

MHD ダイナミクスにおけるエネルギー輸送の ウェーブレット解析

¹岡山理大工 荒木圭典 (ARAKI Keisuke), ²核融合研 三浦英昭 (MIURA Hideaki)
¹Okayama University of Science, ²National Institute for Fusion Science.

1 非圧縮理想 MHD 方程式の Lagrange 力学的導出

本節では MHD 流体における磁場と速度場の相互作用の物理的意味を考えながら、適切なウェーブレット展開について考える。ここでの考える手がかりは相互作用を記述する積分量が局所的な座標変換に対して不変性を持つかどうかである。本研究では流体の運動を直交座標系を用いて Euler 的に記述するだけであるが、座標変換に対する不変性の考察は流体を Lagrange 的に追跡する場合にも応用が可能な考え方の枠組みになる。

ここでは MHD 方程式系を Hamilton の原理から導く方法をレビューする。本来、MHD 方程式はイオンと電子の運動を粗視化して得られる巨視的な量に対する方程式として導かれる [1]。しかし導かれた方程式系には Hamilton 系や Lagrange 系として記述できるような数学的な構造が背後にあることが知られている [2]。ここでは座標系の取り方に依存しない表現を求める方法として作用積分からの変分問題を取り上げる。

N -粒子系の作用積分の変分の場合には経路の変分を $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q$ と置くと、変分に伴う粒子の速度 $u = \dot{q}$ の変化は $u(t) \rightarrow u(t) + \delta u$, $\delta u = dq/dt$ となるが、連続体の場合には速度場と Lagrange 粒子の配位の全体がコンシステントに変化しないといけないので、 δq に対応する Lagrange 粒子の変位場 ξ と速度場の変化分 δu に対していわゆる『Lin の拘束条件』

$$\delta u = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) u \quad (= (\partial_t + L_u) \xi) \quad (1)$$

が課される。

一方、MHD 近似における磁束密度の時間発展は次の式で与えられる：

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (u \times B). \quad (2)$$

この式は磁束密度を微分 2 形式 $B = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2$ であると考えれば、速度場 $u = u^1 \partial_1 + u^2 \partial_2 + u^3 \partial_3$ に沿った Lie 微分 L_u を用いて $(\partial_t + L_u) B = 0$ となる。つまり流体に対して凍りついた微分 2 形式となる。この性質が任意の流体の変形において成り立っていると仮定すると、流体粒子の変位 ξ に対する磁場の変化は

$$\delta B = \nabla \times (\xi \times B) \quad (= -L_\xi B) \quad (3)$$

と表される。ここで重要な点はこの右辺が Lie 微分で書けているので全体として座標系の取り方に依存しない式になっている。

非圧縮理想 MHD 方程式系の作用積分は次式で与えられる：

$$S = \frac{1}{2} \int_i^f dt \int_M d^3 \bar{x} (|u|^2 - |b|^2), \quad (4)$$

ここで i, f は初期、終端時刻、 M は流体の容器、作用積分の定義されている関数空間は M 上の非発散のベクトル場の空間とする。各流体粒子の変位 $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta\boldsymbol{\xi}(\vec{x})$ に伴う速度場と磁場の変位が

$$(\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{b}) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_{\mathbf{u}} \right) \boldsymbol{\xi}, -L_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{b} \right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{b}) \right)$$

で与えられるので、変分計算は次のようになる：

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_i^f dt \int_M d^3\vec{x} \left[\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \mathbf{b} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{b}) \right] \\ &= \int_i^f dt \int_M d^3\vec{x} \left[\boldsymbol{\xi} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

ここで部分積分に際して境界積分はゼロであると仮定した。これより非圧縮性流体の運動を支配する方程式は次式で与えられることがわかる：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_S = ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b})_S, \quad (6)$$

ここで添え字 $(*)_S$ は非発散成分への射影を意味している。 $(*)_S$ を具体的に計算書き下すと次の方程式系になる：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}, \quad (7)$$

$$P(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}))_{\vec{y}}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}. \quad (8)$$

注意すべき点は作用積分の変分から導かれる式は流体の運動方程式のみであって、磁場の発展方程式は作用積分を導くための前提、すなわち磁場が任意の流体の変形に対して保存2形式としてふるまうことを停留曲線に沿って表現したものになる。

