

# バーンサイド環の単数群について

竹ヶ原 裕元

室蘭工業大学

有限群  $G$  のバーンサイド環  $\Omega(G)$  は左  $G$  集合の圏のグロタンディック環として定義される. バーンサイド代数  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G)$  の原始べき等元公式や  $\Omega(G)$  のスペクトル及び単数群に関する結果とそれらの応用が知られている ([6]–[13], [15]–[18]). 本報告では, 幾つかの既知の結果と  $\Omega(G)$  の単数群に関する最近の結果を解説する.

## 1 バーンサイド環の定義

バーンサイド環の定義および幾つかの性質を [5, §80] に従って解説する.  $G$  を有限群とし,  $G\text{-set}$  で有限左  $G$  集合と  $G$  写像の圏を表す. 各  $X \in G\text{-set}$  に対して,  $\overline{X}$  で  $X$  を含む有限左  $G$  集合の同型類を表す. 有限左  $G$  集合の同型類は  $\overline{X} + \overline{Y} = \overline{X \dot{\cup} Y}$ ,  $X, Y \in G\text{-set}$ , によって定まる半群である.  $\mathbf{F}(G)$  を有限左  $G$  集合の同型類で生成される自由アーベル群とし,  $\mathbf{F}(G)_0$  を  $\overline{X \dot{\cup} Y} - \overline{X} - \overline{Y}$ ,  $X, Y \in G\text{-set}$ , で生成される  $\mathbf{F}(G)$  の部分群とすると  $\Omega(G) := \mathbf{F}(G)/\mathbf{F}(G)_0$  は可換な加法群である.  $\mathbf{F}(G)$  の生成元の積を  $\overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{X \times Y}$ ,  $X, Y \in G\text{-set}$ , により定め, それを  $\mathbf{F}(G)$  に線形に拡張する. このとき  $\mathbf{F}(G)$  は可換環であり,  $\mathbf{F}(G)_0$  は  $\mathbf{F}(G)$  のイデアルである. よって  $\Omega(G)$  は可換環となる. この環を  $G$  のバーンサイド環と呼ぶ ([13] 参照).

各  $X \in G\text{-set}$  に対して,  $[X]$  で  $\overline{X}$  が代表である  $\mathbf{F}(G)$  における  $\mathbf{F}(G)_0$  の剰余類  $\overline{X} + \mathbf{F}(G)_0$  を表す. [5, (80.4) Lemma] より,

$$[X] = [Y] \iff \overline{X} = \overline{Y}$$

となっており,  $[X]$  を  $X \in G\text{-set}$  を含む有限左  $G$  集合の同型類と同一視する.  $\Omega(G)$  の生成元の積は  $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$ ,  $X, Y \in G\text{-set}$ , で与えられる.

$G$  は  $G$  の部分群の集合  $\mathcal{S}(G)$  上に共役で作用する.  $C(G)$  を  $\mathcal{S}(G)$  上の  $G$  軌道の完全代表系とする. 各  $H \leq G$  に対して,  $H$  の  $G$  における左剰余類  $G/H$  は  $G$  が  $G$  の積で作用する左  $G$  集合となる. [5, (80.5) Proposition] より,  $H, U \leq G$  について,

$$G/H \simeq G/U \iff H \text{ は } G \text{ における } U \text{ の共役である}$$

が成り立ち,  $\{[G/H] \mid H \in C(G)\}$  は  $\Omega(G)$  の  $\mathbb{Z}$  基底をなす.  $H, U \leq G$  について,

$$[G/H] \cdot [G/U] = \sum_{g \in H \backslash G/U} [G/(H \cap {}^g U)],$$

ここで  $\overline{H \backslash G/U}$  は  $G$  における  $(H, U)$  両側剰余類の完全代表系,  ${}^gU = gUg^{-1}$ , である ([5, §80 Exercise 2]). 実際  $G$  集合の同型

$$(G/H) \times (G/U) \xrightarrow{\sim} \bigcup_{g \in \overline{H \backslash G/U}} G/(H \cap {}^gU), \quad (g_1H, g_2U) \mapsto g_1h(H \cap {}^gU),$$

ここで  $g_2U = g_1hgU$ ,  $h \in H$ , が存在する.  $1 := [G/G]$  が  $\Omega(G)$  の単位元である.

## 2 ゴースト環とバーンサイド準同形

$H \leq G$  と  $X \in G\text{-set}$  に対して,  $\text{inv}_H(X)$  あるいは  $X^H$  で  $X$  における  $H$  不変な元の集合を表す. 環準同型  $\phi_H: \Omega(G) \rightarrow \mathbb{Z}$  を, 各  $U \in C(G)$  について

$$[G/U] \mapsto |\text{inv}_H(G/U)| = |\{gU \in G/U \mid H \leq {}^gU\}|$$

と定める. 各  $X \in G\text{-set}$  について  $\phi_H([X]) = |X^H|$  が成り立つ.

$\tilde{\Omega}(G) = \prod_{H \in C(G)} \mathbb{Z}$  とおき, 写像  $\phi: \Omega(G) \rightarrow \tilde{\Omega}(G)$  を, 各  $x \in \Omega(G)$  について

$$x \mapsto (\phi_H(x))_{H \in C(G)}$$

と定める.  $X, Y \in G\text{-set}$  について  $X \simeq Y \Leftrightarrow |X^H| = |Y^H|$ ,  $\forall H \in C(G)$  ([5, (80.10) Theorem (Burnside)]) が成り立ち,  $\phi$  は単射となる ([6, Proposition 1.2.2]).  $\tilde{\Omega}(G)$  を  $\Omega(G)$  のゴースト環と呼び,  $\phi: \Omega(G) \rightarrow \tilde{\Omega}(G)$  をバーンサイド準同形と呼ぶ.

