

# Magnus expansions and multiple zeta values

九州大学 小谷久寿

Hisatoshi Kodani

Kyushu University

平成 28 年 9 月 30 日

## 1 Introduction

Ihara は 1986 年に、数論と組紐群の理論との間の類似性を見出し、特に組紐群の Artin 表現の類似とみなされる Galois 表現の数論、すなわち、有理数体  $\mathbb{Q}$  の絶対 Galois 群  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  の射影直線  $\mathbb{P}^1$  引く  $\{0, 1, \infty\}$  の数論的基本群への Galois 作用の研究を創始した ([Ih1]). そこでは 1 次元被約 Gassner 表現の Galois 類似を用いて、Jacobi 和を補間する普遍的なべき級数 (伊原べき級数) が構成されている (cf. [Ih2], [KMT]). この Galois 表現の理論の de Rham バージョンが多重ゼータ値や Drinfel'd associator ([D]) の世界であるので、本稿では、上記の類似の variant である次の問題について考察することにしよう：

| 数論                        | 位相幾何学 |
|---------------------------|-------|
| (degenerated) associators | ?     |
| 多重ゼータ値                    | ?     |

本稿では、Massuyeau により導入された special expansion ([Ma]) を用いて上記の類似を構成する。特に、special expansion として Kontsevich 不変量から定まるものを考えると不変量を構成する際に associator を用いることから、多重ゼータ値の位相幾何類似が多重ゼータ値を用いて表されることを具体例を交えて紹介する。

## 2 純組紐群の Artin 表現

### 2.1 Artin 表現

ここでは、純組紐群と Artin 表現と呼ばれる自由群の自己同型群への表現について復習する。詳しくは、[B] を参照せよ。

$PB_n$  を  $n$  本糸純組紐群とする。  $PB_n$  は  $A_{ij} = A_{ji}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) で生成され関係式

$$A_{rs}A_{ij}A_{rs}^{-1} = \begin{cases} A_{ij} & (\text{if } s < i \text{ or } i < r < s < j), \\ A_{rj}^{-1}A_{ij}A_{rj} & (\text{if } s = i), \\ A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{sj}A_{rj} & (\text{if } i = r < s < j), \\ A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{rj}A_{sj}A_{ij}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}A_{sj}A_{rj} & (\text{if } r < i < s < j). \end{cases}$$

を満たす群であることが知られている。

備考 2.1.1.  $D_n := D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  を 2 次元穴開き円盤としたとき、純組紐群  $PB_n$  は  $\{p_1, \dots, p_n\}$  と境界  $\partial D_n$  を各点ごとに固定する  $D_n$  の向きを保つ自己同相写像のイソトピー類のなす群 (写像類群) と同一視できる。

備考 2.1.1 より、純組紐群  $PB_n$  は写像類群として穴開き円盤の基本群  $\pi_1(D_n) \cong F_n$  に自然に作用する。ここで、階数  $n$  の自由群  $F_n$  の生成元  $x_i$  は  $p_i$  を時計回りに囲む小さなループのイソトピー類と同一視される。したがって、準同型写像

$$\text{Art} : PB_n \longrightarrow \text{Aut}_0(F_n)$$

を得る。ここで、 $\text{Aut}_0(F_n)$  は生成元  $x_i$  をその共役に写し、境界を代表するループ  $x_1 \cdots x_n$  を固定するような自己同型写像からなる  $\text{Aut}(F_n)$  の部分群である。

### 2.2 Milnor 不変量

さて、各  $L \in PB_n$  に対して、 $\text{Art}(L)(x_i) = y_i(L)x_iy_i(L)^{-1}$  を満たし  $y_i(L)$  のアーベル化の  $[x_i] \in F_n^{ab}$  の係数が 0 になるような  $y_1(L), \dots, y_n(L)$  が一意的に存在するので、 $\text{Art}(L)$  は組  $(y_1(L), \dots, y_n(L))$  により決定されることに注意する。この  $y_i(L)$  を  $L$  の  $i$ -th ロンジチュードと呼ぶ。<sup>1</sup>

$\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  を  $\mathbb{Z}$  上の  $n$  変数形式的べき級数環としたとき、Magnus 埋入  $\theta : F_n \hookrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  を対応  $x_i \mapsto 1 + X_i$  により定めると、各  $y_i(L)$  は  $L$  を閉じて得られる絡み目の  $i$ -th ロンジチュードとみなすことができるので、

$$\theta(y_i(L)) = 1 + \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} \mu(i_1 \cdots i_m i) X_{i_1} \cdots X_{i_m}$$

<sup>1</sup>ここでは、ロンジチュードを基本群の生成元で表した語を簡略化してそう呼んでいる。

の係数  $\mu(i_1 \cdots i_m i)$  により  $L$  の Milnor 不変量が定まる ([Mi1], [Mi2]). 実際は,  $L$  を閉じて得られる絡み目の Milnor 不変量を得るためにはある  $\mathbb{Z}$  のイデアルで割る必要があることに注意せよ.

