

# ある同変微分同型群の完全性について

信州大 教養 阿部孝順

## §1 序

J. Mather [3] と W. Thurston [5] に より 境界ともたない  $C^\infty$  多様体に対して,  $\text{Diff}^r(M)_0$  をコンパクトな  $C^r$  イソトピーにより  $M$  の恒等写像  $1_M$  とイソトピーな微分同型のつくる群とすると  $\text{Diff}^r(M)_0$  は完全である; 即ちその交換子群と一致することを証明~~も~~<sup>す</sup>。但しイソトピー  $H_t$  がコンパクトな  $C^r$  写像  $H_t: M \rightarrow M$  を満たすことは,  $M$  のコンパクト部分集合  $K$  が存在して,  $H_t(x) = x$  ( $\forall x \in M - K, 0 \leq t \leq 1$ ), のことであるとする。ここでは, コンパクトリー群  $G$  が  $M$  に自由かつ作用している場合に同様の問題を考えることにする。

$M$  を境界ともたない  $m$  次元  $C^\infty$  多様体とし, コンパクトリー群  $G$  が  $M$  上に自由かつ作用しているとする。  $\text{Diff}_G^r(M)_0$  をコンパクトな  $C^r$  イソトピーにより  $1_M$  と  $G$  -イソトピーな  $M$  の同変  $C^r$  微分同型のつくる群とすると

次のことが証明できる。

定理  $1 \leq r \leq \infty$ ,  $r \neq m-q+1$ ,  $m-q \geq 1$  ならば  $\text{Diff}_G^r(M)_0$  は完全である。但し  $q = \dim G$ 。

( $G = T^2$  のときは, A. Banyaga [2] の結果である)

なおこれは、福井和彦氏との共同の仕事である。

## §2 準備

$K \subset M$  のコンパクト部分集合とし,  $\text{Diff}_{G,K}^r(M)_0 \subset K \subset M$  も  $\text{Diff}_G^r(M)_0$  の元で  $K$  を含む同変  $C^r$  イソトピーにより  $1_M$  とイソトピックなもの全体の群で,  $C^r$  位相を入れておく。次の補題は任意の  $G$ -多様体に対しても成立する。

補題 1 (c.f. Palais, Smale [4] Lemma 3.1)

$\{V_i\} (i=1, \dots, n) \subset M$  の有限開被覆とする。  $N \in \text{Diff}_{G,K}^r(M)_0$  が  $1_M$  の近傍とする。このとき次の条件を満たす  $1_M$  の近傍  $N_0 \subset N$  が存在する:  $\forall f \in N_0$  に対して  $\exists f_i \in N (i=1, \dots, n)$ :

- a)  $f_i$  は  $V_i \cap K$  に含まれる同変  $C^r$  イソトピーにより  $1_M$  と  $G$ -イソトピック
- b)  $f = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$

$\text{Diff}_G^r(M)_0 = \bigcup_{K \text{ compact}} \text{Diff}_{G,K}^r(M)_0$  であるから補題 1 を用いると次のことが証明される。

系 2  $\mathbb{R}^{m+q} \times G$  を自然に  $G$  を右から作用させて  $G$ -多様体と看之ると  $\text{Diff}_G^r(\mathbb{R}^{m+q} \times G)$  が完全なことが証明される。と、 $\text{Diff}_G^r(M)$  も完全なことが証明される。

系 2 より定理の証明は局所的な問題に還元される。  $U = \mathbb{R}^{m+q}$ ,  $\pi: U \times G \rightarrow U$  を自然な射影とする。  $P: \text{Diff}_G^r(U \times G)_0 \rightarrow \text{Diff}^r(U)_0$  を  $P(h)(x) = \pi(h(x, 1))$  ( $h \in \text{Diff}_G^r(U \times G)_0$ ,  $x \in U$ ) とする。このとき  $1 \rightarrow \text{Ker } P \rightarrow \text{Diff}_G^r(U \times G)_0 \rightarrow \text{Diff}^r(U)_0 \rightarrow 1$  は群の完全列である。  $G_0$  は群  $G$  の単位元の連結成分とする。  $f: U \rightarrow G_0$  に対して  $\text{supp } f = \overline{f^{-1}(G_0 - \{1\})}$  とする。  $C^r(U, G_0)_0 \equiv \{f: U \rightarrow G_0 \mid f \text{ 字像; } f \text{ はコンパクトなる } U \text{ 上の } C^r \text{ 写像で零字像とサポート } \}$  として  $C^r$  位相を入れる。

