

多次元波動方程式の境界値問題について

東大教養 上野 正

こゝでは, 多次元の波動方程式の可能な境界条件は, 波動方程式の形によっても可能である; という問題を考える.

一次元波動方程式については, Feller [1] によつて境界が分類され, 可能な境界条件は完全に決定されている. この結果の一部分が, A. D. Wentzell [5] によつて次のように拡張されている.

D は R^N の connected bounded domain として ∂D は十分小さく,

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$$

は十分の regularity を持つ elliptic operator とする. $\mathcal{Q}$ は $C(\bar{D})$ 上の positive 且つ Hille-Yosida 条件の generator として A の contraction とする.

このとき ∂D の各点 x に対し, $u \in D(\mathcal{Q}) \cap C^2(\bar{D})$ に対し

$$\begin{aligned} Lu(x) &= 0, \quad \text{もし,} \\ Lu(x) &= \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + \gamma(x) u(x) + \delta(x) \mathcal{Q}u(x) \\ &\quad + \mu(x) \frac{\partial}{\partial x_N} u(x) + \int_{\bar{D}} (u(y) - u(x)) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \xi_i(x, y) \nu(x, dy). \end{aligned} \quad (1)$$

こゝに $\{\alpha_{ij}(x)\}$ は non-negative definite, $\gamma(x), \delta(x) \leq 0$, $\mu(x) \geq 0$,

$\nu(x, \cdot)$ は $\bar{D}$ 上の measure として x の近傍を除いた部分では有界, かつ

$$\int_{\bar{D}} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i(x, y)^2 + \xi_N(x, y) \right\} \nu(x, dy) < \infty,$$

$\{\xi_i(x, y), 1 \leq i \leq N\}$ は x に対し local coordinate として, $y \in \bar{D}$ に対して成り立ち,

1. An Abstract Scheme.

$\mathcal{H}_0$ is real vector space, with inner product $(f, g)_S$ and norm $\|f\|_S$ defined by

$$\|f\|_S \leq \|f\|_L, \quad f \in \mathcal{H}_0, \quad \text{and} \quad \|f\|_S = (f, f)_S^{1/2},$$

and $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ is the completion of $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_*$ is the dual of $\mathcal{H}$.

Let us assume 1) - 5)

1) $\mathcal{H}_*$ is the subspace of $\mathcal{H}$.

2) $\mathcal{H}$ is a generator of $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}_*$ is a subset of $\mathcal{H}$.

3) $\mathcal{H}_*$ is a subset of $\mathcal{H}$ and is dense.

4) $((\alpha - \alpha_0)f, f)_S = \|f\|_L^2, \quad f \in \mathcal{H}_*, \quad \alpha_0 > 0$ and $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

5) $|(\alpha f, g)_S - (\alpha g, f)_S| \leq K (\|f\|_L^2 + \|g\|_S^2), \quad f, g \in \mathcal{H}_*.$

Def. $B = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_* \\ \mathcal{H}_* \end{pmatrix} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, with norm $\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \| = (\|f\|_L^2 + \|g\|_S^2)^{1/2}$ and

$$\mathcal{O}_\alpha \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \alpha f \end{pmatrix}, \quad \text{for } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\alpha) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_* \\ \mathcal{H}_* \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

is a self-adjoint operator.

Theorem Assume 1) - 5) and let $\mathcal{O}_\alpha$ be a self-adjoint operator on B and $\mathcal{H}$ is a generator of $\mathcal{H}$.