MHD に従う流体の発展方程式が導出できることがわかったが、ここで重要なことは式が再現されることよりは、むしろ得られた表現が座標系の取り方に拠らないことである。変分計算の過程を振り返ると積分

$$\int \mathbf{b} \cdot (-L_{\mathbf{u}} \mathbf{b}) d\vec{x} = \int \mathbf{b} \cdot (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b})) d\vec{x} \quad (9)$$

は流体が磁場に対してなした仕事 W の時間微分 (dW/dt) であり、この積分は全体として任意の局所的な座標変換に対して不変である。本研究ではこの座標変換に対して不変な積分の式を基礎にして速度場、磁束密度のスケール間の相互作用の振る舞いを調べる。とくに分解に際しては、速度場の運動方程式と磁束密度の発展方程式との間で、モード釣り合いがなるべく成り立つように留意する。例えば速度場のスケール j の成分¹の発展方程式と磁場のスケール k の成分の発展方程式との間でつりあいを考えると次の恒等式を考えることになる：

$$\int \mathbf{u}_j \cdot ((\nabla \times \mathbf{b}_k) \times \mathbf{b}) d\vec{x} + \int \mathbf{b}_k \cdot (\nabla \times (\mathbf{u}_j \times \mathbf{b})) d\vec{x} = 0 \quad \text{for } \forall j, k \quad (10)$$

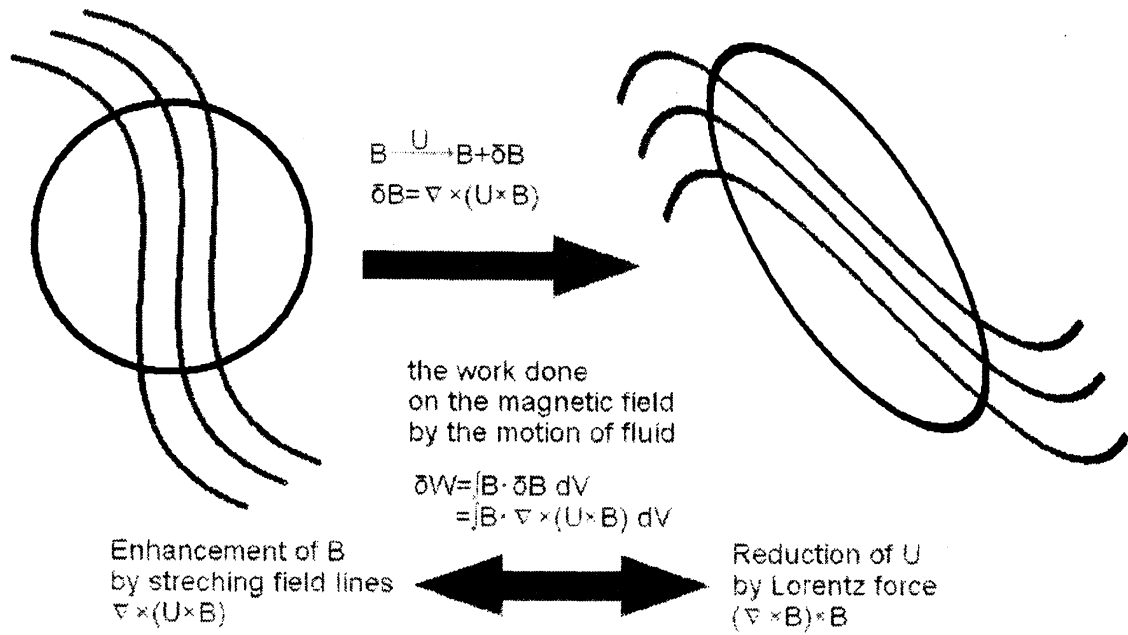


Figure 1: 移流の効果について

ここに現れる積分は Alexakis et al.[3] の解析した量²

$$\int \mathbf{b}_k \cdot ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}_j) d\vec{x} + \int \mathbf{u}_j \cdot ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}_k) d\vec{x} = 0 \quad (11)$$