各  $U \in C(G)$  に対して  $W_G(U) = N_G(U)/U$  とおく.  $\tilde{x} = (x_H)_{H \in C(G)} \in \tilde{\Omega}(G)$  について,  $\tilde{x} \in \text{Im } \phi$  であるための必要十分条件は, すべての  $U \in C(G)$  に対して

$$\sum_{gU \in W_G(U)} x_{\langle g \rangle U} \equiv 0 \pmod{|W_G(U)|},$$

ここで  $x_{\langle g \rangle U} = x_K$  ( $K \in C(G)$  は  $G$  における  $\langle g \rangle U$  の共役), が成り立つことである ([6, Proposition 1.3.5], [18, Lemma 2.1]).

**例 2.1**  $S_3 = \langle (1\ 2), (1\ 2\ 3) \rangle$  の非自明な部分群は  $S_2 = \langle (1\ 2) \rangle$ ,  $C_3 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$  のどちらかの共役である. 行列の行は  $\phi([G/U])$  の  $H \in C(S_3) = \{\{\epsilon\}, S_2, C_3, S_3\}$  ( $\epsilon$  は恒等置換) 成分である. 行列の逆行列を用いて  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_3)$  の原始べき等元  $e_H$  を表す.

|                          | $\{\epsilon\}$ | $S_2$ | $C_3$ | $S_3$ |                      | $[S_3/\{\epsilon\}]$ | $[S_3/S_2]$ | $[S_3/C_3]$    | $[S_3/S_3]$ |
|--------------------------|----------------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|-------------|----------------|-------------|
| $\phi(S_3/\{\epsilon\})$ | 6              |       |       |       | $e_{\{\epsilon\}} =$ | $\frac{1}{6}$        |             |                |             |
| $\phi(S_3/S_2)$          | 3              | 1     |       |       | $e_{S_2} =$          | $-\frac{1}{2}$       | +1          |                |             |
| $\phi(S_3/C_3)$          | 2              | 0     | 2     |       | $e_{C_3} =$          | $-\frac{1}{6}$       |             | $+\frac{1}{2}$ |             |
| $\phi(S_3/S_3)$          | 1              | 1     | 1     | 1     | $e_{S_3} =$          | $\frac{1}{2}$        | -1          | $-\frac{1}{2}$ | +1          |

### 3 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G)$ および $\Omega(G)$ の原始べき等元

$\mathcal{S}(G)$  は順序が  $\leq$  で定まる半順序集合である. 加法群の写像  $\lambda: \tilde{\Omega}(G) \rightarrow \Omega(G)$  を

$$(\delta_{HU})_{U \in C(G)} \mapsto \frac{|G|}{|N_G(H)|} \sum_{U \leq H} |U| \mu(U, H) [G/U] \quad (\mu \text{ は } \mathcal{S}(G) \text{ のモービウス関数})$$

により定めるとき  $\lambda \circ \phi = |G| \cdot \text{id}_{\Omega(G)}$  および  $\phi \circ \lambda = |G| \cdot \text{id}_{\tilde{\Omega}(G)}$  が成り立ち ([2, 2.3.] )

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G) \simeq \prod_{H \in C(G)} \mathbb{Q}$$

となる ([13]). 特に  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G)$  の原始べき等元の集合は

$$\left\{ e_H := \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{U \leq H} |U| \mu(U, H) [G/U] \mid H \in C(G) \right\} \quad (\text{A})$$

であり ([9, 17]),  $e_H e_K = \delta_{HK} e_H$ ,  $1 = \sum_{H \in C(G)} e_H$  となっている.

次に  $\Omega(G)$  の原始べき等元を考える.  $G$  の各部分群  $H \leq G$  に対して,

$$H = H^{(0)} \geq H^{(1)} \geq H^{(2)} \geq \dots \geq H^{(i)} \geq \dots,$$

$H^{(j)} = [H^{(j-1)}, H^{(j-1)}]$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) を  $H$  の導来列 ([14, Chapter 2, Definition 3.11]) とするとき,  $O^\infty(H) := \cap_{i=0}^\infty H^{(i)}$  とおく. 集合  $C(G)$  上の同値関係  $\sim_\infty$  を

$$H \sim_\infty U, H, U \in C(G) : \Longleftrightarrow O^\infty(H) \text{ は } G \text{ における } O^\infty(U) \text{ の共役である}$$

として定める.  $C^{(\infty)}(G)$  で  $\sim_\infty$  同値類の完全代表系を表し, 各  $H \in C^{(\infty)}(G)$  に対して

$$e_H^{(\infty)} := \sum_{H \sim_\infty U \in C(G)} e_U$$

とおく. このとき  $\Omega(G)$  の原始べき等元の集合は  $\{e_H^{(\infty)} \mid H \in C^{(\infty)}(G)\}$  である.

**定理 3.1** ([7])  $G$  が可解群  $\Longleftrightarrow \Omega(G)$  のべき等元が 0 と 1 に限る.

### 4 スペクトル

[7] に従って  $\Omega(G)$  のスペクトル (すべての素イデアルの集合) の解説をする.  $p$  を素数とし, 集合  $C(G)$  上の同値関係  $\sim_p$  を

$$H \sim_p U, H, U \in C(G) : \Longleftrightarrow O^p(H) \text{ は } G \text{ における } O^p(U) \text{ の共役である}$$

として定める. ここで  $O^p(K)$ ,  $K \leq G$ , は  $K/O^p(K)$  が  $p$  群になる最小の  $K$  の正規部分群を表す.  $C^{(p)}(G)$  で  $\sim_p$  同値類の完全代表系を表す.