Cor. $\{T_t\}$ is a strongly continuous semigroup, $f \in \mathcal{H}, g \in \mathcal{H}_*$ and $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = T_t \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ and

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \mathcal{O}_\alpha u(t), \quad u(t) \rightarrow f, \quad v(t) \rightarrow g, \quad \text{as } t \rightarrow 0.$$

Remark. Assume 3) is not satisfied, then the theorem is not true.

$$\alpha \|(\alpha - \alpha_0)^{-1} f\|_L \leq \|f\|_L, \quad f \in \mathcal{H}_*$$

$$\alpha \|(\alpha - \alpha_0)^{-1} f - f\|_L \rightarrow 0, \quad f \in \mathcal{H}_*.$$

Theorem is proved by, $f, g \in \mathcal{H}_*$ and $\begin{pmatrix} \alpha - \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ and

$$\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \|^2 = \|f\|_L^2 + \|g\|_S^2 = ((\alpha_0 - \alpha)f, f)_S + (g, g)_S = \| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \|^2$$

essential in [6] and [7]. The proof is given in [1] and [2].

2 解の構成方針.

これを Ω へ延ばすことにし, 適当な space のとき, 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u = Au, \quad \text{in } D,$$

$$Lu(x) = 0, \quad x \in \partial D$$

が成り立つ解を構成し, 任意の $t \in \mathbb{R}$ の Schrodinger 方程式を解く
 ことが出来る. $t=0$ のとき $u(x) = v(x)$ である.

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = v, & \text{in } D \\ Lu = 0, & x \in \partial D \end{cases} \quad (2)$$

このとき $v \in C^0(\bar{\Omega})$ である. この解 u が存在する. $u = G_\alpha v$ と書く. $t=0$ のとき,

$$\begin{cases} (\alpha - A)u_0 = v, & \text{in } D \\ u_0(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases} \quad (3)$$

は存在する. $u_0 = G_\alpha^0 v$ と書く. $t=0$ のとき,

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0, & \text{in } D \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial D \end{cases} \quad (4)$$

の解 u が存在する. $u(x) = H_\alpha \varphi(x)$ と書く.

今, $t \in \mathbb{R}$ のとき (2) の解 u を求める.

$$(\alpha - A)(u - u_0) = v - v = 0, \quad \text{in } D, \quad (4) \text{ のとき}$$

$$u - u_0 = H_\alpha [u - u_0]_{\partial D}. \quad (5)_{\partial D} \text{ は } a \text{ の値で } \varphi(x). \quad [u_0]_{\partial D} = 0, \text{ かつ}$$

$$u - u_0 = H_\alpha [u]_{\partial D}, \quad t=0 \text{ のとき (2) のとき } Lu = 0 \text{ かつ}$$

$$-Lu_0 = L(u - u_0) = LH_\alpha [u]_{\partial D}, \quad \text{よって } (LH_\alpha)^{-1} \text{ が存在する}$$

$$u = u_0 - H_\alpha (LH_\alpha)^{-1} (Lu_0). \quad \text{すなわち,}$$

$$G_\alpha v = G_\alpha^0 v - H_\alpha (LH_\alpha)^{-1} (LG_\alpha^0 v) \quad (5)$$

と表わされる. $t=0$ のとき解の構成が出来る.

この問題を Nagakura 形式の u に、定義された (η, σ) の resolvent として
 これを解くわけである。この方針は Burch 等 [6] の方法で、
 [4], [5] で用いたもので、1章の [1] にもある。

2. b.d. 条件

この問題は簡単のため、 A は Laplacian $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ とし、 Lu は
 次のように規定する。

$$Lu(x) = a \cdot Bu(x) + f(x)u(x) + \delta(x)Au(x) + \frac{\partial}{\partial n}u(x) + \int_{\partial D} (u(y) - u(x)) \nu(x, dy) \quad (6)$$

B は ∂D 上の Laplacian $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $a \geq 0$, $f(x), \delta(x) \leq 0$, $\nu(x, \cdot)$ は
 ∂D 上の measure γ , 前の条件より $\gamma < \infty$, $\int_{\partial D} \sum_{i=1}^{N-1} |\nu(x, y)| \nu(x, dy) < \infty$
 とする。regularity 4.12, f, δ は十分 smooth, また最終項は
 ∂D 上十分 smooth な $u \in C^2(\partial D)$ に対して成立する。