とは次のつりあい関係の積分量

$$\int \mathbf{b}_k \cdot ((\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{b}) d\vec{x} + \int (\mathbf{u}_j)_\alpha (\mathbf{b})_\beta \frac{\partial (\mathbf{b}_k)_\beta}{\partial x^\alpha} d\vec{x} = 0 \quad (12)$$

の分だけ異なる値を評価していることになる。

2 数値シミュレーション

減衰MHD乱流の数値シミュレーションを行った。数値シミュレーションスキームは周期境界条件(格子点数 256^3)で擬スペクトル法(エイリアス除去は2/3ルール)、Runge-Kutta-Gill法を用いた。シミュレーションにおける粘性のパラメーターは $1/R = 1/R_m = 1 \times 10^{-4}$ 。シミュレーションに際して、背景に一様磁場 $\mathbf{B}_0 = (0, 0, 1)$ を導入した。運動エネルギー、磁場のエネルギー、エントロフィ、電流の時間発展をFigure 2に示す。以下の解析は時刻 $t = 0.38$ でのスナップショットを用いて行う。Figure 3に $t = 0.38$ の場のフーリエ/ウェーブレット・スケールスペクトル、渦度場、電流場の絶対値の等値面を示す。

¹ここでは非発散正規直交ウェーブレットによる展開を行う[4]。このウェーブレットは「スケール」「位置」「フーリエ空間での異方性」「ヘリシティ」の情報を持つ。本研究では(最後の節を除き)、後三者の情報については和を取って縮約し、「スケール」に関する情報を取り出す。

