

Burgers 乱流の相関とスペクトル

京大理

翼 友 正

木田 重雄

§1. 速度場

Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

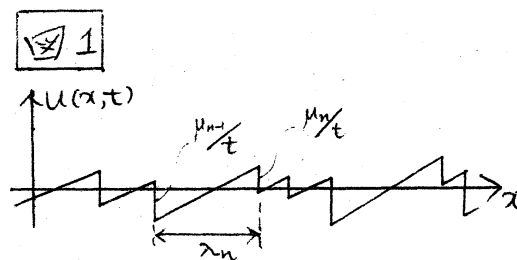
に従う速度場は、非粘性の極限 ($R \rightarrow \infty$) では、どのような初期条件から出発しても、充分時間が経つ ($1 \ll t \ll R$) と、図1のように、斜線と垂線で表わされ、系の運動は次の四つに要約されることになっている。

① 斜線の傾き $\propto \frac{1}{t}$

② $\frac{d}{dt} \mu_n = 0$

③ $\frac{d}{dt} \lambda_n = \frac{1}{t} \left(\lambda_n - \frac{\mu_{n-1} + \mu_n}{2} \right)$

④ 強さ μ_{n-1}/t と μ_n/t の



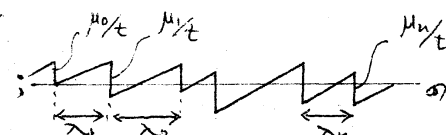
shock の衝突から、強さ $(\mu_{n-1} + \mu_n)/t$ の shock ができる。

§2. 分布函数

この速度場の統計を考えるため、次の分布函数を導入する

$N(t)$; $0 \leq x \leq L$ における shock の総数

$f_0(\mu, t)$; μ の確率密度

$g_n(\mu_0, \dots, \mu_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n; t)$;  の確率密度

$g(\mu, \mu'; \lambda; t)$; λ だけ離れて、強さ $\mu/t, \mu'/t$ の2つの shock がある確率密度.

ところで、定義から明らかに、次式が成り立つ.

$$g(\mu, \mu'; \lambda; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \dots \int_{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \lambda)} d\mu_1 \dots d\mu_n d\lambda_1 \dots d\lambda_n g_n(\mu, \mu_1, \dots, \mu_n, \mu'; \lambda_1, \dots, \lambda_n; t)$$

§3. 分布函数方程式

上に述べた運動法則を用いて、分布函数についての方程式を作ると次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(t) f_0(\mu, t) \delta \mu &= N(t) \delta \mu \left\{ \int_0^{\mu} g_1(\mu', \mu - \mu'; 0; t) \frac{\mu}{2t} d\mu' \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} [g_1(\mu, \mu'; 0; t) + g_1(\mu', \mu; 0; t)] \frac{\mu + \mu'}{2t} d\mu' \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} N(t) g_n(\mu_0, \dots, \mu_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n; t) \delta\mu_0 \dots \delta\mu_n \delta\lambda_1 \dots \delta\lambda_n \\
&= N(t) \delta\mu_0 \dots \delta\mu_n \delta\lambda_1 \dots \delta\lambda_n \times \\
& \times \left\{ \frac{\mu_0}{2t} \int_0^{\mu_0} g_{n+1}(\mu, \mu_0 - \mu, \mu_1, \dots, \mu_n; 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n; t) d\mu \right. \\
& + \frac{1}{2t} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \int_0^{\mu_i} g_{n+1}(\mu_0, \dots, \mu_{i-1}, \mu, \mu_i - \mu, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n; \lambda_1, \dots, \lambda_i, 0, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n; t) d\mu \\
& + \frac{\mu_n}{2t} \int_0^{\mu_n} g_{n+1}(\mu_0, \dots, \mu_{n-1}, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_n, 0; t) d\mu \\
& - \frac{1}{2t} \int_0^\infty (\mu + \mu_0) g_{n+1}(\mu, \mu_0, \dots, \mu_n; 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n; t) d\mu \\
& \left. - \frac{1}{2t} \int_0^\infty (\mu_n + \mu) g_{n+1}(\mu_0, \dots, \mu_{n-1}, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_n, 0; t) d\mu \right\} \quad (3)
\end{aligned}$$

§ 4. (2) 式の解

さて、上の分布函数方程式をここでは、時間的相似解に限って解くことにする。以下では $x = \frac{\mu}{\ell}$, $y = \frac{\lambda}{\ell}$ で無次元長さを表わす。ここで、 $\ell(t)$ は、平均 shock 間隔である。

方程式を閉じさせるために、次の仮定をする。

仮定 $\downarrow$ は $\downarrow$ の α 倍存在する。

式で書くと、

$$g_n(\mu_0, \dots, \mu_n; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0; t) = \frac{\alpha}{\ell^2} g_{n-1}(\mu_0, \dots, \mu_{n-1} + \mu_n; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; t)$$

etc.

