

Chow群の filtration について

名大・理 斎藤 博

§ 0. Introduction.

0.1. 以下、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数多様体を考え、 Y 上の (代数的) cycle を問題にする。余次元 > 1 の cycle については、1930年代の Severi の先駆的な研究を受けて、Mumford は、 $pg > 0$ の非特異代数曲面 Y の 0-cycle のつくる Chow 群が、無限次元であることを示し、Roitman は Y を非特異射影多様体の 0-cycle の場合に一般化した。一方 Bloch は、Chow 群の K 理論的記述に示唆されて上記の逆、即ち $pg = 0$ の代数曲面の Chow 群は有限次元であるかと予想した [2]。更に Bloch [5] の中で この予想を含む次の様な予想を提出した。

0.2. 非特異代数多様体 V を考え、 $CH_0(V)$ で Y の 0-cycle の Chow 群を表わす。0-cycle に、 Y の次数を対応させる写像の核を $'F^1 CH_0(V)$ と記す：

$$0.2.1. \quad 'F^1 CH_0(V) := \text{Ker} (CH_0(V) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}).$$

(§ 2 以降に出てくる $'F^1 CH_0(V)$ と区別する為、一応 $'F^1 CH_0(V)$ と書く)。

$'F^1 H_0(V)$ から V の Albanese 多様体への標準写像 $\alpha: 'F^1 H_0(V) \rightarrow \text{Alb}(V)$ の核を $'F^2 H_0(V)$ としよう:

$$0.2.2. \quad 'F^2 H_0(V) := \ker('F^1 H_0(V) \xrightarrow{\alpha} \text{Alb}(V)).$$

こうして, $H_0(V) := 'F^0 H_0(V) \supset 'F^1 H_0(V) \supset 'F^2 H_0(V)$ を得るが, これが更に続いて,

$$0.2.3. \quad H_0(V) = 'F^0 H_0(V) \supset 'F^1 H_0(V) \supset 'F^2 H_0(V) \supset \cdots \supset 'F^l H_0(V) \supset 'F^{l+1} H_0(V) \supset \cdots$$

という $H_0(V)$ の filtration があり 下記のような性質を持つというのが Block の予想である。 $\dim V = m$ とすると 恐らく

$$0.2.4. \quad 'F^{m+1} H_0(V) = 0$$

であり $'F^i H_0(V)$ は代数的対応に対して関手的で, 従って, 曲面 X と, $z \in H^2(V \times X)$ (CHP で余次元 p の cycle のつくる Chow 群を表わす) に対して,

$$[z]: \text{gr}_F^i H_0(V) \longrightarrow \text{gr}_F^i H_0(X)$$

を得る, ここで $\text{gr}_F^i H_0(V) = \bigoplus_{\ell} \text{gr}_F^{\ell} H_0(V)$, $\text{gr}_F^{\ell} H_0(V) = 'F^{\ell} H_0(V) / 'F^{\ell+1} H_0(V)$.

予想 0.3 (Block [5], I.1.8). 写像 $[z]$ は, z の cohomology 類 $\{z\} \in H^4(V \times X, \mathbb{Q})$ にしか 依らない。

0.3.1. $\ell > 2$ に対して, Abel 多様体, 曲線の種に対して以外 $'F^{\ell} H_0(V)$ として, 何かくるべきか余り感覚を持っていないと Block は述べている。Block 自身は明示的に言っていないが, V が Abel 多様体の場合には $\gamma_1 * \cdots * \gamma_{\ell}$ ($\gamma_i \in 'F^1 H_0(V)$; $*$ は

(Chow環の Poincaré 種), V が曲線の種 $C_1 \times \cdots \times C_m$ の場合には,
 $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m$ ($\gamma_i \in H_0(C_i)$, γ_i の中 2 個以上が次数 0) で, $\mathbb{Z}$ 生成
 した $H_0(V)$ の部分群が念頭にありたいと想像される. この予
 想に対しては, 実は $0, 2, 4$ の $H^{m+1}(H_0(V)) = 0$ の部分が本質的であ
 ると筆者には思われる (cf. 3.11)。

更に Bloch は次のように予想している.