より具体的な制限 4.12, $\nu(x, \cdot)$ は ∂D 上の surface element dx に対し
 density, $\nu(x, y) \geq 0$, $\nu(x, y) = \nu(y, x)$ が成立することを要し、 ν は

$$a > 0, \quad \delta(x) < 0$$

を仮定する。これらの条件を修正すれば $a=0$ としても、 $\delta(x)=0$

としても、 δ が部分的に 0 になる場合も簡単に扱える。

$\frac{\partial}{\partial n}u(x)$ の係数が 1 であることは $\mu(x) > 0$ を仮定して置く
 必要がある。

Bu は uniformly elliptic であることが仮定される。

この内容である。また $\nu(x, \cdot)$ は内部測度であることも、内部の
 measures が存在する若干の regularity を仮定すれば可能である。また
 十分 close である。内部測度の測度無限大の場合、この拡張
 方程式の解は存在しないか (1 の仮定) が成立するかどうかが判らない。
 最も可能性は、かなりなことを要することになる。

4. 記号の定義

$$(f, g) = \int_D f(x) g(x) dx, \quad \langle f, g \rangle = \int_{\partial D} f \cdot g \, dx$$

$$D(f, g) = \int_D \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} f \frac{\partial}{\partial x_j} g \, dx, \quad D\langle f, g \rangle = \int_{\partial D} \sum_{i,j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_i} f \frac{\partial}{\partial x_j} g \, dx$$

$$\nu(f, g) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} dx \int_{\partial D} \nu(x, y) (f(y) - f(x)) (g(y) - g(x))$$

$$(f, g)_S = (f, g) + \langle f, g \cdot |\delta| \rangle$$

$$(f, g)_L = (f, g)_S + D(f, g) + \alpha \cdot D\langle f, g \rangle + \langle f, g \cdot |\delta| \rangle + \nu(f, g)$$

$$\langle f, g \rangle_1 = \langle f, g \rangle + D\langle f, g \rangle + \nu(f, g)$$

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}, \quad \|f\|_S = (f, f)_S^{1/2}, \quad \|f\|_L = (f, f)_L^{1/2}, \quad \|f\|_D = \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad \|f\|_1 = \langle f, f \rangle_1^{1/2}$$

$\mathcal{L}_0$ は $\bar{D}$ 上 十分 smooth な 連続関数の全体, $\mathcal{L}_0^\partial$ は ∂D 上 十分 smooth な 連続関数の全体, $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}_0$ を $\|\cdot\|_S$ 及 $\|\cdot\|_L$ により, $\mathcal{L}_0^\partial$ 及 $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}_0^\partial$ を $\|\cdot\|_D$ 及 $\|\cdot\|_1$ により 完備化 (completion) したものである. 十分 とは 本質は明確に指定する必要はない, これはあまり本質的でないからである.

上の記号により Green-Stokes の公式を次のように表す

$$D(u, v) + (Au, v) + \langle \frac{\partial}{\partial n} u, v \rangle = 0, \quad u, v \in \mathcal{L}_0 \quad (7)$$

$$\langle B\varphi, \psi \rangle + D\langle \varphi, \psi \rangle = 0, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{L}_0^\partial \quad (8)$$

$\nu(\varphi, \psi)$ の def. は 次の事実 によって与えられる:

$$\left\langle \int_{\partial D} (\varphi(y) - \varphi(x)) \nu(x, dy), \psi \right\rangle = -\nu(\varphi, \psi) \quad (9)$$