### 3 Malcev 完備化と special expansions

この節では, 自由群の Malcev 完備化と Massuyeau により導入された special expansion について復習する.

#### 3.1 Malcev 完備化

$\mathbb{K}$  を標数 0 の体とする.  $\mathbb{K}[F_n]$  を自由群  $F_n$  の  $\mathbb{K}$  上の群環とし,  $\epsilon: \mathbb{K}[F_n] \rightarrow \mathbb{K}$  を添加写像とする.  $I := \text{Ker} \epsilon$  を添加イデアルとする.  $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$  を  $\mathbb{K}[F_n]$  の  $I$ -進完備化とする. このとき,  $\mathbb{K}[F_n]$  上の余積は  $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$  上の余積  $\Delta$  を誘導し,  $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$  は Hopf 代数となる.  $I$  進完備化  $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$  は  $\hat{I}_j := \varprojlim_{k \geq j} I^j / I^k$  ( $j \geq 0$ ) によりフィルトレーションが入ることに注意する.

$M(F_n)$  を  $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$  の群的な元からなる部分群とし,  $m(F_n)$  を  $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$  の Lie 的な元からなる Lie 代数とする.  $M(F_n)$  と  $m(F_n)$  にはフィルトレーションが誘導され, また,  $\exp$  と  $\log$  により  $M(F_n)$  と  $m(F_n)$  の間には 1 対 1 の対応があることに注意する.

#### 3.2 Special expansions

$F_n$  を  $x_1, \dots, x_n$  で生成される階数  $n$  の自由群とする. このとき,  $H := F_n^{\text{ab}} \otimes \mathbb{K}$  と記す.  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $X_i := [x_i] \otimes_{\mathbb{Z}} 1 \in H$  とおく.  $T(H)$  を  $H$  のテンソル代数とし,  $\hat{T}(H)$  をその次数に関する完備化とする, すなわち,  $T(H) := \bigoplus_{k \geq 0} H^{\otimes k}$ ,  $\hat{T}(H) := \prod_{k \geq 0} H^{\otimes k}$  とする. このとき,  $\hat{T}(H)$  は  $\mathbb{K}$  上の  $n$  変数形式的べき級数環  $\mathbb{K}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  と同一視されることに注意する.  $\mathcal{L}(H)$  を  $H$  で生成される次数付き自由 Lie 代数の次数に関する完備化とする. このとき, special expansion は次で定義される.

**Definition 3.2.1.** ([Ma]) 同型写像  $\theta: \widehat{\mathbb{K}[F_n]} \xrightarrow{\sim} \hat{T}(H)$  が次の条件 (1) と (2) を満たすとき, special expansion と呼ぶ:

- (1)  $i = 1, \dots, n$  に対して, ある  $U_i \in \exp(\mathcal{L}(H))$  が存在して  $\theta(x_i) = U_i \exp(X_i) U_i^{-1}$  と書ける.
- (2)  $\theta(x_1 \cdots x_n) = \exp(X_1 + \cdots + X_n)$ .

**備考 3.2.2.**  $\theta: \widehat{\mathbb{K}[F_n]} \xrightarrow{\sim} \hat{T}(H)$  を special expansion としたとき,  $\theta$  を  $m(F_n)$  に制限することにより, フィルトレーションを保つ完備 Lie 代数の同型

$$\theta: m(F_n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(H)$$

を得,  $M(F_n)$  に制限することにより, フィルトレーションを保つ群同型

$$\theta : M(F_n) \xrightarrow{\sim} \exp(\mathcal{L}(H))$$

を得る.

**備考 3.2.3.** 純組紐群  $PB_{n+1}$  の半直積分解  $PB_{n+1} = F_n \rtimes PB_n$  を通して,  $PB_{n+1}$  の Kontsevich 不変量  $Z$  を自由部分群  $F_n$  に制限することにより, special expansion  $\theta^Z$  を構成できることが知られている. このようにして定まる special expansion は Drinfel'd associator により記述される (cf. [HM],[AET],[Ma]).

## 4 純組紐群の special Artin 表現と special Milnor value

### 4.1 Special Artin 表現

この節では, special expansion を通して, 純組紐群の完備次数付き自由 Lie 代数の自己同型群への表現を構成する.