Metaconjecture 0.4 ([5], 1. 1.10). 重さ 2 の偏極可能 Hodge
 構造からなるある圏と, $gr_{\mathbb{Z}}^2 H_0(V)$ からつくられた圏が,
 圏同値になる。

例 0.5. この metaconjecture の感じを掴んでいたたく為には, 重さ 1
 の場合にどうなっているかを思い出す. 先づ $Hdg(1)$ で,
 重さ 1 の $\mathbb{Q}$ との effective な偏極可能 Hodge 構造全体のつくる
 (abel) 圏を表わす (Hodge 構造 H が, effective とは, $H^{p,q} = 0$
 for $p < 0$ or $q < 0$ のこと)。

Abel 多様体 (up to isogeny) のつくる圏は $Hdg(1)$ と次のように
 圏 (反) 同値になる:

$$(\text{Abelian varieties, up to isogeny})^0 \rightarrow Hdg(1), \quad A \mapsto H^1(A, \mathbb{Q}).$$

多様体 V に対して $Alb V$ は Abel 多様体で, $\alpha: H^1(V, \mathbb{Q}) \rightarrow Alb V$ は全射故

$$gr_{\mathbb{Z}}^1 H_0(V) \xrightarrow{\sim} Alb V.$$

更に, V' も多様体の時, $z \in H^m(V' \times V)$ ($m = \dim V$) に対して z が '定数'

する代数的対応 $[2]: \mathrm{gr}_F^1(\mathrm{H}_0(V')) \rightarrow \mathrm{gr}_F^1(\mathrm{H}_0(V))$ は同一視 $\mathrm{gr}_F^1(\mathrm{H}_0(V)) \cong \mathrm{Alb} V$ により Abel 多様体の射であり、従って、圏同値

$$(\mathrm{gr}_F^1(\mathrm{H}_0(V)), \mathrm{alg. \, corresp.} \circ \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} (\text{abelian varieties, up to isogeny})$$

が得られる。これを忘れないで、圏の(反)同値

$$(\mathrm{gr}_F^1(\mathrm{H}_0(V)), \mathrm{alg. \, corresp.} \circ \mathbb{Q})^\circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hdg}(1), \quad \mathrm{gr}_F^1(\mathrm{H}_0(V)) \mapsto \mathrm{H}^1(V, \mathbb{Q})$$

がある。上の metaconjecture は、これと類似のことが、重さ 2 の Hodge 構造についても成立するというものである。

本稿の目的は、この Bloch の metaconjecture に "evidence" を与えることである。初めに §1 で、必要となる Hodge 構造がどのようなものであるかを説明する為、coniveau filtration について復習する。§2 では adequate 同値関係が与えられると、その種とでも言うべきものが定義できることを説明する。§3 では、これを使って、Chow 群に filtration (のよ様なもの: 実は filtration でなくて、少し "穴" があいている, cf. 3.1.1) を導入し、"evidence" を与える。更に関連した問題についても触れる。

なお、定理 3.5 は、[14] の結果の拡張になっていることに注意しておく。

§1. Coniveau filtration.

1.1. 初めに V が代数多様体の時、その Betti cohomology $\mathrm{H}^n(V, \mathbb{Q})$ は 混合 Hodge 構造を持ち、 V が非特異射影的ならば、重さ n の偏極可能純 Hodge 構造を持つこと思い出そう。

$H^m(V, \mathbb{Q})$ の convex filtration は, 次の様に定義される:

$$\begin{aligned}
 N^p H^m(V, \mathbb{Q}) &= \sum_{\substack{F \subset \mathbb{Z}: \text{Zariski 閉} \\ \text{codim} \geq p}} \left(\text{Ker} \left(H^m(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{rest.}} H^m(V \setminus F, \mathbb{Q}) \right) \right) \\
 1.1.1 \quad &= \sum_{F \subset \mathbb{Z}: \text{ }} \text{Im} \left(H_F^m(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^m(V, \mathbb{Q}) \right) \\
 &= \sum_{\substack{f: Y \rightarrow V: \text{閉射} \\ Y: \text{非特異} \\ \dim V - \dim Y = d \geq p}} \text{Im} \left(H^{m-2d}(Y, \mathbb{Q})(-d) \rightarrow H^m(V, \mathbb{Q}) \right) \\
 (V: \text{非特異射影的}) \quad \uparrow
 \end{aligned}$$

(重さ -2 の Tate の Hodge 構造を $\mathbb{Q}(1) = 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Q}$ で表わし 混合 Hodge 構造 H に対して, $H(n) = H \otimes (\mathbb{Q}(1))^{\otimes n}$.)

