lambda_0}{d\lambda}$ から結論を得る。

χ としてどんな $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対しても

$$\int_{B \cap C} h_P(x) d\lambda_0 = P(B \cap C) = \int_C \chi_B(x) dP = \int_C E_P[\chi_B(x) | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] dP \quad (1)$$

しかるに仮定 ($\mathcal{B}_0 \text{ adq } [\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$) から定理 2 の iii) を使えば $\mathcal{B}_0$ -可測 $\psi_B(x)$ が存在して $\psi_B(x) = E_P[\chi_B(x) | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\mathcal{U}, P]$ である。

また $\psi_B(x) = E_{\lambda_0}[\chi_B(x) | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\mathcal{U}, P]$ である。——(2)

このことからどんな $C \in \mathcal{C}$ に対しても

$$\begin{aligned}
\int_C E_p[\chi_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] d\mu &= \int_C \varphi_B d\mu = \int_C \varphi_B \cdot h_p d\lambda_0 \\
&= \int_C E_{\lambda_0}[\varphi_B \cdot h_p | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] d\lambda_0 \\
&= \int_C \varphi_B \cdot E_{\lambda_0}[h_p | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] d\lambda_0 \\
&= \int_C E_{\lambda_0}[\chi_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] \cdot E_{\lambda_0}[h_p | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] d\lambda_0 \quad (\text{②より}) \\
&= \int_{C \cap B} E_{\lambda_0}[h_p | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] d\lambda_0 \quad \text{--- ③}
\end{aligned}$$

①と③より $h_p(x) = E_{\lambda_0}[h_p(x) | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\mathcal{U}, \mu]$ 故に $h_p(x)$ は $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$ -可測である。

(十分性) どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても, $\mathcal{B}_0$ -可測 $\varphi_B(x)$ が存在して, どんな $\mu \in \mathcal{P}$ に対しても $\varphi_B(x) = E_\mu[\chi_B(x) | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\mathcal{U}, \mu]$ なることを示せば定理2のiii)より結論を得る。

ように可測度 λ^* を次の様に定義する。 $d\lambda^* = g(x) d\lambda$
 $g(x)$ は $\mathcal{B}$ - λ -可積分であることから λ^* も有限, 直積測度である。
 ($\lambda^* = \lambda_1^* \times \lambda_2^*$ とおく) λ はどんな $B \in \mathcal{B}$, $B_0 \in \mathcal{B}_0$, $C \in \mathcal{C}$, k に対しても

$$\begin{aligned}
\int_{B_0 \cap C} E_\mu[\chi_B | \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] d\mu &= \int_{B_0 \cap C} \chi_B g(x) h_{\mu}(x) d\lambda \\
&= \int_{B_0 \cap C} \chi_B \cdot h_\mu \cdot d\lambda^* = \int_{C'} \int_{B_0'} \chi_B(y, z) h_\mu(y, z) d\lambda_1^*(y) d\lambda_2^*(z) \quad \left(\begin{array}{l} B_0 = B_0' \times Z \\ C = Y \times C' \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$= \int_{C'} \int_{B_0'} E_{\lambda_1^*}[\chi_B(y, z) | B_0'] h_p(y, z) d\lambda_1^*(y) d\lambda_2^*(z)$$

$$= \int_{B_0 \cap C} E_{\lambda_1^*}[\chi_B | B_0'] h_p d\lambda^* = \int_{B_0 \cap C} E_{\lambda_1^*}[\chi_B | B_0'] dp$$

ここで $E_{\lambda_1^*}[\chi_B | B_0']$ は B_0 -可測であるから $\gamma \in \mathcal{Y}_B(x)$ とおけば $\mathcal{Y}_B(x) = E_p[\chi_B | B_0 \vee \mathcal{L}]$ [M. P]

なお $\mathcal{P}$ が直積, 確率測度によって γ dominated であるならば, この定理が成り立たない例をあげる。

$\mathcal{Y} = [0, 4]$, $\mathcal{Z} = [0, 4]$ とし, B' , $\mathcal{C}'$ をそれぞれ $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ の Borel 集合の全体とする。 $\mathcal{U} = B' \times \mathcal{C}'$ で $\mathcal{P} = \{P_i : i=1, 2, 3, 4\}$ を次の様に定義する。 ℓ' は 1次元 Lebesgue 測度, L は $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}$ なる直線として $\lambda(A) = \ell'(A \cap L)$ ($A \in \mathcal{U}$) で λ を定義する。そして $\frac{dP_i}{d\lambda} = \frac{1}{i \cdot \sqrt{2}} \chi_{[0, i]}(\gamma)$ として P_i を定める。(i=1, ..., 4)

一方 $t(\gamma) = [\gamma] + 1$ とおけば $\frac{dP_i}{d\lambda} = \frac{1}{i \cdot \sqrt{2}} \chi_{[0, i]}(t(\gamma))$ となり t によって induce された σ -field は B_0 の sufficient sub-field であるが, 定義 1 の ② を満足しない。しかし P_i ($i=1, 2, 3, 4$) の定義からわかるように Radon-Nikodym 密度は分解されている。

§3. Adequacy の予想への応用

予測とは X 上の関数 $Y = f(X)$ の値を知り、 Z , 別の関数 $Z = g(X)$ の値について何らかの判断を下すことである。そこで予測量 T は $Y = f(X)$ の値域上で定義された関数である。