$\text{Spec}(\Omega(G))$  を  $\Omega(G)$  の素イデアル全体の集合とし,  $\tilde{\Pi}$  をすべての素数および 0 からなる集合とする.  $p \in \tilde{\Pi}$  と  $H \in C^{(p)}(G)$ , ただし  $C^{(0)}(G) = C(G)$ , に対して

$$\mathfrak{p}(H, p) := \{x \in \Omega(G) \mid \phi_H(x) \text{ は } p \text{ の倍数である}\}$$

とおくとき  $\text{Spec}(\Omega(G)) = \{\mathfrak{p}(U, p) \mid p \in \tilde{\Pi}, U \in C^{(p)}(G)\}$  である.  $\text{Spec}(\Omega(G))$  のザリスキー位相に関する連結成分を考えると,  $\mathfrak{p}(U, p), \mathfrak{p}(V, q) \in \text{Spec}(\Omega(G))$  に対して

$$\mathfrak{p}(U, p) \subseteq \mathfrak{p}(V, q) \iff p = q, U = V \text{ または } p = 0, q \neq 0, U \sim_q V$$

および

$$\mathfrak{p}(U, p), \mathfrak{p}(V, q) \text{ が同じ連結成分に属する} \iff U \sim_{\infty} V$$

が成り立つ. べき等元  $e$  に対して  $V(e)$  を  $e$  を含む  $\Omega(G)$  の素イデアルの集合とする.  $\Omega(G)$  の原始べき等元は  $e_H^{(\infty)}$ ,  $H \in C^{(\infty)}(G)$ , であるが, 各  $H \in C^{(\infty)}(G)$  に対して

$$V(1 - e_H^{(\infty)}) = \bigcup_{p \in \tilde{\Pi}} \{\mathfrak{p}(U, p) \mid H \sim_{\infty} U \in C^{(p)}(G)\}$$

であり,  $\text{Spec}(\Omega(G))$  のザリスキー位相に関する連結成分の集合は

$$\{V(1 - e_H^{(\infty)}) \mid H \in C^{(\infty)}(G)\}$$

である. さらに, 次が成り立つ.

$$G \text{ が可解群} \iff \text{Spec}(\Omega(G)) \text{ が連結} \iff \Omega(G) \text{ のべき等元は } 0 \text{ と } 1 \text{ に限る}$$

## 5 単数群の基本性質

環  $R$  の単数群を  $R^{\times}$  と表す. 明らかに  $\tilde{\Omega}(G)^{\times} = \prod_{H \in C(G)} \mathbb{Z}^{\times} = \prod_{H \in C(G)} \langle -1 \rangle$  である. よって  $\tilde{\Omega}(G)^{\times}$  および  $\Omega(G)^{\times}$  は基本アーベル 2 群である ([8, Proposition 3.1]).

**例 5.1**  $K \leq G$ ,  $|G : K| = 2$  とする. このとき  $[G/K] \cdot [G/K] = 2[G/K]$  であり,  $1 - [G/K] \in \Omega(G)^{\times}$  となる.  $\phi(1 - [G/K]) = ((-1)^{\zeta(H, K)})_{H \in C(G)}$ , ここで  $\zeta(H, K) = 1$  ( $H \leq K$  のとき),  $\zeta(H, K) = 0$  ( $H \not\leq K$  のとき), である.

$x \in \Omega(G)$  に対して  $e = (1 - x)/2 \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G)$  とおくとき,  $x^2 = 1 \iff e^2 = e$  が成り立つ. よって  $\Omega(G)^{\times}$  は  $2e \in \Omega(G)$  を満たすべき等元  $e$  に対する  $1 - 2e$  からなる.

**例 5.2**  $G$  が可解群でなければ, 定理 3.1 より,  $\Omega(G)$  の 0 でも 1 でもないべき等元  $e$  が存在して  $1 - 2e$  は  $\Omega(G)$  の単数であるから  $\Omega(G)^\times \neq \langle -1 \rangle$  となる.  $G$  の位数が奇数ならば, (A) より  $\Omega(G)^\times$  は  $\Omega(G)$  のべき等元  $e$  に対する  $1 - 2e$  からなり,  $\Omega(G)$  において単数の個数とべき等元の個数は一致する. よって  $G$  の位数が奇数ならば,  $G$  は可解群であるから, 定理 3.1 より,  $\Omega(G)^\times = \langle -1 \rangle$  が成り立つ ([6, Proposition 1.3.5]).

$\tilde{x} = (x_H)_{H \in C(G)} \in \tilde{\Omega}(G)^\times$ ,  $U \leq C(G)$  に対して, 写像  $\gamma_U^{\tilde{x}} : W_G(U) \rightarrow \langle -1 \rangle$  を

$$gU \mapsto x_U x_{\langle g \rangle U} \quad (g \in N_G(U))$$

ここで  $x_{\langle g \rangle U} = x_K$  ( $K \in C(G)$  は  $G$  における  $\langle g \rangle U$  の共役), により定める.

**定理 5.3** ([18, Proposition 6.5])  $\tilde{\Omega}(G)^\times$  の部分群  $\{\phi(x) \mid x \in \Omega(G)^\times\}$  はすべての  $U \leq C(G)$  について  $\gamma_U^{\tilde{x}} \in \text{Hom}(W_G(U), \langle -1 \rangle)$  を満たす  $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}(G)^\times$  からなる.

**命題 5.4** ([4, p. 904], [15, Proposition 6.8])  $\hat{C}(G)$  を  $|N_G(U) : U| \leq 2$  を満たす  $U \in C(G)$  からなる集合とする.  $x \in \Omega(G)^\times$  に対して  $\phi(x) = (x_H)_{H \in C(G)} \in \tilde{\Omega}(G)^\times$  は  $\{x_U \mid U \in \hat{C}(G)\}$  により定まる. 特に  $|\Omega(G)^\times| \leq 2^{|\hat{C}(G)|}$  である.