明らかに $N^p H^m(V, \mathbb{Q}) \supset N^{p+1} H^m(V, \mathbb{Q})$ であるから $H^m(V, \mathbb{Q})$ は, 減少 filtration

$$H^m(V, \mathbb{Q}) = N^0 H^m(V, \mathbb{Q}) \supset N^1 H^m(V, \mathbb{Q}) \supset \cdots \supset N^p H^m(V, \mathbb{Q}) \supset N^{p+1} H^m(V, \mathbb{Q}) \supset \cdots$$

を持ち, これを convex filtration と呼ぶ, q の associated graded を $gr^p H^m(V, \mathbb{Q})$ と書く:

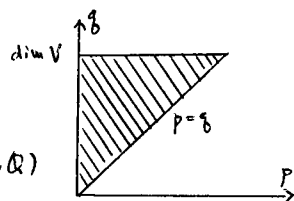
$$gr^p H^m(V, \mathbb{Q}) = N^p H^m(V, \mathbb{Q}) / N^{p+1} H^m(V, \mathbb{Q}).$$

1.1.1 の第一式で, 制限 rest. は混合 Hodge 構造の附随だから, $N^p H^m(V, \mathbb{Q})$ は $H^m(V, \mathbb{Q})$ の部分 Hodge 構造であり, 従って (V が非特異射影的ならば) $gr^p H^m(V, \mathbb{Q})$ は重さ m の偏極可能 Hodge 構造を持つ。

例 1.2. $N^p H^m(V, \mathbb{Q}) = 0$ for $2p > m$. 又

$$gr^p H^m(V, \mathbb{Q}) = 0 \text{ for } n-p > \dim V. \text{ 従って } gr^{p,q} H^{p+q}(V, \mathbb{Q})$$

$\neq 0$ なる (p, q) は斜線の部分に含まれる。



例 1.3. $Z \hookrightarrow V$ を余次元 p の部分多様体とする.

$b: \tilde{Z} \rightarrow Z$ を Z の特異点の解消とする時, Z の cohomology 類 α は $1 \in H^0(\tilde{Z}, \mathbb{Q})$ の $(\text{job})_*$ による像として定義される. 従って, cohomology 類 $\{\alpha\}$ は, $(H^{2p}(V, \mathbb{Q}))$ の元ではなく $H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p)$ に属する. 線型性により V の余次元 p の cycle の cohomology 類は $H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p)$ の元となる. そうすると, $N^p H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p)$ は $H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p)$ の中の代数的 cycle (の $\mathbb{Q}$ 係数線型結合) 全体の空間と一致する (勿論 vector 空間として), $N^p H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p) \cong N^p H^{2p}(V, \mathbb{Q})$. 1.2 より, $N^p H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p) \cong \text{gr}^p H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p)$.

例 1.4. V の (Griffiths の) p 次の中間次元 Jacobian 多様体 $J^p(V)$ で表わし, その "代数的部分" を $J_a^p(V)$ と記す (cf. 3.10). $J_a^p(V)$ は Abel 多様体であり, Hodge 構造の同型

$$H_1(J_a^p(V), \mathbb{Q}) := (H^1(J_a^p(V), \mathbb{Q}))^\vee \cong N^{p-1} H^{2p-1}(V, \mathbb{Q})(p) \subset H^{2p-1}(V, \mathbb{Q})(p)$$

がある. 再び 1.2 より $N^{p-1} H^{2p-1}(V, \mathbb{Q})(p) \cong \text{gr}^{p-1} H^{2p-1}(V, \mathbb{Q})(p)$.

例 1.5. 1.3.1 に より, $N^1 H^2(V, \mathbb{Q})$ は, (vector 空間 $\mathbb{C}(Z)$, Néron-Severi 群 $NS(V)$ に $\mathbb{Q}$ を tensor したものであるから, $\text{gr}^0 H^2(V, \mathbb{Q}) = H^2(V, \mathbb{Q}) / NS(V)_{\mathbb{Q}}$ ($(?)_{\mathbb{Q}} = (?) \otimes \mathbb{Q}$). V が曲面の時, $H^2(V, \mathbb{Z})$ は intersection により lattice となり, その部分 lattice

$$T(V) := \{x \in H^2(V, \mathbb{Z}) ; x \perp NS(V)\} / (\text{torsion})$$

は, transcendental lattice と呼ばれる. そうすると標準的に

$$T(V)_{\mathbb{Q}} \cong \text{gr}^0 H^2(V, \mathbb{Q}).$$

例 1.6. $\text{gr}^0 H^2(V, \mathbb{C}) = \text{gr}^0 H^2(V, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$ は, 次の様に解析的に表現