²彼らの解析はフーリエモードを球殻毎に分解してスケール間の速度・磁場間相互作用を解析したものである。

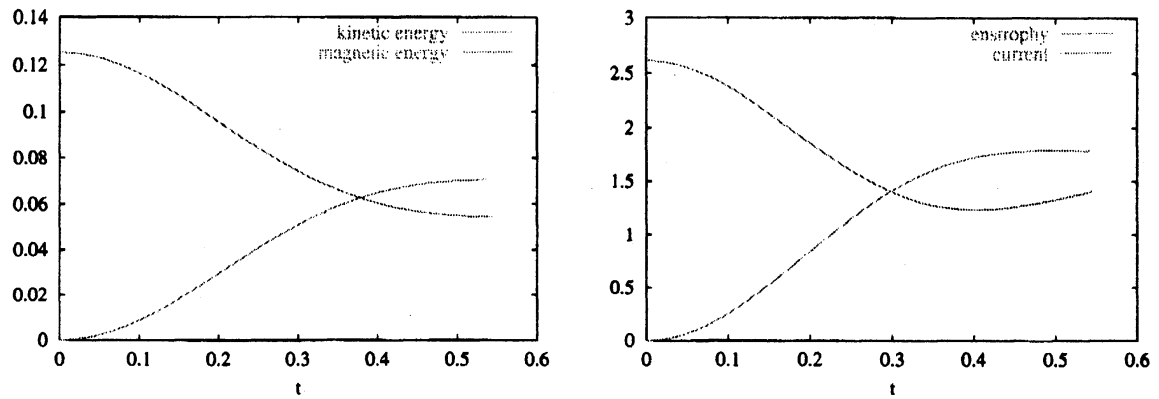


Figure 2: 場の時間発展；左：運動エネルギー、磁気エネルギー、右：エンストロフィ、電流密度の「エネルギー」。

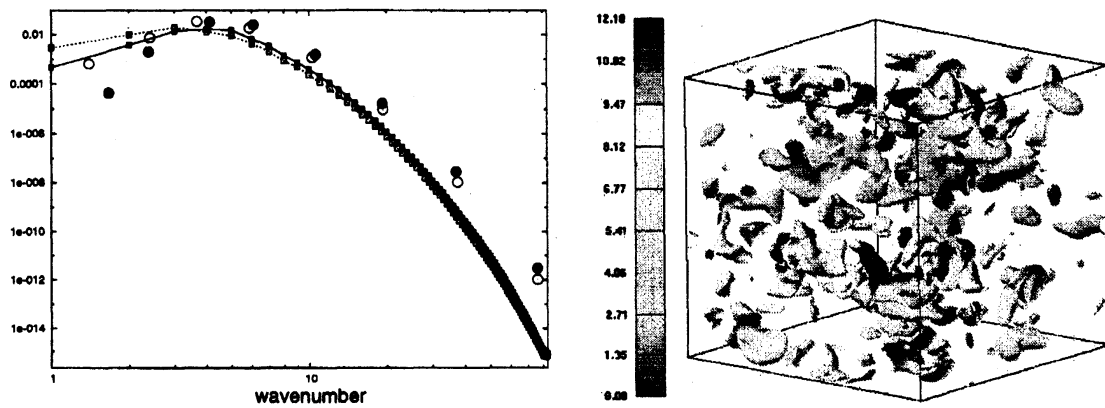


Figure 3: 解析を行った場 ($t = 0.38$) の (左) フーリエ/ウェーブレット・スケールエネルギー・スペクトル、(右) 渦度場、電流場の絶対値の等値面。エネルギー・スペクトルは、白：運動エネルギー、黒：磁気エネルギー。ウェーブレット・スペクトルは波数 $\|\nabla \times \mathbf{u}_j\|/\|\mathbf{u}_j\|$, $\|\nabla \times \mathbf{b}_j\|/\|\mathbf{b}_j\|$ にプロットしてある。等値面の図は、緑色：渦度場、灰色：電流場。

Table 1: 磁場、速度場間のエネルギーの収支量

term	value
$\langle \mathbf{b} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \rangle = -\langle \mathbf{u} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \rangle$	9.261×10^{-3}
$\langle \mathbf{b} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{u} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b} \rangle$	1.014×10^{-1}

3 エネルギー収支

以下、このスナップショットの速度場、磁場相互作用による運動エネルギー、磁場エネルギーのエネルギー収支を解析する。解析は全体の収支から始まって徐々に細かい振る舞いを見ていくことにする。われわれの用いたウェーブレットは「スケール」「位置」「フーリエ空間での異方性」「ヘリシティ」の4種の情報を持っているが、ここでは「スケール」の情報のみを取り扱う。最後の節で「スケール」と「位置」の情報を同時に取り扱った解析をする。

3.1 エネルギー収支の全体

まず速度場全体、磁場全体のエネルギー収支を調べる。運動エネルギー、磁場エネルギーの収支の式は次式で与えられる³：

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} | (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \rangle + \frac{1}{R} \langle \mathbf{u} | \Delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b} \rangle \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{b} | \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b} | \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \rangle + \frac{1}{R_m} \langle \mathbf{b} | \Delta \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b} | (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle \quad (14)$$

一様磁場 $\mathbf{B}_0$ の影響を考慮するために、一様磁場との相互作用の項を別にした。速度場、磁場間のエネルギー収支を Table 1 に示す。(1) 全体として速度場から磁場へとエネルギーが移動しており、その中でも (2) Alfvén 波の寄与がかなり大きくなっている。

3.2 エネルギー収支のスケール毎の分解

前節で調べた電磁誘導、ローレンツ力によるエネルギーの授受の様子をスケール毎に分解する：

$$\langle \mathbf{b} | \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \rangle \longrightarrow \sum_j \langle \mathbf{b}_j | \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \rangle \quad (15)$$

$$\langle \mathbf{u} | (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \rangle \longrightarrow \sum_j \langle \mathbf{u}_j | (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \rangle \quad (16)$$

これはエネルギー収支の式をスケール毎に分解して考慮することに当たる。スケール毎のエネルギー収支の式は次のようになる：

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_j \rangle = (\text{慣性項}) + \langle \mathbf{u}_j | (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \rangle + (\text{粘性項}) + (\mathbf{B}_0 \text{項}) \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{b}_j | \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_j | \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \rangle + (\text{抵抗項}) + (\mathbf{B}_0 \text{項}) \quad (18)$$

³以下、本稿ではブラケットは次の積分を表すものとする： $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle := \int \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{x}$ 。