任意の  $\psi \in \text{Aut}(F_n)$  は完備 Hopf 代数  $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$  の自己同型  $\hat{\psi}$  を誘導する. これを  $M(F_n)$  に制限することにより同型写像  $M(\psi) : M(F_n) \rightarrow M(F_n)$  を得る. Artin 表現  $\text{Art}$  と  $M$  を合成することにより準同型

$$M(\text{Art}) : PB_n \longrightarrow \text{Aut}(M(F_n)); \quad L \mapsto M(\text{Art}(L))$$

を得る.

$\theta : \widehat{\mathbb{K}[F_n]} \xrightarrow{\sim} \widehat{T}(H)$  を special expansion としたとき, 備考 3.2.2 に注意すると, 任意の  $\psi \in \text{Aut}(M(F_n))$  に対して自己同型  $\theta^*(\psi) := \theta \circ \psi \circ \theta^{-1} \in \text{Aut}(\exp(\mathcal{L}(H)))$  が定まる. したがって, 準同型

$$\text{Art}^\theta : PB_n \longrightarrow \text{Aut}(\exp(\mathcal{L}(H))); \quad L \mapsto \theta^*(M(\text{Art}(L)))$$

を得る. このとき, 次が成り立つ.

**Proposition 4.1.1.** ([K])  $\theta$  を special expansion とする. 任意の  $L \in PB_n$  に対して,

$$\text{Art}^\theta(L)(\exp(X_i)) = (U_i^{-1}\theta(y_i(L))U_i)\exp(X_i)(U_i^{-1}\theta(y_i(L))U_i)^{-1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\text{Art}^\theta(L)(\exp(X_1 + \cdots + X_n)) = \exp(X_1 + \cdots + X_n)$$

が成り立つ. ここで,  $y_i(L)$  は  $i$ -th ロンジチュードであり,  $U_i \in \exp(\mathcal{L}(H))$  は  $\theta(x_i) = U_i \exp(X_i) U_i^{-1}$  で与えられる.

したがって,  $L \in PB_n$  に対して,  $\text{Art}^\theta(L)(\exp(X_i)) = \exp(Y_i(L)) \exp(X_i) \exp(Y_i(L))^{-1}$  とおくと,  $\text{Art}^\theta(L)$  は  $n$  個のべき級数の組  $(Y_1(L), \dots, Y_n(L))$  により決定される.

## 4.2 Special Milnor value

この節では、前節で構成した special Artin 表現を用いて、associator との類似を見る。associator については [F2] を参照せよ。

$GRT_1(\mathbb{K})$  を degenerated associator のなす群とする。このとき、 $(0, U) \in GRT_1(\mathbb{K})$  を自己同型写像  $\psi_{(0,U)}(\exp(X_1)) = \exp(X_1), \psi_{(0,U)}(\exp(X_2)) = U^{-1} \exp(X_2) U$  に対応させることにより、 $GRT_1(\mathbb{K})$  は  $\text{Aut}(\exp(\mathcal{L}(H)))$  ( $n = 2$ ) の部分群とみなすことができる。ここで、適切に基底を取り替えることにより、 $\text{Aut}(\exp(\mathcal{L}(H)))$  の special automorphism<sup>2</sup> のなす群の部分群に写すことができる。

したがって、 $\text{Art}^\theta(PB_n)$  を  $GRT_1(\mathbb{K})$  の類似とみなし、 $\exp(Y_i(L))$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を associator の類似とみなそう。 $\theta^Z$  を備考 3.2.3 における Drinfel'd associator  $\Phi$  を用いて構成される special expansion としたとき、 $L \in PB_n$  に対して

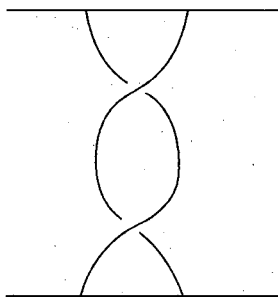
$$\exp(Y_i(L)) = 1 + \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} \mu^\Phi(i_1 \cdots i_m i) X_{i_1} \cdots X_{i_m}$$

の係数  $\mu^\Phi(i_1 \cdots i_m i)$  を多重指標  $(i_1 \cdots i_m i)$  と  $\Phi$  に関する  $L$  の special Milnor value と呼ぶことにする。ただし、これは実質的には  $L$  の Kontsevich 不変量の係数を求めていることと同値であることに注意する。また、基底と  $q$  構造の取り方にも依存していることにも注意する。

KZ 方程式から定まる Drinfel'd associator  $\Phi_{KZ}$  の係数が多重ゼータ値であることより ([LM], [F1])、本稿では  $L \in PB_n$  と多重指標  $I$  に対して  $\mu^\Phi(I)$  を多重ゼータ値の位相幾何類似とみなそう。<sup>3</sup>