きる。 V 上の有理 n -形式 ω と, V の素因子 D に対し, ω の D に関する residue $\text{Res}_D^V \omega$ を,

$$\text{Res}_D^V \omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \omega$$

で定義する, ここで γ は D の回りを一周する一般の路, $\text{Res}_D^V \omega$ は D 上の有理 $(n-1)$ -形式である。 $\text{gr}^0 H^1(V, \mathbb{C})$ は V 上の第一種微分の空間と同型, 即ち,

1.6.1. $\text{gr}^0 H^1(V, \mathbb{C}) \cong \{ \text{閉有理 1-形式 } \omega; \text{Res}_D^V \omega = 0, \forall D \} / \{ \text{有理完全 1-形式} \}$.

更に $\text{gr}^0 H^2(V, \mathbb{C})$ は, V 上の次数 2 の第二種微分の空間と同型, 即ち,

1.6.2. $\text{gr}^0 H^2(V, \mathbb{C}) \cong \{ \text{閉有理 2-形式 } \omega; \text{Res}_D^V \omega \text{ は完全}, \forall D \} / \{ \text{有理完全 2-形式} \}$.

しかし, $\text{gr}^0 H^3(V, \mathbb{C})$ に対しては, 同様のことは一般には正しくない。即ち, $\{ \text{閉有理 3-形式 } \omega; \text{Res}_D^V \omega \text{ は完全}, \forall D \} / \{ \text{有理完全 3-形式} \}$ から $\text{gr}^0 H^3(V, \mathbb{C})$ へ全射があり, その核 $= 0 \Leftrightarrow$ "Homology 同値と代数的同値は (torsion を除き) 一致" である [7]。後で Griffiths の例 [9] によりこれは一般に一致しない。それどころか, $\text{gr}^0 H^3(V, \mathbb{C})$ は, 恒に有限次元であるが, 第二種微分の空間は, $\mathbb{C}$ と無限次元にもなりうる [8]。

例 1.7. 一般に, $\text{gr}^p H^q(V, \mathbb{Q})$ 乃至, $\text{NPH}^q(V, \mathbb{Q})$ を決定することは難しい。1.1.1. の第三式より

$$1.7.1. \quad \text{NPH}^q(V, \mathbb{Q}) \subset H^q(V, \mathbb{Q}) \cap \text{FPH}^q(V, \mathbb{C}),$$

ここで, $\text{FPH}^q(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i \geq p} H^{q-i, i}(V) \subset H^q(V, \mathbb{C})$ は Hodge filtration である。左辺は, 既に述べた様に $H^q(V, \mathbb{Q})$ の部分 Hodge 構造である。

左辺が、右辺に含まれる最大の $H^n(V, \mathbb{Q})$ の部分 Hodge 構造である、
 というのが、Grothendieck に よって modify された 一般の Hodge 予想
 である。 $n=2p$ の場合には、右辺 ~~白~~ が、 $H^{2p}(V, \mathbb{Q})$ の部分
 Hodge 構造になり $(H^{2p}(V, \mathbb{Q}) \cap F^p H^{2p}(V, \mathbb{C}) = H^{2p}(V, \mathbb{C}) \cap H^{p,p}(V))$,
 $\omega \in H^{2p}(V, \mathbb{Q})$ の Hodge 成分が (p, p) 型なるは ω は代数的 7 次
 という普通の Hodge 予想になる。

1.8. $N^p H^n(V, \mathbb{Q})$, 或いは, $gr^p H^n(V, \mathbb{Q})$ は, 代数的対応に対して
 関手的である, 詳しくいうと,