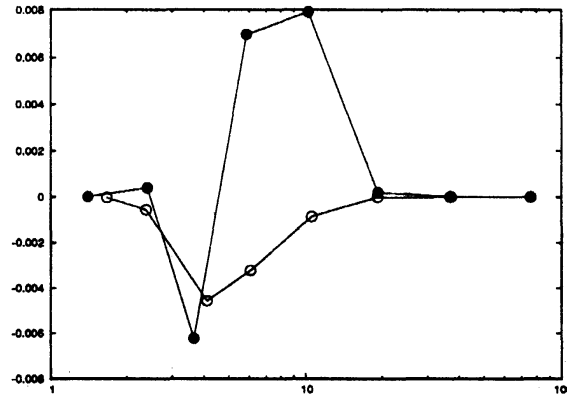


Figure 4: スケール毎のエネルギーの収支。白：ローレンツ項 (速度場) 黒：電磁誘導項 (磁場)。スペクトルは波数 $\|\nabla \times \mathbf{u}_j\|/\|\mathbf{u}_j\|$, $\|\nabla \times \mathbf{b}_j\|/\|\mathbf{b}_j\|$ にプロット。

解析の結果を Figure 4 に示す。これより、この場では速度場の運動エネルギーは主に $j = 2$ のスケールにおいて磁場への転換が行われている。これは運動エネルギーのスペクトルのピークの値に対応している。一方で磁場のエネルギー獲得のピークはスケール $j = 4$ に現れている。興味深いことはこのエネルギー損失のピークと磁場のエネルギー獲得のピークのスケールが異なっていることである。

3.3 速度場・磁場間のスケール毎のエネルギー収支バランスを求める

そこでスケール毎のエネルギー収支をさらに分解する。スケール毎の分解をする方法は一意ではないが、ここでは次のように各項がエネルギー授受のつりあいを満たすように分解する：

$$\langle \mathbf{b}_j | \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \rangle \longrightarrow \sum_k \langle \mathbf{b}_j | \nabla \times (\mathbf{u}_k \times \mathbf{b}) \rangle \quad (19)$$

$$\langle \mathbf{u}_k | (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \rangle \longrightarrow \sum_j \langle \mathbf{u}_k | (\nabla \times \mathbf{b}_j) \times \mathbf{b} \rangle \quad (20)$$

この分解において重要な点は速度場、磁場の各スケール間のエネルギー収支のバランスの式が成り立つように分解していることである：

$$\langle \mathbf{u}_j | (\nabla \times \mathbf{b}_k) \times \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}_k | \nabla \times (\mathbf{u}_j \times \mathbf{b}) \rangle = 0 \quad \text{for } \forall j, k \quad (21)$$

これによって速度場、磁場間の詳細なエネルギー収支を見て取ることができる。この分解に基づいてウェーブレットスケール毎のエネルギー収支の式を書くと次のようになる：

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_j \rangle = (\text{慣性項}) + \sum_k \langle \mathbf{u}_j | (\nabla \times \mathbf{b}_k) \times \mathbf{b} \rangle + (\text{粘性項}) + (B_0 \text{項}) \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{b}_k | \mathbf{b}_k \rangle = \sum_j \langle \mathbf{b}_k | \nabla \times (\mathbf{u}_j \times \mathbf{b}) \rangle + (\text{抵抗項}) + (B_0 \text{項}) \quad (23)$$

Figure 5 に解析した場における電磁誘導による磁場の励起 $\langle \mathbf{b}_k | \nabla \times (\mathbf{u}_j \times \mathbf{b}) \rangle$ の j, k 毎の分布を示す。この場においては、磁場モードのスケールに着目すると、モード $j = 3, 4$