**証明.**  $H \in C(G)$  に対して, 定理 5.3 より  $x_{\langle g_1 \rangle H} x_{\langle g_2 \rangle H} x_H = x_{\langle g_1 g_2 \rangle H}$  ( $\forall g_1, g_2 \in N_G(H)$ ) であるから,  $|N_G(H) : H| > 2$  ならば  $x_H$  は  $\{x_K \mid H < K \leq N_G(H)\}$  により定まる. よって  $(x_H)_{H \in C(G)}$  は  $\{x_U \mid U \in \hat{C}(G)\}$  により定まる.  $\square$

**例 5.5**  $G$  はアーベル群であるとする. このとき  $\hat{C}(G)$  は  $G$  における指数 2 の部分群の集合であるから, 命題 5.4 より  $|\Omega(G)^\times| \leq 2^{|\text{Hom}(G, \langle -1 \rangle)|}$  となるが, 例 5.1 より  $|\Omega(G)^\times| = 2^{|\text{Hom}(G, \langle -1 \rangle)|}$  を得る ([10, Example 4.5], [18, Lemma 7.1]).

$\text{Hom}(G, \langle -1 \rangle)$  は 2 元  $\theta, \psi$  の積が  $(\theta\psi)(g) = \theta(g)\psi(g)$  ( $g \in G$ ) で定まる基本アーベル 2 群である.  $\text{Hom}(G, \langle -1 \rangle)$  が  $\theta_1, \dots, \theta_m$  で生成されるとする.  $K_i = \text{Ker } \theta_i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) とおく.  $|G : K_i| = 2$  である.  $x_i = 1 - [G/K_i] \in \Omega(G)^\times$  とおく.  $\phi(x_i) = (x_U^{(i)})_{U \in C(G)}$  とすれば  $x_U^{(i)} = -1$  ( $U \leq K_i$  のとき),  $x_U^{(i)} = 1$  ( $U \not\leq K_i$  のとき) であり,  $\epsilon$  を  $G$  の単位元とすると,  $\gamma_{\{\epsilon\}}^{\phi(x_i)} : G \rightarrow \langle -1 \rangle$  は  $G$  の線形指標  $\theta_i$  である.

**定義 5.6** 各  $\tilde{x} \in \text{Im } \phi$  に対して,  $\phi^{-1}(\tilde{x})$  により  $\phi(x) = \tilde{x}$  を満たすただ 1 つの  $\Omega(G)$  の元  $x$  を表し, これを  $\tilde{x}$  の逆像と呼ぶ. 群  $\Omega(G)_1^\times (\leq \Omega(G)^\times)$  を  $H$  が巡回群ならば  $x_H = 1$  である  $\tilde{x} = (x_H)_{H \in C(G)} \in \text{Im } \phi \cap \tilde{\Omega}(G)^\times$  の逆像  $\phi^{-1}(\tilde{x})$  の集合として定義する.

**命題 5.7** ([15, Proposition 6.7])  $\Omega(G)^\times = \langle -1 \rangle \times \langle x_1, \dots, x_m \rangle \times \Omega(G)_1^\times$ .

**証明.** 任意の  $x \in \Omega(G)^\times$  に対して,  $\gamma_{\{\epsilon\}}^{\phi(x)} \in \text{Hom}(G, \langle -1 \rangle)$  より,  $xy \in \langle -1 \rangle \times \Omega(G)_1^\times$  を満たす  $y \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle$  が存在する. よって, 命題が証明された.  $\square$

注意 5.8 写像  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle \rightarrow \text{Hom}(G, \langle -1 \rangle)$ ,  $x \mapsto \gamma_{\{\epsilon\}}^{\phi(x)}$  は同型写像である.

例 5.9 群  $Q_8 = \langle a, b \mid a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$  において  $a^2 = b^2 = (ab)^2$ ,  $a^4 = \epsilon$  であり,  $C(Q_8) = \{\{\epsilon\}, \langle a^2 \rangle, \langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle ab \rangle, Q_8\}$  となる.  $Q_8$  以外の部分群は巡回群であるから,  $\Omega(G)_1^\times$  に含まれる可能性のある単数は  $1 - 2e_{Q_8}$  に限られる. さらに  $x = 1 - [Q_8/\langle a \rangle]$ ,  $y = 1 - [Q_8/\langle b \rangle]$ ,  $z = 1 - [Q_8/\langle ab \rangle]$  とおくと  $-xyz = w := 1 - 2e_{Q_8} \in \Omega(G)_1^\times$  より,  $\Omega(G)^\times = \langle -1 \rangle \times \langle x, y \rangle \times \langle 1 - 2e_{Q_8} \rangle$  を得る.

|                                 | $\{\epsilon\}$ | $\langle a^2 \rangle$ | $\langle a \rangle$ | $\langle b \rangle$ | $\langle ab \rangle$ | $Q_8$ |
|---------------------------------|----------------|-----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|-------|
| $\phi(Q_8/\{\epsilon\})$        | 8              |                       |                     |                     |                      |       |
| $\phi(Q_8/\langle a^2 \rangle)$ | 4              | 4                     |                     |                     |                      |       |
| $\phi(Q_8/\langle a \rangle)$   | 2              | 2                     | 2                   |                     |                      |       |
| $\phi(Q_8/\langle b \rangle)$   | 2              | 2                     | 0                   | 2                   |                      |       |
| $\phi(Q_8/\langle ab \rangle)$  | 2              | 2                     | 0                   | 0                   | 2                    |       |
| $\phi(Q_8/Q_8)$                 | 1              | 1                     | 1                   | 1                   | 1                    | 1     |

|           | $\{\epsilon\}$ | $\langle a^2 \rangle$ | $\langle a \rangle$ | $\langle b \rangle$ | $\langle ab \rangle$ | $Q_8$ |
|-----------|----------------|-----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|-------|
| $\phi(x)$ | -1             | -1                    | -1                  | 1                   | 1                    | 1     |
| $\phi(y)$ | -1             | -1                    | 1                   | -1                  | 1                    | 1     |
| $\phi(z)$ | -1             | -1                    | 1                   | 1                   | -1                   | 1     |
| $\phi(w)$ | 1              | 1                     | 1                   | 1                   | 1                    | -1    |