実際, 左辺 = $\int_{\partial D} dx \int_{\partial D} \psi(x) (\varphi(y) - \varphi(x)) \nu(x, y) dy$, $\left(\begin{array}{l} x \text{ と } y \text{ は } \partial D \text{ 上,} \\ \nu(x, y) = \nu(y, x) \text{ となる} \end{array} \right)$

$$= \int_{\partial D} dy \int_{\partial D} \psi(y) (\varphi(x) - \varphi(y)) \nu(x, y) dx, \quad \left(\begin{array}{l} \text{上と下は } \partial D \text{ 上の点} \\ \text{として } x \text{ と } y \text{ を入れ替える} \end{array} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\partial D} \int_{\partial D} dx dy (\varphi(y) - \varphi(x)) (\varphi(y) - \varphi(x)) \nu(x, y)$$

$$= -\nu(\varphi, \psi).$$

$$\underline{5} \quad G_\alpha^0 \in \overline{LG_\alpha^0}$$

なめらかな $v \in \bar{D}$ に対する (2) の解 $G_\alpha^0 v$ を考えよう. 明らかに

$$\|G_\alpha^0 v\| \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v \right\| \leq C \|v\|, \quad C > 0$$

である. したがって $G_\alpha^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H})$ の, $\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0)$ の bdd.

operator である. したがって G_α^0 は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_0$ への operator である. したがって $\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_0$ への operator である.

$$\|G_\alpha^0 v\|_5 = \|G_\alpha^0 v\| \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|, \quad v \in \mathcal{H} \quad (10)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v \right\|_0 \leq C \|v\| \leq C \|v\|_5, \quad v \in \mathcal{H}. \quad (11)$$

なめらかな v に対する $G_\alpha^0 v$ は L 上の関数 $G_\alpha^0 v(x) = 0$ on ∂D である.

$$LG_\alpha^0 v = (\alpha B + \gamma + \delta A + \frac{\partial}{\partial n}) G_\alpha^0 v + \int_{\partial D} \gamma(x, d\gamma) (G_\alpha^0 v(\gamma) - G_\alpha^0 v(x))$$

$$= \delta A G_\alpha^0 v + \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v = \delta (\alpha G_\alpha^0 v - v) + \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v$$

$$= -\delta \cdot v + \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v.$$

これは $\mathcal{H}_0$ の subspace $\mathcal{H}_0$ 上の def. した $\mathcal{H}_0$ 上の operator である. したがって $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ の operator $\overline{LG_\alpha^0}$ は unique ext. した. したがって

$$\overline{LG_\alpha^0} v(x) = -\delta(x) v(x) + \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v(x). \quad (12)$$

* v が D と 0 の ∂D と 0 である. $G_\alpha^0 v \equiv 0$ である. $\overline{LG_\alpha^0} v \neq 0$ である. $\therefore$ (12) の δ は $\delta(x)$ である.

$$\underline{6} \quad H_\alpha \in \overline{LH_\alpha}$$

∂D 上の φ に対する (4) の解 $H_\alpha \varphi$ に対して

$$\|H_\alpha \varphi\| \leq C \|\varphi\|_0, \quad C_1 \|\varphi\|_0^2 \leq \alpha (H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) + D(H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) \leq C_2 (\|\varphi\|_1^2)^2$$

が成立する. このことから H_α は $\mathcal{H}_0$ 上の ext. した $\mathcal{H}_0$ 上の $\mathcal{H}_0$ への operator である.

$$\|H_\alpha \varphi\| \leq C \|\varphi\|_0, \quad \|H_\alpha \varphi\|_5 \leq C' \|\varphi\|_0, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^0, \quad (13)$$

$$C_1 \|\varphi\|_0^2 \leq \alpha (H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) + D(H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) \leq C_2 (\|\varphi\|_1^2)^2, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^0, \quad (14)$$

$$\|H_\alpha \varphi\|_0 \leq C_3 \|\varphi\|_1^2, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^0, \quad (15)$$

(15) は $\|\cdot\|_2$ の def. と (14) から容易に導かれる. (14) の中央の項は
 $\pm$ と符号は $\bar{\gamma}$ によって入れ替わる. $\delta \alpha < 0$ であるから
 $\delta < 0$ である $\bar{\gamma}$ によって入れ替わる. γ は,

$$H_\alpha \varphi - H_\beta \varphi + (\alpha - \beta) G_\alpha^\circ H_\beta \varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^2 \quad (16)$$