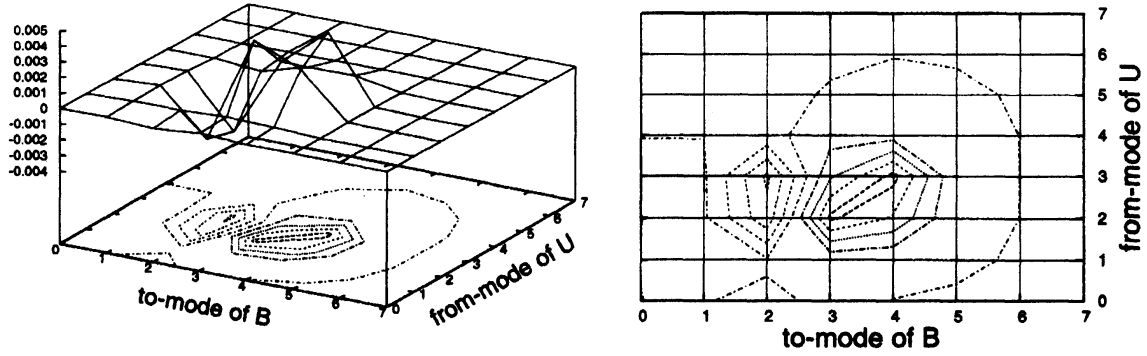


Figure 5: 電磁誘導による磁場の励起 $\langle b_k | \nabla \times (u_j \times b) \rangle$ の j, k 毎の分布。

で速度場から磁場へのエネルギー転換、モード $j = 2$ で磁場から速度場へのエネルギー転換が生じている。その一方で速度場のスケールに着目すると、いずれも速度場モード $j = 2, 3$ でピークを持っており、これは速度場のスペクトルのピーク値に対応している。つまり細かいスケールの速度場はエネルギーの収支には大した影響を与えていない。

3.4 磁場のスケール毎の寄与

エネルギー授受のつりあいを維持しながら、さらに詳細なスケール分解解析を行う：

$$\langle b_j | \nabla \times (u_k \times b) \rangle \longrightarrow \sum_m \langle b_j | \nabla \times (u_k \times b_m) \rangle \quad (24)$$

$$\langle u_k | (\nabla \times b_j) \times b \rangle \longrightarrow \sum_m \langle u_k | (\nabla \times b_j) \times b_m \rangle \quad (25)$$

この分解と磁場のスケール毎のエネルギー収支の式は次のようになる：

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle b_k | b_k \rangle = \sum_k \sum_m \langle b_k | \nabla \times (u_j \times b_m) \rangle + (\text{抵抗項}) + (B_0 \text{項}). \quad (26)$$

Figure 6 に電磁誘導による磁場の励起 $\langle b_k | \nabla \times (u_j \times b_m) \rangle$ の j, k 毎の分布の図を示す。磁場 b_k の励起に寄与している速度場 u_j は磁場のスケールによらず、やはり主に $j = 2, 3$ のモードである。これは磁場励起ダイナミクスに対する速度場の高波数側のモードの寄与がもともと小さいことを示している。一方で磁場 b_k の励起に寄与している磁場 b_m は磁場のスケール (m) から見て「1ランク大きい」スケール ($m - 1$) に集中している。これは各スケールの磁場を生み出す「磁場のタネ」が近いスケールに存在していることを示している。これは磁場が速度場の大きな構造で引き伸ばされる過程で細かいスケールの構造へと変形しているのかもしれない。

一方で速度場のエネルギー収支の方程式は次のようになる：

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle u_j | u_j \rangle = (\text{慣性項}) + \sum_k \sum_m \langle u_j | (\nabla \times b_k) \times b_m \rangle + (\text{粘性項}) + (B_0 \text{項}) \quad (27)$$

これは電磁誘導項とローレンツ項のエネルギー収支のバランス

$$\langle u_j | (\nabla \times b_k) \times b_m \rangle + \langle b_k | \nabla \times (u_j \times b_m) \rangle = 0 \quad \text{for } \forall j, k \quad (28)$$