## 6 tom Dieck 準同形

$R_{\mathbb{R}}(G)$  で  $G$  の実表現環を表し, 加法群と考える. [6, Proposition 5.5.9] より,

$$M \mapsto \phi^{-1}((( -1)^{\dim M^H})_{H \in C(G)})$$

により定まる準同形  $u = u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$  が存在する. ここで  $M$  は  $\mathbb{R}G$  加群で  $M^H$  は  $M$  における  $H$  不変な元からなる空間である. これを tom Dieck 準同形と呼ぶ. このことを拡張した [18, Theorem A] の証明の方法を用いて, 次の補題を示す.

補題 6.1  $M$  を  $\mathbb{C}G$  加群とし,  $M$  の指標  $\chi$  は実数に値をとるとする. 各  $H \in C(G)$  に対して,  $\dim M^H$  は内積  $\langle \chi|_H, 1_H \rangle_H$  に一致し,

$$\sigma_H^\chi : W_G(H) \rightarrow \langle -1 \rangle, \quad gH \mapsto (-1)^{\dim M^H} (-1)^{\dim M^{(g)H}}$$

は  $W_G(H)$  の線形指標である.

証明.  $M^H$  は  $\mathbb{C}W_G(H)$  加群となり,  $M^H$  の指標は

$$\bar{\chi} : gH \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(gh) \quad (gH \in N_G(H))$$

である ([1, Lemma 3.1]). これより

$$\dim M^H = \bar{\chi}(H) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h) = \langle \chi|_H, 1_H \rangle_H$$

が成り立つ.  $\dim M^{\langle g \rangle H} = \dim(M^H)^{\langle gH \rangle}$ , ここで  $(M^H)^{\langle gH \rangle}$  は  $CW_G(H)$  加群  $M^H$  における  $\langle gH \rangle$  不変な元からなる空間, であるから,

$$(-1)^{\dim M^H} (-1)^{\dim(M^H)^{\langle gH \rangle}} (-1)^{\dim(M^H)^{\langle rH \rangle}} = (-1)^{\dim(M^H)^{\langle grH \rangle}} \quad (\forall g, r \in N_G(H))$$

を示せばよい.  $M^H$  の指標  $\bar{\chi}$  は実数に値をとるから,  $H = \{\epsilon\}$  としてよい. 各  $g \in G$  に対して,  $\chi_0$  を  $\chi_0(g) = -1$  を満たす  $\langle g \rangle$  の指標とし,

$$\chi|_{\langle g \rangle} = \langle \chi|_{\langle g \rangle}, 1_{\langle g \rangle} \rangle 1_{\langle g \rangle} + \langle \chi|_{\langle g \rangle}, \chi_0 \rangle \chi_0 + \sum_{i=1}^{2k} \chi_i,$$

ここで  $\chi_i$  ( $1 \leq i \leq 2k$ ) は実数に値をとらない  $\langle g \rangle$  の指標, と表せば,  $\dim(M^{\langle g \rangle}) = \langle \chi|_{\langle g \rangle}, 1_{\langle g \rangle} \rangle$  であるから,  $\mathbf{M}: G \rightarrow \mathbf{GL}(M)$  を  $M$  における線形表現として

$$\det \mathbf{M}(g) = (-1)^{\langle \chi|_{\langle g \rangle}, \chi_0 \rangle}, \quad (-1)^{\dim(M^{\langle g \rangle})} = (-1)^{\chi(1)} \det \mathbf{M}(g)$$

が成り立つ. これより, 任意の  $g, r \in G$  に対して,

$$\begin{aligned} (-1)^{\dim M} (-1)^{\dim(M)^{\langle g \rangle}} (-1)^{\dim(M)^{\langle r \rangle}} &= (-1)^{\chi(1)} \det \mathbf{M}(g) \det \mathbf{M}(r) \\ &= (-1)^{\chi(1)} \det \mathbf{M}(gr) \\ &= (-1)^{\dim(M^{\langle gr \rangle})} \end{aligned}$$

となり, 補題は証明された.  $\square$

$\bar{R}_{\mathbb{R}}(G)$  で実数に値をとる  $G$  の指標環の元からなる環とし, 加法群と考える. 定理 5.3 と命題 6.1 より, 準同形  $\bar{u}: \bar{R}_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^{\times}$  が

$$\chi \mapsto \phi^{-1}((( -1)^{\langle \chi|_H, 1_H \rangle_H})_{H \in C(G)}) \quad (\forall \chi \in \bar{R}_{\mathbb{R}}(G))$$

により定まる.  $\phi \circ \lambda = |G| \cdot \text{id}_{\bar{\Omega}(G)}$  より

$$\bar{u}(\chi) = \sum_{U \in C(G)} \frac{1}{|W_G(U)|} \left( \sum_{H \leq G} \mu(U, H) (-1)^{\langle \chi|_H, 1_H \rangle_H} \right) [G/U] \quad (\forall \chi \in \bar{R}_{\mathbb{R}}(G))$$

である.