これは smooth な φ に対しては $(\alpha - A)$ を apply すれば 0, $\partial D \neq \emptyset$ である
 δ が 0 であるから, H_α と G_α° の有界性から $\varphi \in \mathcal{H}_0^2$ に対しては $\pm$

$$\begin{aligned} & \varphi, \varphi \in \mathcal{H}_0^2 \text{ に対して, Green-Stokes の公式 (9) より, } \partial D \neq \emptyset \text{ は} \\ & H_\alpha \varphi = \varphi \text{ であることに注意して計算すると,} \\ & -\langle L H_\alpha \varphi, \varphi \rangle = -\langle a B \varphi + \gamma \cdot \varphi + \delta A H_\alpha \varphi + \frac{\partial}{\partial n} H_\alpha \varphi + \int_{\partial D} \varphi_1 dy_1 (\varphi_1 y_1 - \varphi_1), \varphi \rangle \\ & = a D \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi | \gamma | \rangle - \langle \delta A \varphi, \varphi \rangle + D(H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) \\ & \quad + (A H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) + 2(\varphi, \varphi) \\ & = \langle \varphi, \varphi | \gamma + 2\delta | \rangle + a D(\varphi, \varphi) + D(H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) + 2(H_\alpha \varphi, H_\alpha \varphi) + 2(\varphi, \varphi) \end{aligned}$$

よって (14) が $\bar{\gamma}$ によって入れ替わるのであることは容易に証明される.

Proposition 1. $-\langle L H_\alpha \varphi, \varphi \rangle$ は $\mathcal{H}_0^2$ 上の bilinear form $B_\alpha(\varphi, \varphi)$ として
 unique に存在する. $B_\alpha(\varphi, \varphi)$ は次の性質を持つ.

$$|B_\alpha(\varphi, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_1^2, \quad C(\|\varphi\|_1^2) \leq B_\alpha(\varphi, \varphi) \quad (17)$$

$$-\langle L H_\alpha \varphi, \varphi \rangle = B_\alpha(\varphi, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^2, \varphi \in \mathcal{H}_1^2 \quad (18)$$

Proposition 2. $L H_\alpha$ は $\mathcal{H}_0^2$ 上に def. され, $\mathcal{H}_0^2$ 上の値を取る. $\mathcal{H}_0^2$ は
 $\mathcal{H}_1^2$ の $L H_\alpha$ によって closable である.

$\varphi_n \in \mathcal{H}_0^2$ が, $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{H}_1^2$, $\langle L H_\alpha \varphi_n - \varphi^*, \varphi \rangle \rightarrow 0$, for $\varphi \in \mathcal{H}_1^2$, $\varphi^* \in \mathcal{H}_0^2$
 であるならば, $\varphi^* = 0$.

($\odot$) $\varphi_n \in \mathcal{H}_0^2$ ならば $L H_\alpha \varphi_n \in \mathcal{H}_1^2$. 故に, $0 = \lim \langle L H_\alpha \varphi_n - \varphi^*, \varphi \rangle$

$$= \lim \langle L H_\alpha \varphi_n, \varphi \rangle - \langle \varphi^*, \varphi \rangle = -\lim B_\alpha(\varphi_n, \varphi) - \langle \varphi^*, \varphi \rangle = -\langle \varphi^*, \varphi \rangle$$

$\mathcal{H}_1^2$ は $\mathcal{H}_0^2$ 上で dense であるから $\varphi^* = 0$.

Def. $\gamma = \gamma^*$, $\varphi \in \mathcal{H}_1^0$, $\gamma \in \mathcal{H}_1^0$, $\gamma \in \mathcal{H}_1^0$ $\varphi_n \in \mathcal{H}_1^0$ $\varphi^* \in \mathcal{H}_1^0$ の存在する γ の全体を $\mathcal{D}(\overline{LH}_\alpha)$, $\varphi^* \in \overline{LH}_\alpha \varphi \in \text{def.}$ となる (φ^* は prop. 2 により unique)
 $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{H}_1^0$, $\langle LH_\alpha \varphi_n - \varphi^*, \psi \rangle = 0$, $\forall \psi \in \mathcal{H}_1^0$.