定義6. Y, Z を統計量とする。 $T(Y)$ (Y の値域 $\mathcal{Y}$ 上の関数) を統計量とする。 T, Y, Z によって induce された σ -field を $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ とすれば, もし $\mathcal{B}_0 \text{adq}[\mathcal{B}; \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ が成り立つとき T は Y に対する $Z, \mathcal{P}$ に関する adequate 統計量という。

(これを $T \text{adq}[Y; Z, \mathcal{P}]$ とかく)

なおこの T も Z の予測に關して十分であるともいえる。[4]

簡単のため Z の値域が $\mathbb{R}^1$ である場合を考える。どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても, $r(Y)$ が $E_P[Z - r(Y)] = 0$ を満足するとき, $r(Y)$ を不偏予測量といい, $r'(Y)$ がどんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても $E_P[(Z - r'(Y))^2]$ を最小にするならばこの $r'(Y)$ を最小平均二乗誤差予測量という。

定理8. [4] (Rao-Blackwell の定理の拡張)

$T \text{adq}[Y; Z, \mathcal{P}]$ であるとする。 $r(Y) \in E_P[r^2(Y)] < \infty$ ($\forall P \in \mathcal{P}$) なる予測量とする。 今 $Z^*(t) = E[r(Y) | T]$ (これは P に無関係に決まる) とすれば, どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても

$E_P[(Z - r^*(T))^2] \leq E_P[(Z - r(Y))^2]$ が成り立つ。(但し $E_P[Z^2] < \infty$ $\forall P \in \mathcal{P}$ と仮定する)。特に $r(Y)$ が不偏予測量であるならば

$\gamma^*(t)$ も不偏予測量である。

(証明) 省略。

定理9. $E_p[Z|T]$ が P に無関係であるとする。またどんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても $E_p[Z|Y] = E_p[Z|T]$ であるとする。

(但し $E_p[Y^2] < \infty \quad \forall P \in \mathcal{P}$ とする)

そこで $E[Z|T]$ は Z の不偏最小平均二乗誤差予測量である。

(証明) 省略

(注意: この定理は古典的回帰関数の方法にすぎない。)

最後に adequate 統計量の例をあげておく。

例1 [4]. $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ を独立, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする。 Z もまた正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ で Y_i と Z は独立でなく, $\text{Cov}(Z, Y_i) = b_i$ (既知) であるとする。 μ, σ^2 は未知で $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta = (\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty\}$

この場合 $T(y_1, \dots, y_m) = (\sum b_i y_i, \sum y_i, \sum y_i^2)$ が adequate 統計量である。

例2. $Y_1, \dots, Y_m, Y_{m+1}, \dots, Y_{m+n}$ は互に独立, 二項分布 $(0 < p < 1)$ に従うものとする。 $Y = (Y_1, \dots, Y_m) \in L$, $Z = \sum_{i=1}^{m+n} Y_i$ とする。この Y に対し $T(y) = \sum_{i=1}^m y_i$ が adequate 統計量である。

例3. $Y_1, \dots, Y_m$ は互に独立で, $(0, \theta)$ 上の一様分布に従うものとする。 Z は $(0, y_m)$ 上の一様分布に従うものとする。は Z の予測に對し $T(y_1, \dots, y_m) = (\max\{y_1, \dots, y_{m-1}\}, y_m)$ が adequate 統計量である。

例4. Y_1 は正規分布 $N(\mu, 1^2)$ ($-\infty < \mu < \infty$ は未知)

Y_2 は正規分布 $N(y_1, 1^2)$

 Y_m は正規分布 $N(y_{m-1}, 1^2)$

Z は正規分布 $N(y_m, 1^2)$ に従うものとする。

この Z の予測に對し $T(y_1, \dots, y_m) = (y_1, y_m)$ が adequate 統計量である。

例5. $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, Z = Y_{m+1}$ は二項変数とする。

$\Pr\{Y_i = 1\} = r, \quad \Pr\{Y_{i+1} = 1\} = p : Y_i = 1$
 $= 1-p : \text{その他}$

$\Pr\{Y_{i+1} = 0\} = q : Y_i = 0$
 $= 1-q : \text{その他}$

$i = 1, 2, \dots, m$ とする。

$\theta = (r, p, q)$, $0 < r, p, q < 1$ は未知であるとする。

一方 $y_1, \dots, y_m$ は $1, 1$ と続いた回数を s , $0, 0$ と続いた回数を t とすれば, この Z の予測に對し

$T(y_1, \dots, y_m) = (y_1, t, s, m, y_m)$ が adequate 統計量である。

あり, (但し $n = \sum_{i=1}^m y_i$)

References

- [1] Bahadur, R. R. (1954). Sufficiency and Statistical decision functions. Ann Math Stat. 25
423-462
- [2] Hall, W. J., Wijsman, R. A. and Ghosh, J. K. (1965)
The relationship between sufficiency and invariance
with applications in sequential analysis. Ann. Math Stat
36. 575-614
- [3] Skibinsky, M. (1967). Adequate subfield and sufficiency
Ann. Math Stat 38. 155-161
- [4] 竹内 啓 (1966). 統計的予測の形式と方法について.
経済学論集 第32巻 第3号, 23-31