(i). $f: V \rightarrow W$ に対して, 引き戻し $f^*: H^n(W, \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(V, \mathbb{Q})$ は,
 $N^p H^n(W, \mathbb{Q})$ を, $N^p H^n(V, \mathbb{Q})$ の中へ写す; 従って

$$f^*: gr^p H^n(W, \mathbb{Q}) \rightarrow gr^p H^n(V, \mathbb{Q})$$

が得られる。

(ii). (固有射) $f: V \rightarrow W$ に対して, $d = \dim W - \dim V$ と置くと,
 Gysin 射

$$f_*: H^{n-2d}(V, \mathbb{Q})(-d) \rightarrow H^n(W, \mathbb{Q})$$

は $N^{p-d} H^{n-2d}(V, \mathbb{Q})(-d)$ を $N^p H^n(W, \mathbb{Q})$ の中へ写し, 従って

$$f_*: gr^{p-d} H^{n-2d}(V, \mathbb{Q})(-d) \rightarrow gr^p H^n(W, \mathbb{Q})$$

を引き起こす。

(iii). Cup 積 $H^n(V, \mathbb{Q}) \times H^{n'}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n+n'}(V, \mathbb{Q})$ は,

$N^p H^n(V, \mathbb{Q}) \times N^{p'} H^{n'}(V, \mathbb{Q})$ を $N^{p+p'} H^{n+n'}(V, \mathbb{Q})$ の中に写し,

$$\cup : g^{r,p} H^m(V, \mathbb{Q}) \times g^{r',p'} H^{m'}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow g^{r+p, p'+p'} H^{m+m'}(V, \mathbb{Q})$$

が得られる。

1.9. 条件

Hypoth (V; r, l): (Vector 空間 V と l の) 双線型写像

$$N^r H^{2r+l}(V, \mathbb{Q}) \times N^{m-r-l} H^{2m-2r-l}(V, \mathbb{Q}) \subset H^{2r+l}(V, \mathbb{Q}) \times H^{2m-2r-l}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup} H^{2m}(V, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

($m = \dim V$) は 非退化である

を考える。豊富な因子の cohomology 類 $\ell \in N^1 H^2(V, \mathbb{Q})$ は

$$L : N^r H^m(V, \mathbb{Q}) \rightarrow N^{r+1} H^{m+2}(V, \mathbb{Q}), \quad x \mapsto \ell \cup x$$

を引起す。強 Lefschetz 定理により 同型

$$L^k : H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \quad (k \geq 0)$$

があり、従って

$$1.9.1. \quad \dim N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = \dim N^{r+k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \text{ ならば,}$$

$$L^k : N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} N^{r+k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}).$$

$H^{m-k}(V, \mathbb{Q})$ の原始部分 (primitive part)

$$H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = \text{Ker}(L^{k+1} : H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{m+k+2}(V, \mathbb{Q}))$$

を $H^{m-k}(V, \mathbb{Q})$ の部分 Hodge 構造と見た時, 双線型写像

$$H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2m}(V, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}(-m+k), \quad (x, y) \mapsto \pm \ell^k \cup x \cup y$$

は, $H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q})$ の偏極を与え, $N^r H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \cap H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q})$

は, $H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q})$ の部分 Hodge 構造故

$$N^r H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times N^r H_{pr}^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto \ell^k \cup x \cup y$$

は、非退化である。原始分解 (primitive decomposition)

$$H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j \in [\frac{m-k}{2}]} L^j \cdot H_{pr}^{m-k-2j}(V, \mathbb{Q})$$

に対応して,

$$1.9.2. \quad \dim N^{r+j} H^{m-k-2j}(V, \mathbb{Q}) = \dim N^{r+k+j} H^{m+k+2j}(V, \mathbb{Q}) \quad (0 \leq j \leq r) \text{ なる } 12$$

$$N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j \in [\frac{m-k}{2}]} L^j N^{r-j} H_{pr}^{m-k-2j}(V, \mathbb{Q})$$

であることが容易に示せる (cf. 1.9.1). $x, y \in N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q})$ を

これに従って分解する:

$$x = \sum L^j x_j, \quad y = \sum L^j y_j, \quad (x_j, y_j \in N^{r-j} H_{pr}^{m-k-2j}(V, \mathbb{Q})).$$

$$\text{もし, } x \cup L^k y = \sum_j L^{k+2j} x_j \cup y_j \text{ であり, 従って}$$

$$N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{id} \times L^k} N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times N^{r+k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup} \mathbb{Q}$$

は非退化である; 従って

$$\text{命題 1.10. } \dim N^{r+j} H^{2r+\ell-2j}(V, \mathbb{Q}) = \dim N^{m-r-\ell+j} H^{2m-2r-\ell+2j}(V, \mathbb{Q}) \quad (0 \leq j \leq r)$$