Cor. $B_\alpha(\varphi, \psi) = -\langle \overline{LH}_\alpha \varphi, \psi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{LH}_\alpha)$, $\psi \in \mathcal{H}_1^0$. (19)

$$\overline{LH}_\alpha \varphi = 0, \text{ for } \varphi \in \mathcal{D}(\overline{LH}_\alpha) \Rightarrow \varphi = 0 \quad (20)$$

(1) 前項は Def. による, 後項は (19) の 2 式を併せて得られる。

Proposition 3. $\mathcal{D}(\overline{LH}_\alpha)$ は α により決まる, $\gamma \in \mathcal{D}_0$ と $\gamma^* \in \mathcal{H}_1^0$

$$\overline{LH}_\alpha \varphi - \overline{LH}_\beta \varphi + (\alpha - \beta) \overline{LG}_\alpha^0 H_\beta \varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0 \quad (21)$$

これは, (16) を smooth な φ_n により limit をとることで示す。 G_α は same な

operator である。 $LH_\alpha \varphi_n \in LH_\beta \varphi_n$ の $-\beta$ 項は φ_n により γ として γ^* として

Proposition 4. $\varphi \in \mathcal{H}_1^0$ に対し, φ の $\overline{LH}_\alpha' \varphi \in \mathcal{D}_0$ は unique に存在する。

$$\overline{LH}_\alpha (\overline{LH}_\alpha' \varphi) = \varphi$$

$$-B_\alpha(\overline{LH}_\alpha' \varphi, \psi) = \langle \varphi, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H}_1^0 \quad (22)$$

(1) $\varphi \in \mathcal{H}_1^0$ に対して $\mathcal{H}_1^0$ 上の functional $F(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle$ は def. による

$$|F(\psi)| = |\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \|\varphi\|_2 \|\psi\|_2 \leq \|\varphi\|_2 \|\psi\|_1 \quad \text{より, Riesz の Th. により}$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = F(\psi) = \langle \varphi^*, \psi \rangle, \quad \varphi^* \in \mathcal{H}_1^0$$

よって (17) により, Milgram-Lax の Th. より $\varphi^{**} \in \mathcal{H}_1^0$ が存在する。

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi^*, \psi \rangle = B_\alpha(\varphi^{**}, \psi).$$

uniqueness は (20) の 2 式から得られる。 $\varphi^{**} \in \mathcal{D}_0$, $\overline{LH}_\alpha \varphi^{**} = -\varphi$ である。

$\overline{LH}_\alpha' \varphi = -\varphi^{**}$ と def. される。 $\gamma \in \mathcal{H}_1^0$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ なる列をとると,

$$LH_\alpha \varphi_n \in \mathcal{H}_1^0 \text{ であり, } \langle LH_\alpha \varphi_n + \varphi, \psi \rangle = \langle LH_\alpha \varphi_n, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle$$

$$= -B_\alpha(\varphi_n, \psi) + \langle \varphi, \psi \rangle \rightarrow -B_\alpha(\varphi^{**}, \psi) + \langle \varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle = 0.$$

この $\overline{LH}_\alpha'$ は $\mathcal{H}_1^0$ 上に def. される。 γ は $\mathcal{H}_1^0$ 全体の γ に対して

これは $\overline{LH}_\alpha$ の inverse である。 γ である。

Theorem, 1 $\overline{LH}_\alpha$ は $\mathcal{D}_0$ を $\mathcal{H}_0^2$ の onto-map, 3 の inverse $\overline{LH}_\alpha^{-1}$ は次の性質をもつ.

$$\overline{LH}_\alpha(\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^2; \quad \overline{LH}_\alpha^{-1}(\overline{LH}_\alpha\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

$$B_\alpha(\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi, \varphi) = -\langle \varphi, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^2, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^2 \quad (23)$$

$$\|\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi\|_2 \leq C\|\varphi\|_2, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^2. \quad (24)$$