この時、解は次のように求まる。

$$N(t) = N_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ell(t) = \ell_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_0(\mu, t) = \frac{\alpha}{\ell} e^{-\frac{\mu^2}{2\ell^2}} \quad (\text{or } f_0(x) = \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}) \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi}$$

ここで N_0, l_0 はそれぞれ $t=t_0$ のときの N, l を表す。

§5. $g(x, x'|y)$ の式

$g(x, x'|y)$ を $g(\mu, \mu'; \lambda, t)$ の無次元表示とする。 $x = \frac{\mu}{\ell}, x' = \frac{\mu'}{\ell}, y = \frac{\lambda}{\ell}$ と置いて、(3)式から $g(x, x'|y)$ についての式を作ると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 + x \frac{\partial}{\partial x} + x' \frac{\partial}{\partial x'} + (x + x' - y) \frac{\partial}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \langle X \rangle^{x, x', y} \right\} g(x, x'|y) \\ &= \alpha \left\{ 2 \int_x^\infty x'' g(x'', x'|y) dx'' + 2 \int_0^x x'' g(x, x''|y) dx'' \right. \\ & \quad \left. - (x^2 + x'^2) g(x, x'|y) \right\} \end{aligned}$$

ここに

$$\langle X \rangle^{x, x', y} g(x, x'|y) = \sum_{n=2}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_{n-1} g_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}, x'|y) \times \\ \times (x_1 + \cdots + x_{n-1}) \quad \text{である。}$$

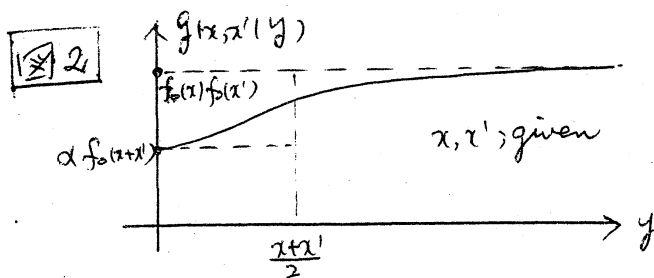
$$\text{境界条件は } g(x, x'|0) = \alpha f_0(x+x')$$

$$g(x, x'|\infty) = f_0(x) f_0(x')$$

本当の解は 図2の実線のようになっているであろうが、

ここでは試みに、次のような函数を考えてみる。

$$g(x, x'|y) = \begin{cases} \alpha f_0(x+x') & (2y < x+x') \\ f_0(x) f_0(x') & (2y > x+x') \end{cases} \quad (5)$$



上の函数は $y \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$ では本奇の函数に近づくから、
これを用いて計算した結果もこの極限で十分正しい
だろうと思われる。

§6. エネルギー

単位長さ当たりのエネルギーを

$$\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L u(x)^2 dx$$

を定義する。

1) 式(8)について、0からLまで積分し、Lで割った式

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle u^2 \rangle = -\frac{1}{R} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L u_x^2 dx$$

に、 $R \rightarrow \infty$ のときの $u_x (\equiv \frac{\partial u}{\partial x})$ の形

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sum_{i=1}^N \frac{\mu_i^2 R}{8t^2} \cosh^{-2} \frac{R\mu_i}{4t} \left(x - \frac{x_i}{2}\right)$$

を代入すると、次のようになることがわかる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle u^2 \rangle = -\frac{1}{12t^3} \frac{\langle \mu^3 \rangle}{\langle \mu \rangle} = -\frac{\pi l_0^2}{12t_0} \cdot \frac{1}{t^2}$$

従って,

$$\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \frac{\pi l_0^2}{12 t_0 t} \quad (6)$$

これは、エネルギーが $1/t$ に比例して減衰することを示している。

§7. 速度相関

$$B(r, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) u(x+r, t) dx$$

で速度相関を定義する。

$r \gg l$ では

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} B(r, t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 l} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu' \mu \mu' g(\mu, \mu'; r; t)$$

$r \ll l$ では

$$B(r, t) = B(0, t) - \frac{l^2}{t^2} \left\{ \frac{r}{2l^3} \int_0^\infty \mu^2 f_0(\mu, t) d\mu - \frac{r^2}{2l^2} + \frac{1}{l^3} \int_0^r dr' \int_0^{r'} dr'' \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu' \mu \mu' g(\mu, \mu'; r''; t) \right\}$$

であることがわかっていている。この中の $f_0(\mu, t)$, $g(\mu, \mu'; r; t)$, $B(0, t)$ にそれぞれ (4), (5), (6) 式を代入すると,

$r \gg l$ では

$$B(r, t) \cong \frac{l^2}{t^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-\sqrt{2}r/l^2}}{\sqrt{2}r/l}$$

$r \ll l$ では

$$B(r, t) \cong \frac{l^2}{t^2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \frac{r}{l} + \frac{r^2}{3l^2} \right) \quad (7)$$

となる。

§8. エネルギースペクトル

$$E(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(r, t) \cos kr \, dr$$

をエネルギー・スペクトルを定義する。

特に $k \gg \frac{1}{l}$ では, (7)式を代入し, 部分積分することによって,

$$E(k, t) \cong \frac{l^3}{t^2} \frac{1}{4(kl)^2}$$

となることがわかる。