**例 6.2**  $X \in G\text{-set}$  を有限左  $G$  集合とし,  $\pi_X$  を  $\pi_X(g) = \sharp\{x \in X \mid gx = x\}$  ( $\forall g \in G$ ) により定まる  $G$  の置換指標とする. バーンサイドの定理 ([19, 2.7 Lemma (Cauchy-Frobenius)]) より  $\langle \pi_X|_H, 1_H \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \pi_X(h) = |H \backslash X|$  ( $\forall H \leq G$ ), ここで  $H \backslash X$  は  $X$  上の  $H$  軌道の集合, が成り立つ.  $G$  の位数が偶数ならば  $P$  を  $G$  のシロー 2 群,  $X$  を  $G$  の左正則表現とすると,  $|P \backslash X| = |G|/|P|$  は奇数であり,  $U$  を位数が奇数の  $G$  の部分群とすれば  $|U \backslash X| = |G|/|U|$  は偶数である. よって  $\bar{u}(\pi_X) \notin \langle -1 \rangle$  を得る. このことと例 5.2 より  $G$  の位数が奇数  $\Leftrightarrow \Omega(G)^{\times} = \langle -1 \rangle$  が成り立つ ([8]).

**例 6.3**  $\chi \in \text{Hom}(G, \langle -1 \rangle)$  とし,  $K = \text{Ker } \chi$  とおけば,  $|G : K| \leq 2$  であり,  $\phi \circ \bar{u}(\chi) = ((-1)^{\zeta(H, K)})_{H \in C(G)} \in \tilde{\Omega}(G)^\times$ , ここで  $\zeta(H, K) = 1$  ( $H \leq K$  のとき),  $\zeta(H, K) = 0$  ( $H \not\leq K$  のとき), が成り立つ. よって  $\bar{u}(\chi) = 1 - [G/K]$  ( $\chi \neq 1_G$  のとき) または  $\bar{u}(\chi) = -1$  ( $\chi = 1_G$  のとき) である. 特に  $G$  がアーベル群ならば  $\bar{u} : \bar{R}_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$  は全射である ([10, Example 5.6], [18, Lemma 7.1]).

**例 6.4**  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m \in \text{Irr}(S_n)$  を互いに異なる  $n$  次対称群  $S_n$  の既約指標とし,  $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_m$  とおく. このとき  $\langle \chi, \chi_1 \rangle = 1$  である.  $S_n$  の既約指標は誘導指標  $1_{S_\lambda}^{S_n}$  ( $S_\lambda$  はヤング部分群) の整数係数線形結合で表されるから ([3]),  $\langle \chi, 1_{S_\lambda}^{S_n} \rangle$  はあるヤング部分群  $S_\lambda$  に対して奇数である. さらにフロベニウス相互律より ([5, (10.9)]),  $\langle \chi|_{S_\lambda}, 1_{S_\lambda} \rangle = \langle \chi, 1_{S_\lambda}^{S_n} \rangle$  が成り立つ. よって  $\bar{u}(\chi) \neq 1$  である. これより  $|\text{Im } \bar{u}| = 2^{|\text{Irr}(S_n)|}$  を得る ([10, Remark 5.11]).

$u : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$  に関して次のことが知られている.

- (1)  $G$  が可解群でなければ  $u : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$  は全射でない ([10, Theorem 5.4]).
- (2) 位数  $2n$  の 2 面体群  $D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = \epsilon, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$  について  $u : R_{\mathbb{R}}(D_{2n}) \rightarrow \Omega(D_{2n})^\times$  は全射である ([10, Example 5.6]).
- (3)  $G$  が 2 群ならば  $u : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$  は全射である (Tornehave, [16, Corollary]).

## 7 単数群の構造

まず  $1 - 2e_H$  ( $H \in C(G)$ ) が  $\Omega(G)$  に含まれるための必要十分条件を与える.

**定義 7.1**  $\mathcal{I}(G)$  を 次の条件を満たす  $H \in C(G)$  からなる  $C(G)$  の部分集合とする.

- (1)  $|N_G(H) : H| \leq 2$
- (2)  $U$  が  $H$  の正規部分群であり,  $H/U$  が非自明な巡回群ならば,  $N_G(U)$  において指数が 2 である  $U$  を含む部分群  $K$  が存在して,  $g \notin K \Leftrightarrow G/\langle g \rangle U \simeq G/H$  が各  $g \in N_G(U)$  に対して成り立つ. ( $H/U$  は 2 群である.)

**命題 7.2** ([15, Proposition 6.11]) 各  $H \in C(G)$  に対して, 次が成り立つ.

$$1 - 2e_H \in \Omega(G)^\times \iff ((-1)^{\delta_{H^U}})_{U \in C(G)} \in \text{Im } \phi \iff H \in \mathcal{I}(G)$$

**系 7.3** ([15, Corollary 6.13])  $U \in \mathcal{I}(G)$  が非自明な巡回群ならば,  $U$  は  $G$  のシロー 2 群であり  $N_G(U) = U$  となっている.

**命題 7.4** ([15, Proposition 6.14])  $S_n$  を  $n$  次対称群とする. 任意の  $n$  のストリクト分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots)$ , ただし  $\lambda_1 > \dots > \lambda_j > \dots \geq 0$ , に対して,  $\mathcal{I}(S_n)$  は  $\lambda$  に対応するヤング部分群  $S_\lambda$  の共役部分群を含む.

**例 7.5** 定義から,  $\{\epsilon\}$  は  $\mathcal{I}(S_3)$  に含まれない. また, 系 7.3 より,  $C_3$  は  $\mathcal{I}(S_3)$  に含まれない. 命題 7.4 より  $\mathcal{I}(S_3) = \{S_2, S_3\}$  である.

$U \leq G$  と  $r \in N_G(U)$  について,  $\langle r \rangle U$  に対する次の条件を考える.

- ( $\sharp$ )  $N_G(U)$  において指数が 2 である  $U$  を含む部分群  $K$  が存在して,  
 $g \notin K \Leftrightarrow G/\langle g \rangle U \simeq G/\langle r \rangle U$  が各  $g \in N_G(U)$  に対して成り立つ.