ならば $\text{Hypoth}(V; r, \ell)$ が成立する。特に $r=0$; また, $r \leq 2, |2r+\ell-4| \leq 2$;

又 $r=m-2, \ell=1$ の時, $\text{Hypoth}(V; r, \ell)$ は正しい。更に,

$m \leq 3$ の時, $\text{Hypoth}(V; r, \ell)$ は全て成立する。

注意 1.11. $L^k: H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{m+k}(V, \mathbb{Q})$ の逆加代数的, 即ち,

ある $\Lambda \in N^{m-k} H^{2m-2k}(V \times V, \mathbb{Q})$ の3) 起す $\{\Lambda\}: H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{m-k}(V, \mathbb{Q})$

が L^k の逆になっているならば, これにより $N^{r+k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q})$ は

$N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q})$ に写され, $\dim N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = \dim N^{r+k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q})$ に

なっている。この様な Λ が恒に存在するというのが Grothendieck

の Standard 予想(の一部)である。曲線, 曲面, Abel 多様体, 非特異超曲面では (任意の k に対して) このような $\wedge$ が存在する。任意の k に対してこのような $\wedge$ の存在する多様体は, 直積に関して閉じているので, 上記の多様体の種も $\text{Hypoth}(V; ?, ?)$ を充てている (cf. [10])。

注意 1.12. $\cup: N^{r+j}H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times N^{n-k+j}H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2m}(V, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ ($j=0, 1$)

が, 非退化双線型写像になっているとある (cf. 1.11)。

$$Gr^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = \{x \in N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) ; x \perp N^{r+k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q})\}$$

$$Gr^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) = \{y \in N^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) ; y \perp N^{r+k} H^{m-k}(V, \mathbb{Q})\}$$

と置くと,

$$N^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) = Gr^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \oplus N^{r+1} H^{m-k}(V, \mathbb{Q})$$

$$N^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) = Gr^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \oplus N^{r+k+1} H^{m+k}(V, \mathbb{Q})$$

と, "直交分解" し, 自然に $Gr^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \cong gr^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q})$,

$Gr^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \cong gr^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q})$ 。更に, $\cup$ の制限

$$Gr^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times Gr^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \subset H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup} H^{2m}(V, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

は, 仮定から, 非退化双線型写像を与えるが 1.8 (iii) で与えた

$$gr^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}) \times gr^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q}) \longrightarrow gr^{2r+k} H^{2m}(V, \mathbb{Q})$$

は, $2r+k \neq m$, 即ち $gr^r H^{m-k}(V, \mathbb{Q}), gr^{n-k} H^{m+k}(V, \mathbb{Q})$ が, 代数的 cycle に対応していない場合, $gr^{2r+k} H^{2m}(V, \mathbb{Q}) = 0$ 故, 非退化どころか, 零写像になってしまうから, 混同しないように注意しなくてはならない。

§2. Adequateな同値関係の種類.

2.1. この § では, (代数的) cycle とは, 非特異射影多様体上の既約部分多様体の $\mathbb{Z}$ -係数の形式和の意味である。 $\mathcal{Z}$ の全体 $\mathcal{Z}(V)$ は, 余次元によって次数付けられている:

$$\mathcal{Z}(V) = \bigoplus_p \mathcal{Z}^p(V) = \bigoplus_r \mathcal{Z}_r(V)$$

($\mathcal{Z}^p(V) = \mathcal{Z}_r(V)$ ($p+r=\dim V=1m$) は r -次元部分多様体の和)。

各 V に対して, $\mathcal{Z}(V)$ 上の E と記す斉次な同値関係 (即ち, $X, Y \in \mathcal{Z}(V)$, $X = X_0 + \dots + X_m$, $Y = Y_0 + \dots + Y_m$, $X_i, Y_i \in \mathcal{Z}_i(V)$ の時,

$X \equiv Y \pmod{E} \iff X_r \equiv Y_r \pmod{E} \ (0 \leq r \leq m)$) が与えられていて次の条件を満たす時, adequateな同値関係という [15]:

(i). E は $\mathcal{Z}(V)$ の加法と両立する。

(ii). (Moving lemma). V 上の有限個の部分多様体 $X_1, \dots, X_k$ と, $Y \in \mathcal{Z}(V)$ に対して, $Y' \in \mathcal{Z}(V)$ で, $Y \equiv Y' \pmod{E}$; ながら $X_i \cdot Y'$ は全て定義されているものが存在する。