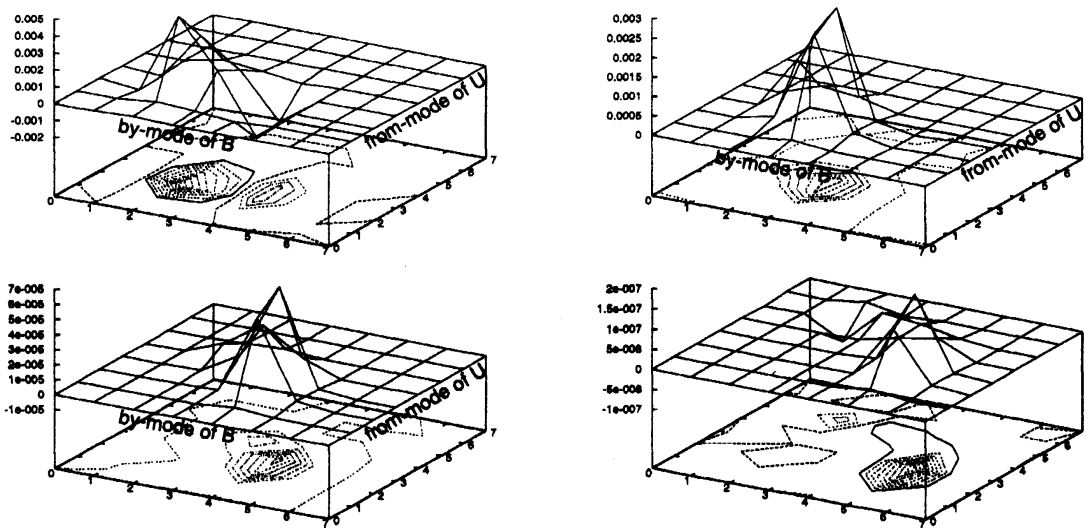


Figure 6: 電磁誘導による磁場の励起 $\langle b_k | \nabla \times (u_j \times b_m) \rangle$ の j, m 毎の分布 : 左上 : $k = 3$, 右上 : $k = 4$, 左下 : $k = 5$, 右下 : $k = 6$.

を考慮すると、Figure 6 で示した $\langle b_k | \nabla \times (u_j \times b_m) \rangle$ の値を並べなおしたものに他ならない。Figure 7 に解析結果を示す。まず u_j のスケールによらず by-mode b_m の寄与は $m = 2, 3$ が主。from-mode b_k は「局所的」すなわち $k = j - 1$ からの寄与が大きい。ところがエネルギー授受の正負を見ると、一様等方乱流における「大スケールから小スケールへの輸送」のような、典型的な傾向のようなものが見られない。

3.5 ウェーブレットの位置情報を用いた解析

本節では磁場のスケール・位置スペクトルを用いて相互作用の性格を探究する。ここでは電磁誘導の振幅は局所的な磁場の強さと相関があるかどうかを調べる。誘導方程式のスケール・位置・スペクトル毎の分解

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle b_{ki} | b_{ki} \rangle = \sum_{k, i} \underbrace{\langle b_{ki} | \nabla \times (u \times b) \rangle}_{\text{誘導項の全体}} + (\text{抵抗項}) + (B_0 \text{項}) \quad (29)$$

Figure scale location に散布図 $(\frac{1}{2} \langle b_{ki} | b_{ki} \rangle, \langle b_{ki} | \nabla \times (u \times b) \rangle)$ を示す。局所的な磁場エネルギー $\frac{1}{2} \langle b_{ji} | b_{ji} \rangle$ と電磁誘導による磁場の励起 $|\langle b_{ji} | \nabla \times (u \times b) \rangle|$ には緩やかな正の相関があり、相関の傾きはおよそ 1 である。つまりエネルギーの輸送量はその場所の磁場の振幅に比例している。

References

- [1] 宮本健郎, 『核融合のためのプラズマ物理』, (1987, 岩波書店).
- [2] Holm, D. D., Marsden, J. E., Ratiu, T. S., "The Euler-Poincaré Equations and Semidirect Products with Applications to Continuum Theories", Adv. Math. Vol.137, pp.1-81 (1998).