$\{[G/H] \mid H \leq G\}$  上の同値関係  $\approx$  は  $\langle r \rangle U$  が ( $\sharp$ ) を満たさない  $U \leq G$  と  $r \in N_G(U)$  に対して  $[G/\langle r \rangle U] \approx [G/U]$  とする関係が生成する同値関係であるとする. さらに  $C(G)$  上の同値関係  $\approx$  を次により定める:  $H \approx U \Leftrightarrow [G/H] \approx [G/U]$ .

**命題 7.6**  $\tilde{y} = (y_U)_{U \in C(G)} \in \text{Im} \phi \cap \tilde{\Omega}(G)^\times$  とする. 各  $H \in C(G)$  に対して,

$$x_U = \begin{cases} y_U & (H \approx U \text{ のとき}), \\ 1 & (H \not\approx U \text{ のとき}) \end{cases}$$

により  $\tilde{x} = (x_U)_{U \in C(G)} \in \tilde{\Omega}(G)^\times$  を定める. このとき  $\tilde{x} \in \text{Im} \phi$  である.

この命題により,  $\Omega(G)^\times$  の構造が明らかになる.

**定理 7.7** 各  $H \in C(G)$  に対して,  $\Omega(G)_H^\times$  を  $H \not\approx U \in C(G)$  であるすべての  $U$  について,  $\phi(x)$  の  $U$  成分が 1 となっている  $x \in \Omega(G)^\times$  からなる部分群とする. このとき

$$\Omega(G)^\times = \prod_{H \in C(G)/\approx} \Omega(G)_H^\times$$

が成り立つ. さらに, 各  $H \in C(G)$  に対して,  $H \approx U \in C(G)$  であるすべての  $U$  について,  $\phi(x)$  の  $U$  成分が  $-1$  となっている  $x \in \Omega(G)_H^\times$  が存在する.

定理 7.7 を用いて, 命題 7.2 は次の命題に拡張される.

**命題 7.8** 各  $H \in C(G)$  に対して, 次の条件は同値である.

- (1)  $1 - 2e_H \in \Omega(G)^\times$
- (2)  $((-1)^{\delta_{H^U}})_{U \in C(G)} \in \text{Im} \phi$
- (3)  $H \in \mathcal{I}(G)$
- (4)  $H$  は  $C(G)$  上の同値関係  $\approx$  に関して孤立している.

証明. 定理 7.7 より (4)  $\implies$  (2) が成り立つ. 命題 7.2 より (3)  $\implies$  (4) を示せばよい.  $|N_G(H) : H| = 2$  のとき  $(\sharp)$  が  $H = U = K$  として成り立つ. よって  $|U| > |H|$  ( $U \in C(G)$ ) ならば  $U \not\cong H$  である.  $G/H \simeq G/\langle r \rangle U \not\cong G/U$  ( $U \in C(G)$ ,  $r \in N_G(U)$ ) ならば  $H = \langle {}^c r \rangle {}^c U$  を満たす  $c \in G$  が存在する. 仮定から  $N_G(U)$  の指数 2 の部分群  $K$  が存在して,  $g \notin K \Leftrightarrow G/\langle {}^c g \rangle {}^c U \simeq G/H \simeq G/\langle r \rangle U$  が成り立つ. よって  $g \notin K \Leftrightarrow G/\langle g \rangle U \simeq G/\langle r \rangle U$  が成り立ち,  $\langle r \rangle U$  は  $(\sharp)$  を満たす. よって  $|U| < |H|$  ( $U \in C(G)$ ) ならば  $U \not\cong H$  である. これより (3)  $\implies$  (4) が成り立つ.  $\square$

## 8 諸例

例 8.1  $C(S_3) = \{\{\epsilon\}, S_2, C_3, S_4\}$ ,  $\mathcal{I}(S_3) = \{S_2, S_3\}$  である.  $\approx$  に関する同値類は  $\{\{\epsilon\}, C_3\}$ ,  $\{S_2\}$ ,  $\{C_3\}$  である.  $\Omega(S_3)^\times$  は次の単数の逆像で生成される.

$$\frac{\{\epsilon\} \quad S_2 \quad C_3 \quad S_3}{a \quad b \quad a \quad c} \quad a, b, c \in \{1, -1\}$$

例 8.2  $A_4$  を  $\{1, 2, 3, 4\}$  上の交代群とする.  $C(A_4) = \{\{\epsilon\}, C_2, C_3, V, A_4\}$ , ここで  $C_2 = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$ ,  $C_3 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ ,  $V = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$ , である.  $\approx$  に関する同値類は  $\{\{\epsilon\}, C_2, C_3\}$ ,  $\{V, A_4\}$  である.  $\Omega(A_4)^\times$  は次の単数の逆像で生成される.

$$\frac{\{\epsilon\} \quad C_2 \quad C_3 \quad V \quad A_4}{a \quad a \quad a \quad b \quad b} \quad a, b \in \{1, -1\}$$

例 8.3  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の交代群  $A_5$  の非自明な部分群は次の何れかと同型である.

$$C_2 = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle, \quad C_3 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle, \quad V = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle, \\ C_5 = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \rangle, \quad D_6 = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2)(4\ 5) \rangle, \quad D_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 5\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle, \quad A_4$$

正規化群は

$$N_{A_5}(C_2) = V, \quad N_{A_5}(C_3) = N_{A_5}(D_6) = D_6, \\ N_{A_5}(C_5) = N_{A_5}(D_{10}) = D_{10}, \quad N_{A_5}(V) = N_{A_5}(A_4) = A_4$$

であり,  $\mathcal{I}(A_5) = \{D_6, D_{10}, A_5\}$  が得られる.  $\approx$  に関する同値類は

$$\{\{\epsilon\}, C_2, C_3, C_5\}, \{V, A_4\}, \{D_6\}, \{D_{10}\}, \{A_5\}$$

である.  $\Omega(A_5)^\times$  は次の単数の逆像で生成される ([6, 1.7]).