補題 3  $L: \text{Ker } P \rightarrow C^r(U, G_0)_0$  を次の式を満たすように定義する:  $h(x, 1) = (x, L(h)(x))$ ,  $h \in \text{Ker } P$ ,  $x \in U$ . このとき  $L$  は群の同型写像である。

次の補題は定理を証明するに必要である。

補題 4  $\delta > 0$ ,  $B_\delta$  は  $0$  を中心とする  $\mathbb{R}^n$  における半径  $\delta$  の開円板とする。  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \geq 1$ ) は零字像に  $C^1$  位相で十分近い  $C^r$  関数で  $B_\delta$  から  $\epsilon$  以上離れているとする。  $\epsilon$

$\alpha$  と  $\varepsilon$   $C^\infty$  関数  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $\text{supp}(v) \subset B_{\delta'} (\delta' = 2\sqrt{3}\delta)$  ,  
 $|v(x)| \leq 3\delta \quad (x \in \mathbb{R}^n)$  と  $B_\delta$  に  $\varepsilon$  もつ  $C^r$  イソトピー  $(\varepsilon, 1_{\mathbb{R}^n})$   
 と イソトピー  $\varphi$  は  $C^r$  微分同型  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在して  $u$   
 $= v \circ \varphi - v$  である。

[証明]  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  と  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + u(x), x_2, \dots, x_n)$   
 と定義すると級数より  $u$  は  $0$  の近傍で  $C^r$  微分同型で  
 ある。  $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (0 \leq t \leq 1)$  と  $\varphi_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t u(x),$   
 $x_2, \dots, x_n)$  と定義すると  $\varphi_t$  は  $B_\delta$  に  $\varepsilon$  もつ イソトピーで  
 $\varphi_0 = 1_{\mathbb{R}^n}$ ,  $\varphi_1 = \varphi$ 。  $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $\xi(x) = x \quad (|x| \leq 2\delta)$  ,  
 $|\xi(x)| \leq 3\delta \quad (2\delta \leq |x| \leq 3\delta)$  ,  $\xi(x) = 0 \quad (|x| \geq 3\delta)$  とする。

$\mu: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $\mu(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1 \quad (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq \delta^2)$  ,  $\mu(x_1,$   
 $\dots, x_{n-1}) = 0 \quad (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \geq 3\delta^2)$  ,  $|\mu(x)| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}^{n-1})$  と  
 みる  $C^\infty$  関数とする。  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  と  $v(x_1, \dots, x_n) = \xi(x_1)$   
 $\cdot \mu(x_2, \dots, x_n)$  とすると  $v$  は  $B_{\delta'}$  に  $\varepsilon$  もつ  $C^\infty$  関数で  $u =$   
 $v \circ \varphi - v$  である。

註: A Banyaga は [1] で上の補題を  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (n, m$   
 $\geq 1)$  に対して示しているが、証明が正しい。

$L(G_0)$  は  $G_0$  のリー環とし  $\{X_1, \dots, X_q\} \in L(G_0)$  の基底とする。  
 $\Phi: L(G_0) \rightarrow G_0$  と  $\Phi(\sum_{i=1}^q a_i X_i) = (\exp a_1 X_1) \cdots (\exp a_q X_q)$  とす  
 ると  $\Phi$  は  $0$  の  $\varepsilon$ -近傍  $V$  に微分同型である。  $W = \Phi(V)$  と