(22) $\rightarrow \varphi = \overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi$ とおき, (17) の性質より

$$C'(\|\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi\|_1)^2 \leq B_\alpha(\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi, \overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi) = -\langle \varphi, \overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi \rangle \leq \|\varphi\|_2 \|\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi\|_2.$$

よって

$$C'\|\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2.$$

したがって $\overline{LH}_\alpha^{-1}$ は $\mathcal{H}_0^2$ 上 def. され, $\mathcal{H}_0^2$ 上の bounded operator $\overline{LH}_\alpha^{-1}$ が unique である. したがって (23), (24) の成立は明らかである. $\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi$ の性質の $\varphi \in \mathcal{H}_0^2$ に対して $\mathcal{D}_0$ の $\lambda \varphi = \varphi$ である, $\overline{LH}_\alpha(\overline{LH}_\alpha^{-1}\varphi) = \varphi$ である $\overline{LH}_\alpha$ の def. にもよる性質である.

よって $\lambda = \alpha$ の場合, resolvent の性質より

$$\underline{Def.} \quad G_\alpha v = G_\alpha^0 v - H_\alpha \overline{LH}_\alpha^{-1} \overline{LG}_\alpha^0 v, \quad v \in \mathcal{H}_0.$$

1. G_α が $\mathcal{H}_0$ 上の resolvent であること.

Proposition 5 $u, v \in \mathcal{H}_0$ に対して $(\alpha - A)u = v$ であるとき

$$\alpha \|u\|_S^2 + \frac{1}{2} \{ \|u\|_L^2 - \|u\|_S^2 \} = (u, v)_S - \langle Lu, u \rangle \quad (25)$$

$$\alpha \| \alpha u - v \|_S^2 + \alpha \{ \|u\|_L^2 - \|u\|_S^2 \} = (u, v)_L - (u, v)_S - \langle \alpha u - v, Lu \rangle \quad (26)$$

$$= (\alpha u - v, Av)_S + \langle Lv, \alpha u - v \rangle - \alpha \langle Lu, \alpha u - v \rangle \quad (27)$$

(25) は $(Au, u) + D(u, u) + \langle \frac{\partial}{\partial n} u, u \rangle = 0$, かつ $Au = \alpha u - v$ であることより,

(26) は $(Au, Au) + D(u, Au) + \langle \frac{\partial}{\partial n} u, Au \rangle = 0$, かつ $Au = \alpha u - v$ であることより,

(27) は $(Av, w) + D(w, w) + \langle \frac{\partial}{\partial n} w, w \rangle = 0$, かつ $w = \alpha u - v$ であることより, $Av = \alpha w - Av$ であることより得られる.

proposition 5'. $v \in \mathcal{G}_0$, $u = G_\alpha v - H_\alpha \overline{L H_\alpha}^{-1} \overline{L G_\alpha} v$ に対して

$$\alpha \|u\|_S^2 + \{ \|u\|_L^2 - \|u\|_S^2 \} = (u, v)_L - (u, v)_S \quad (25')$$

$$\| \alpha u - v \|_S^2 + \alpha \{ \|u\|_L^2 - \|u\|_S^2 \} = (u, v)_L - (u, v)_S \quad (26')$$

$$\alpha \| \alpha u - v \|_S^2 + \{ \| \alpha u - v \|_L^2 - \| \alpha u - v \|_S^2 \} = (\alpha u - v, Av)_S + \langle Lv, \alpha u - v \rangle \quad (27')$$

ここで, $\overline{L H_\alpha}^{-1} \overline{L G_\alpha} v = \varphi$ に対して, $\varphi_n \in \mathcal{G}_0$ が $\varphi_n \rightarrow \varphi$ かつ $\varphi_n \in \mathcal{G}_0$ なるものを

$u_n = G_\alpha v - H_\alpha \varphi_n$ として u に収束するものを選び, u_n と v の間には (25')-(27')