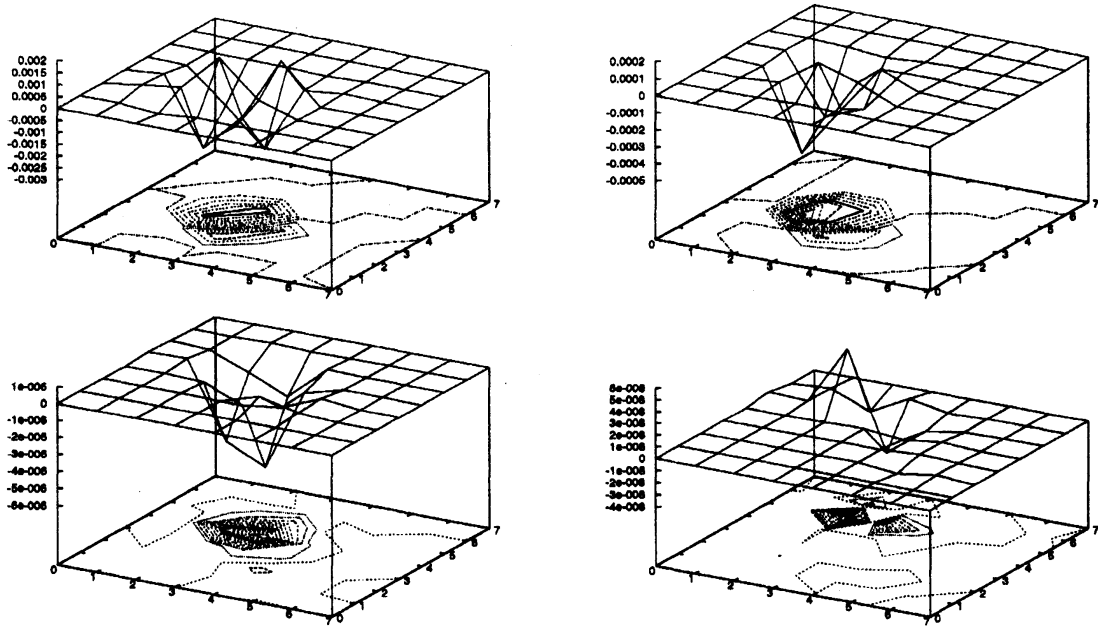


Figure 7: ローレンツ力による速度場の励起 $\langle u_j | (\nabla \times \mathbf{b}_k) \times \mathbf{b}_m \rangle$ の k, m 毎の分布左上 : $j = 3$, 右上 : $j = 4$, 左下 : $j = 5$, 右下 : $j = 6$.

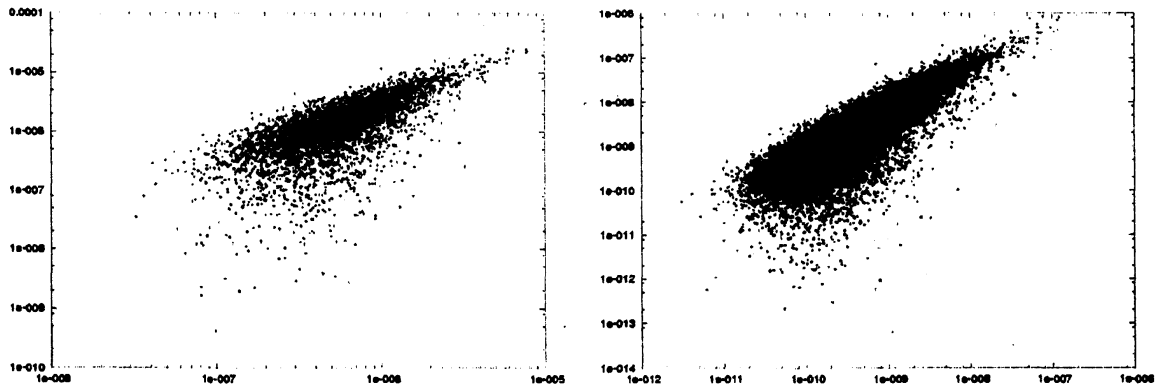


Figure 8: 磁場エネルギー $\frac{1}{2} \langle b_{ji} | b_{ji} \rangle$ と電磁誘導による磁場の励起 $|\langle b_{ji} | \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \rangle|$ の散布図。右 : $j = 4$, 左 : $j = 5$.

- [3] Alexakis, A., Mininni, P. D., Pouquet, A., "Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. I. Steady state turbulence", Phys. Rev. E, Vol.72, 046301 (2005).
- [4] Kishida, K., Araki, K., Kishiba, S., Suzuki, K., "Local or Nonlocal? Orthonormal divergence-free wavelet analysis of nonlinear interactions in turbulence", Phys. Rev. Lett., Vol.83, No.26, pp.5487-5490 (1999).