$$\frac{\{\epsilon\} \quad C_2 \quad C_3 \quad V \quad C_5 \quad D_6 \quad D_{10} \quad A_4 \quad A_5}{a \quad a \quad a \quad b \quad a \quad c \quad d \quad b \quad e} \quad a, b, c, d, e \in \{1, -1\}$$

例 8.4  $\{1, 2, 3, 4\}$  上の対称群  $S_4$  の非自明な部分群は次の何れかと同型である.

$$S_2, \quad C_2 = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle, \quad C_3 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle, \quad C_4 = \langle (1\ 3\ 2\ 4) \rangle, \quad D_4 = \langle (1\ 2), (3\ 4) \rangle, \\ V = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle, \quad S_3, \quad D_8 = \langle (1\ 2), (1\ 3\ 2\ 4) \rangle, \quad A_4, \quad \text{and} \quad S_4.$$

正規化群は

$$N_{S_4}(S_2) = D_4, \quad N_{S_4}(C_2) = N_{S_4}(C_4) = N_{S_4}(D_4) = N_{S_4}(D_8) = D_8, \\ N_{S_4}(C_3) = N_{S_4}(S_3) = S_3, \quad N_{S_4}(V) = N_{S_4}(A_4) = S_4.$$

であり,  $\mathcal{I}(S_4) = \{S_3, D_8, S_4\}$  が得られる.  $\approx$  に関する同値類は

$$\{\{\epsilon\}, S_2, C_2, C_3, C_4, D_4, V, A_4\}, \{S_3\}, \{D_8\}, \{S_4\}$$

である.  $\tilde{x} \in \text{Im } \phi$  の  $C_2$  成分と  $C_4$  成分が 1 ならば, 次のことが導かれる.

(1)  $\gamma_{C_2}^{\tilde{x}}$  は  $D_8/C_2 \simeq D_4$  の線形指標であるから  $x_{D_4}x_V = x_{C_4}x_{D_4}x_V = 1$  である.

(2)  $\gamma_V^{\tilde{x}}$  は  $S_4/V \simeq S_3$  の線形指標であるから,  $x_V = x_{A_4}$  である.

$\Omega(S_4)^\times$  は次を満たす  $x_1-x_6$  で生成される. ( $x_3x_4x_5x_6 \in \text{Im } \bar{u}$  である.)

|               | $\{\epsilon\}$ | $S_2$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $D_4$ | $V$ | $S_3$ | $D_8$ | $A_4$ | $S_4$ |
|---------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|-------|
| $\phi(x_1) =$ | (              | -1,   | -1,   | -1,   | -1,   | -1,   | -1, | -1,   | -1,   | -1,   | -1)   |
| $\phi(x_2) =$ | (              | -1,   | 1,    | -1,   | -1,   | 1,    | 1,  | -1,   | 1,    | 1,    | -1)   |
| $\phi(x_3) =$ | (              | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | -1, | -1,   | 1,    | 1,    | -1)   |
| $\phi(x_4) =$ | (              | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | 1,  | 1,    | -1,   | 1,    | 1)    |
| $\phi(x_5) =$ | (              | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | 1,  | 1,    | 1,    | -1,   | 1)    |
| $\phi(x_6) =$ | (              | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | 1,    | 1,  | 1,    | 1,    | 1,    | -1)   |

## 参考文献

- [1] T. Asai, N. Chigira, T. Niwasaki, and Y. Takegahara, On a theorem of P. Hall, J. Group Theory **16** (2013), 69–80.
- [2] R. Boltje, A general theory of canonical induction formulae, J. Algebra **206** (1998), 293–343.
- [3] R. Boltje and B. Külshammer, Canonical Brauer induction and symmetric groups, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **8** (2005), 453–460.
- [4] S. Bouc, The slice Burnside ring and the section Burnside ring of a finite group, Compos. Math. **148** (2012), 868–906.

- [5] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory*, Vol. I, II, Wiley-Interscience, New York, 1981, 1987.
- [6] T. tom Dieck, *Transformation Groups and Representation Theory*, Lecture Notes in Mathematics, 766, Springer, Berlin, 1979.
- [7] A. Dress, A characterisation of solvable groups, *Math. Z.* **110** (1969), 213–217.
- [8] A. Dress, Operations in representation rings, in “Representation theory of finite groups and related topics,” (Madison, Wis., 1970), 39–45, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. XXI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.
- [9] D. Gluck, Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the  $p$ -subgroup simplicial complex, *Illinois J. Math.* **25** (1981), 63–67.
- [10] T. Matsuda, On the unit groups of Burnside rings, *Japan. J. Math. (N.S.)* **8** (1982), 71–93.
- [11] T. Matsuda, A note on the unit groups of Burnside rings as Burnside ring modules, *J. Fac. Sci. Shinshu Univ.* **21** (1986), 1–10.
- [12] T. Matsuda and T. Miyata, On the unit groups of Burnside rings of finite groups, *J. Math. Soc. Japan* **35** (1983), 345–354.
- [13] L. Solomon, The Burnside algebra of a finite group, *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 603–615.
- [14] M. Suzuki, *Group Theory I, II*, Springer-Verlag, New York, 1982, 1986.
- [15] Y. Takegahara, Multiplicative induction and units for the ring of monomial representations, *Adv. Math.* **355** (2019), 106768, 50pp.
- [16] E. Yalçın, An induction theorem for the unit groups of Burnside rings of 2-groups, *J. Algebra* **289** (2005), 105–127.
- [17] T. Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, *J. Algebra* **80** (1983), 90–105.
- [18] T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, *J. Math. Soc. Japan* **42** (1990), 31–64.
- [19] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 509–574.