が成り立つ。これより u に対する (25')-(27') が成り立つ。ここで, (15) まで。

Theorem 2. $\alpha \|G_\alpha v\|_S \leq \|v\|_S$, $v \in \mathcal{G}$ (28)

$$\alpha \|G_\alpha v\|_L \leq \|v\|_L, \quad v \in \mathcal{G}_* \quad (29)$$

$$\| \alpha G_\alpha v - v \|_S \rightarrow 0, \text{ as } \alpha \rightarrow \infty, \quad v \in \mathcal{G} \quad (30)$$

$$\| \alpha G_\alpha v - v \|_L \rightarrow 0, \text{ as } \alpha \rightarrow \infty, \quad v \in \mathcal{G}_* \quad (31)$$

$$G_\alpha v - G_\beta v + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta v = 0, \quad v \in \mathcal{G}. \quad (32)$$

(i) $v \in \mathcal{G}_0$ に対して (25')-(27') と (28)-(31) は容易に示される。

(ii) (28), (29) は $v \in \mathcal{G}$, $v \in \mathcal{G}_*$ であることに注意して, それぞれ示される。

(30), (31) は (28), (29) から (32) は G_α の定義から容易に示される。

以上で Theorem 2 の証明は完了する。

ここで α の値を (4), (5) とし (32) を示す。定数 $\alpha_0 = 1$ とする。以下 $\alpha \geq 1$ とする。

proposition 6 $(f, g)_S - (Af, g)_S = (f, g)_L + \langle Lf, g \rangle$, $f, g \in \mathcal{G}_0$ (33)

$$(f, g)_S - (Of, g)_S = (f, g)_L, \quad f \in \mathcal{D}, g \in \mathcal{G}_* \quad (33')$$

(i) (33) は Green-Stokes 公式を用いて計算される。(34) は $v \in \mathcal{G}_0$ に対して

$G_\alpha v$ が smooth であることを示す。ここで, (25') の $\alpha \geq 1$ であることに注意して

次の不等式が成り立つ。

$$\|G_\alpha v\|_L \leq \|v\|_S.$$

Cor. i) $(f, f)_S - (Of, f)_S = \|f\|_L^2$, $f \in \mathcal{D}$
ii) $(Of, g)_S - (f, Of)_S = 0$, $f, g \in \mathcal{D}$.

9. 補題

1) domain $\Omega = \mathbb{R}^n$ にとあるような函数が成り立つ
 か $\chi = 1$ の場合であるが、これは $\chi = 1$ の場合(あるいは $\chi = 0$ の
 場合)は証明できる。

$\overline{\Omega}$ 上の smooth な函数 u について $Lu(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$
 を満たすものは $\Omega = \mathbb{R}^n$ にとある measure $\nu(x)$
 が Ω 上に集中しているという場合に限るとして、
 この条件は Ω の近傍では 0 となる函数という事は明らか
 であるから、これは Ω にとある。

然しこれは $\nu(x, D) > 0$ の場合は別に考えねばなら
 ない。

2) χ は (1) のように $\delta(x)$ が部分域に正であり、0 にな
 るところがあるが、この場合も容易にこ
 とが判る。証明は (1) のように証明する。このとき χ は
 χ の proposition 5', (27') の右辺の 2 項の和
 である。この条件が判るから、これが不要である。

文献

- [1] W. Feller; The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, Ann. of Math.(2) 55, 468-519(1952).
- [2] W. Feller; On the equation of the vibrating string, J. Math. Mech., 8, 339-348(1959).
- [3] K. Sato, T. Ueno; Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., 4, 529-606 (1965).
- [4] T. Ueno; The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary, I, Proc. Jap. Acad., 36, 533-538; II, 625-629(1960).
- [5] A. D. Wentzell; On lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes, Teor. Veroyat. Primen., 4, 172-185 (1959).
- [6] 吉田耕作; Semi-group の理論と波動方程式の積分, 数学, 8, 65-71(1956).