最後に、この  $\mu^\Phi(I)$  を  $\Phi = \Phi_{KZ}$  の場合の具体的な純組紐に対する計算例を紹介する。

例 4.2.1.  $L_H \in PB_n$  を以下の純組紐とする：



<sup>2</sup>ここでは、 $\varphi \in \text{Aut}(\exp(\mathcal{L}(H)))$  が  $\varphi(\exp(X_i)) = U_i \exp(X_i) U_i^{-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $\varphi(\exp(X_1 + \cdots + X_n)) = \exp(X_1 + \cdots + X_n)$  を満たすとき special automorphism と呼んでいる。ここで、 $U_i \in \exp(\mathcal{L}(H))$

<sup>3</sup>ただし、実際は  $\Phi_{KZ}$  は  $GRT_1(\mathbb{C})$  の元ではないことに注意しておく。

このとき、ロンジチュードは  $y_1(L_H) = x_1 x_2 x_1^{-1}$ ,  $y_2(L_H) = x_1$  で与えられ、 $\Phi_{KZ}$  から定まる special expansion  $\theta^Z$  は生成元  $x_1, x_2$  に対して、

$$\begin{aligned}\theta^Z(x_1) &= (\Phi_{KZ}(-X_1 - X_2, X_2)^{-1} \exp(-\frac{1}{2}X_2) \Phi_{KZ}(-X_1 - X_2, X_2)) \exp(X_1) \\ &\quad \cdot (\Phi_{KZ}(-X_1 - X_2, X_2)^{-1} \exp(-\frac{1}{2}X_2) \Phi_{KZ}(-X_1 - X_2, X_2))^{-1} \\ \theta^Z(x_2) &= \Phi_{KZ}(-X_1 - X_2, X_2)^{-1} \exp(X_2) \Phi_{KZ}(-X_1 - X_2, X_2)\end{aligned}$$

と計算されるので<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}Y_1(L_H) &= X_2 + [X_1, X_2] + \frac{1}{2}[X_1, [X_1, X_2]] + \frac{\zeta(2)}{2(2\pi i)^2}[[[X_1, X_2], X_2], X_2] \\ &\quad + \frac{\zeta(2)}{(2\pi i)^2}[[[X_1, X_2], X_2], X_1] + \frac{1}{6}[X_1, [X_1, [X_1, X_2]]] \\ &\quad + \frac{\zeta(2)}{2(2\pi i)^2}[[[X_1, X_2], X_2], X_2] - \frac{\zeta(3)}{(2\pi i)^3}[[X_1, [X_1, X_2]], X_2] + (\text{次数 5 以上の項}), \\ Y_2(L_H) &= X_1 - \frac{1}{2}[X_2, X_1] + \frac{1}{8}[X_2, [X_2, X_1]] + \frac{\zeta(2)}{(2\pi i)^2}[[X_1, X_2], X_1] \\ &\quad - \frac{\zeta(3)}{(2\pi i)^3}[[X_1, [X_1, X_2]], X_1] + (\text{次数 5 以上の項})\end{aligned}$$

を得る。

このように、純組紐の special Milnor value は多重ゼータ値を用いて表示されることがわかる。

## 参考文献

- [AET] A. Alekseev, B. Enriquez, C. Torossian, *Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **112** (2010), 143–189.
- [B] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of Mathematics Studies, **82**. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.
- [D] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Algebra i Analiz **1** (1989) 114–148 (in Russian), English translation in Leningrad Math. J. **1** (1990) 1419–1457.
- [F1] H. Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Vol **39**. no 4. (2003). 695–720.

<sup>4</sup>ここで、Kontsevich 不変量は純組紐の上下に左寄せの  $q$  構造  $(\cdots((++)+)\cdots)$  を入れて定義していることに注意する。

- [F2] 古庄英和著; 小谷久寿, 新甫洋史記述, 結び目と Grothendieck-Teichmüller 群, MI lecture note series, vol. **68**, 2016.
- [HM] N. Habegger, G. Masbaum, *The Kontsevich integral and Milnor's invariants*, Topology 39 (2000), no. **6**, 1253–1289.
- [Ih1] Y. Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 43–106.
- [Ih2] Y. Ihara, *Arithmetic analogues of braid groups and Galois representations*, Braids (Santa Cruz, CA, 1986), 245–257, Contemp. Math., **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [K] H. Kodani, *Group-like expansions and invariants of string links*, arXiv:1604.03213.
- [KMT] H. Kodani, M. Morishita, Y. Terashima, *Arithmetic topology in Ihara theory*, arXiv:1608.07926, 2016.
- [LM] T. T. Q. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J., **142** (1996), 39–65.
- [Ma] G. Massuyeau, *Formal descriptions of Turaev's loop operations*, arXiv:1511.03974.
- [Mil1] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59**, 1954, 177–195.
- [Mi2] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957, 280–306.
- [Q] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2), **90**, 205–295, 1969.