おくと  $W$  は  $1$  の近傍である.  $e: U \rightarrow W$   $\varepsilon$   $e(x)=1$  ( $\forall x \in U$ )  
 とすると次の補題が成立する。

補題 5  $f: U \rightarrow W$   $\varepsilon$   $C^r$  写像で  $\text{supp } f$  が  $U$  にあつ  
 るある  $\delta$ -同板 ( $3\delta < \varepsilon$ ) に含まれかつ  $C^1$  位相で  $\varepsilon$  に十分  
 近いものとする。このとき  $f_i \in C^r(U, G_0)$ ,  $\varphi_i \in \text{Diff}^r(U)$   
 が存在し ( $i=1, \dots, n$ ),  $f = (f_1^{-1} \circ (f_1 \circ \varphi_1)) \cdots (f_q^{-1} \circ (f_q \circ \varphi_q))$   $\varepsilon$   
 みたす。

[言証明]  $\tilde{f} = \Phi^{-1} \circ f$  とおくと  $C^r$  写像  $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i$   
 $= 1, \dots, q$ , が存在して  $\tilde{f}(x) = a_1(x)X_1 + \cdots + a_q(x)X_q$  ( $x \in U$ )  $\varepsilon$   
 みたす。補題4より,  $C^r$  写像  $v_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $\text{supp } v_i$  は  $U$   
 コンパクトで  $|v_i(x)| \leq 3\delta$  ( $x \in U$ ) と  $\varphi_i \in \text{Diff}^r(U)$  ( $i=1, \dots, q$ )  
 が存在して  $a_i = v_i \circ \varphi_i - v_i$   $\varepsilon$  みたす。  $f_i: U \rightarrow W$   $\varepsilon$   $f_i(x)$   
 $= \exp(v_i(x)X_i)$  ( $x \in U$ ) とすると  $f_i$  はコンパクトな区間を  
 $C^r$  写像で  $\varepsilon$   $f_i \in C^r(U, G_0)$ 。  $\varepsilon$   $f(x) = (f_1(x)^{-1} \cdot f_1(\varphi_1(x))) \cdots$   
 $(f_q(x)^{-1} \cdot f_q(\varphi_q(x)))$  ( $x \in U$ )  $\varepsilon$  みたす。

$\varphi \in \text{Diff}^r(U)$ 。  $\kappa$  対して  $\tilde{\varphi} \in \text{Diff}_0^r(U \times G)$   $\varepsilon$   $\tilde{\varphi}(x, g) = (\varphi(x), g)$   
 $, x \in U, g \in G$  と定義する

補題 6  $h \in \text{Ker } P$ ,  $f = L(h)$  とする。  $\varphi \in \text{Diff}^r(U)$ 。  $\kappa$   
 対して  $L(h^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi) = f^{-1} \cdot (f \circ \varphi)$   $\varepsilon$  みたす。