(iii). $X \in \mathcal{Z}(V)$, $Z \in \mathcal{Z}(V \times W)$ で, $Z \cdot X \times W$ が定義されているならば, $X \equiv 0 \pmod{E}$ の時, $Z(X) := \text{pr}_W(Z \cdot X \times W) \equiv 0 \pmod{E}$

($\text{pr}_W: V \times W \rightarrow W$ は, 射影)。

2.1.1. 有理的同値関係 ($\sim$ と記す) は, adequate な同値関係であり, adequate な同値関係の中で最も細かい (i.e., $X \equiv Y \pmod{E} \Rightarrow X \equiv Y \pmod{0}$, $\forall E$)。そして,

$$CH(V) = \mathcal{Z}(V)/0$$

は、所謂 Chow 環であり余次元により 次数付けられた可換環となる:

$$CH(V) = \bigoplus_p CH^p(V).$$

$CH^p(V) = CH_V(V)$ は 余次元 p (次元 p) の Chow 群と呼ばれる。

2.2. $\mathcal{Z}(V)$ の部分加群 $\{X \in \mathcal{Z}(V); X \equiv 0 \pmod{E}\}$ の有理同値による商を $ECH(V)$ とかく:

$$ECH(V) = \{X \in \mathcal{Z}(V); X \equiv 0 \pmod{E}\} / 0 \subset CH(V).$$

その時 部分加群 $ECH(V)$ は次の性質をもつ:

- (i). $ECH(V)$ は, $CH(V)$ の次数付き部分加群である。
- (ii) $x \in ECH(V)$, $z \in CH(V \times W) \Rightarrow z(x) := pr_{W*}(z \cdot x \times 1_W) \in ECH(W)$.

逆に, 各 V に対して $CH(V)$ の部分加群 $ECH(V)$ が与えられていて, (i), (ii) を充すと, $X, Y \in \mathcal{Z}(V)$ に対して

$$X \equiv Y \pmod{E} \iff (X \bmod 0) - (Y \bmod 0) \in ECH(V)$$

により adequate な同値関係 E が得られ, adequate な同値関係と,

(i), (ii) を充す $ECH(V)$ を与えることは, 同値になる。この時, $ECH(V)$ は $CH(V)$ の斉次 ideal である。

E' も adequate な同値関係で, $ECH(V) \subset E'CH(V)$ ($\forall V$) を充す時, $E \subset E'$ と書くことにする。

例 2.3. $0CH(V) = 0$. 又全ての cycle は同値という同値関係は,

adequate"あり, L と書く: $LCH(V) = CH(V)$

例 2.4. Adequate な同値関係 E に対して

$$\bar{E}CH(V) := \{x \in CH(V); nx \in ECH(V), \text{ for some } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

と置くと, これは, 2.2. (i), (ii) を充し, adequate な同値関係 $\bar{E}$ を得る。これを 擬 E -同値関係という。勿論 $E \subset \bar{E}$ 。

例 2.5. Adequate な同値関係 E, E' に対して

$$(E+E')CH(V) := \bar{E}CH(V) + E'CH(V)$$

$$(E \cap E')CH(V) := ECH(V) \cap E'CH(V)$$

と置くと, これらは 夫々 2.2. (i), (ii) を充し, 従って adequate な同値関係である。

例 2.6. 代数的同値は, 次の様に定義された: $X, Y \in \mathcal{Z}(V)$ が代数的同値とは, (既約非特異完備) 曲線 C と, その上の二点 a, b , 及び $Z \in \mathcal{Z}(C \times V)$ が存在し, $Z(a), Z(b)$ が定義されて, $X = Z(a), Y = Z(b)$ (因みに $C = \mathbb{P}^1$ の時が, 有理同値の定義である)。

$$\overline{H}CH(V) := \{X \in \mathcal{Z}(V); X \text{ は } 0 \text{ と代数的同値}\} / 0.$$

例 2.7. $X, Y \in \mathcal{Z}(V)$ に対して, それらの余次元 p の成分の $H^{2p}(V, \mathbb{Z})(p)$ に於ける cohomology 類が一致するということにおいて定義される adequate な同値関係 H を homology 同値関係と呼んだ。

$$HCH(V) := \{X \in \mathcal{Z}(V); X \text{ は } 0 \text{ と homology 同値}\} / 0.$$