§3 定理の証明と系

命題7  $\text{Ker } P = [\text{Ker } P, \text{Diff}^r(U \times G)_0]$

[証明]  $\text{Ker } P_0 \ni h$  に対して  $f = L(h)$  とおくと補題1と同様の証明により  $f$  は次のように表わすことができる:  $\exists f_i: U \rightarrow W$   $C^r$  写像,  $i=1, \dots, l$ ,  $\text{supp } f_i$  は  $U$  のある  $\delta$ -円板に含まれかつ  $f_i$  は  $C^2$  写像で  $\epsilon$  に十分近く  $f = f_l \circ f_{l-1} \circ \dots \circ f_1$  と表わす。従って  $f$  は補題5で表わした  $f_i$  の積で表わせる。従って補題5より  $\exists f_{ij} \in C^r(U, G_i)$ ,  $\exists \varphi_{ij} \in \text{Diff}^r(U)$ ,  $(i=1, \dots, l, j=1, \dots, q)$  で  $f_i = (f_{i1}^{-1} \circ (f_{i1} \circ \varphi_{i1})) \circ \dots \circ (f_{iq}^{-1} \circ (f_{iq} \circ \varphi_{iq}))$  と表わす。  
 補題3より  $L(h_{ij}) = f_{ij}$  と表わした  $h_{ij} \in \text{Ker } P$  が存在する。  
 補題6より  $L(h) = f = ((f_{11}^{-1} \circ (f_{11} \circ \varphi_{11})) \circ (f_{12}^{-1} \circ (f_{12} \circ \varphi_{12})) \circ \dots \circ (f_{1q}^{-1} \circ (f_{1q} \circ \varphi_{1q}))) \circ ((f_{21}^{-1} \circ (f_{21} \circ \varphi_{21})) \circ (f_{22}^{-1} \circ (f_{22} \circ \varphi_{22})) \circ \dots \circ (f_{2q}^{-1} \circ (f_{2q} \circ \varphi_{2q}))) \circ \dots \circ ((f_{l1}^{-1} \circ (f_{l1} \circ \varphi_{l1})) \circ (f_{l2}^{-1} \circ (f_{l2} \circ \varphi_{l2})) \circ \dots \circ (f_{lq}^{-1} \circ (f_{lq} \circ \varphi_{lq})))$ 。  
 $L$  は同型写像だから  $h \in [\text{Ker } P, \text{Diff}_G^r(U \times G)_0]$ 。

定理の証明 系2より  $M = U \times G$  のとき  $H_1(\text{Diff}_G^r(U \times G)_0) = 0$  を示せばよい。  
 $1 \rightarrow \text{Ker } P \rightarrow \text{Diff}_G^r(U \times G)_0 \rightarrow \text{Diff}^r(U)_0 \rightarrow 1$  は群の完全列だから  $\text{Ker } P / [\text{Ker } P, \text{Diff}_G^r(U \times G)_0] \rightarrow H_1(\text{Diff}_G^r(U \times G)_0) \rightarrow H_1(\text{Diff}^r(U)_0) \rightarrow 0$  は完全列である。J. Mather [3] と W. Thurston [5] より  $H_1(\text{Diff}^r(U)_0) = 0$  であるから、命題7より  $H_1(\text{Diff}_G^r(U \times G)_0) = 0$ 。

系  $M$  を境界をもたない可微分な  $m$  次元  $G$ -多様体で、 $\dim M \geq 1$  の軌道型  $\Sigma$  をつとずる。  $1 \leq r \leq \infty$ ,  $r \neq \dim M_G + 1$ ,  $\dim M_G \geq 1$  をみたすならば  $\text{Diff}_G^r(M)_0$  は完全である。

[証明]  $H$  を  $M$  の一点の等化部分群とし  $N(H)$  を  $H$  の  $G$  に  
おける正規化群とする。  $M^H = \{x \in M; h \cdot x = x (\forall h \in H)\}$  と  
おく。 このとき  $\text{Diff}_G^r(M)_0$  は群として  $\text{Diff}_{N(H)}^r(M^H)_0$  と同型  
である。  $M^H$  は自由な  $N(H)/H$ -多様体だから、定理より  $\text{Diff}_{N(H)}^r(M^H)_0$   
( $M^H$ ) は完全である。

### 参考文献

- [1] A. Banyaga : On the structure of the group of  
equivariant diffeomorphisms, *Topology* 16, 279-283 (1977)
- [2] A. Banyaga : Sur les groupe des automorphismes d'un  
 $T^n$ -fibré principal. *C.R. Acad. Paris*, 284,  
Série A 619-622 (1977)
- [3] J. N. Mather : Commutators of diffeomorphisms I and  
II. *Comment. Math. Helv.*, 49, 512-528 (1974)  
and 50, 33-40 (1975)
- [4] J. Palis and S. Smale : Structural stability theorems.  
*Global Analysis (Symp. Pure. Math. XIV)* Amer.  
Math. Soc., Providence, R.I., 223-231 (1970).

[5] W. Thurston : Foliations and group of diffeomorphisms,  
Bull. Amer. Math. Soc., 80, 304-307 (1974)