その時,

$$(CH^p(V)/HCH^p(V))_{\mathbb{Q}} \cong (CH^p(V)/\overline{H}CH^p(V))_{\mathbb{Q}} \simeq N^p H^{2p}(V, \mathbb{Q})(p).$$

例.2.8. $X, Y \in \mathcal{Z}(V)$ は, 全ての $Z \in \mathcal{Z}(V)$ で, X, Z, Y, Z が定義されるものに対して, X, Z, Y, Z の 0次元部分の次数が, 一致する時, 同値, ということにより定義された同値関係 N は adequate であり, 数値的同値関係と呼ばれている。これは adequate な同値関係 E で, $E \neq I$ なるものの中で最大 (即ち, この時 $E \subset N$ 且つ, $I \neq \bar{N} (=N)$) である。Standard 予想によれば $N = \bar{H}$ (cf. [10])。

例.2.9. 中間次元 Jacobian 多様体の定義する同値関係 J . k 次の Griffiths の中間次元 Jacobian 多様体を $T^k(V)$ で表わす:

$$T^k(V) := H^{2p-k}(V, \mathbb{Z}) \setminus H^{2p-k}(V, \mathbb{C}) / h^k H^{2p-k}(V, \mathbb{C}).$$

積分によって定義される Abel-Jacobi 写像 $HCH^k(V) \rightarrow T^k(V)$ の核を $JCH^k(V)$ と書き, $JCH(V) = \bigoplus JCH^k(V)$ と置く。 $T^p(V)$ の双線形性により, J は 2.2, (i), (ii) を充し, 従って adequate な同値関係である。これらの同値関係の間には, 次の包含関係がある:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{H}' & \subset & H & \subset & \bar{H} & \subset & N \subset I \\ & \cup & & \cup & & & \\ 0 & \subset & \bar{H}' \cap J & \subset & J & & \end{array}$$

例.2.10. Griffiths [9] により, $\bar{H}' \subsetneq H$ であるが, これらの間にも沢山の (一見無限個の) adequate な同値関係が Bloch [6] により定義されている。これは本質的に, [14], 1.5.2 で定義された adequate な同値関係と同じものであり, 基礎体が複素数体 $\mathbb{C}$ ではなく, 代数体の場合, $g^r \cdot H^{p-1}(V, \mathbb{Q}_\ell)$ に付随する L -函数の零点の位数と関連があると期待されている。

定義 2.11 (Adequate な同値関係の種類). Adequate な同値関係 E, E' に対して, $E * E' CH(V)$ を, $p_*(x, y)$ の形の元で生成された $CH(V)$ の部分加群として定義する, ここで, $x \in ECH(T \times V)$, $y \in E'CH(T \times V)$, T は非特異射影多様体, $p: T \times V \rightarrow V$ は射影 (x, y, T は可能なものの全てを動く).

2.11.1. $p_*(x, y)$ を上の様なものとする時 $z \in CH(V \times W)$ に対して,

$$\begin{aligned} z(p_*(x, y)) &= pr_{W*}((x, p_*(x, y)) \times 1_W) \quad (pr_W: V \times W \rightarrow W) \\ &= pr_{W*}((p \times id_W)_*((p \times id_W)^*z), x \times 1_W, y \times 1_W) \quad (\text{projection formula}) \\ &= pr_{W*}(((p \times id_W)^*z, x \times 1_W), y \times 1_W) \quad (pr'_W: T \times V \times W \rightarrow W) \end{aligned}$$

であり, $(p \times id_W)^*z, x \times 1_W \in ECH(T \times V \times W)$, $y \times 1_W \in E'CH(T \times V \times W)$ 故, $E * E'$ は, 2.2, (iii) をえる. (i) は明らか故, $E * E'$ は adequate な同値関係 となる.

容易に次の関係が解る (E'' も adequate な同値関係):

$$\begin{aligned} E * E' &= E' * E, \quad (E * E') * E'' = E * (E' * E''), \\ E * (E' + E'') &= E * E' + E * E'', \quad 0 * E = 0, \quad 1 * E = E, \\ E' \subset E'' &\Rightarrow E * E' \subset E * E'' \quad (\text{特に } E * E' \subset E \cap E'). \end{aligned}$$

2.12. $x \in ECH(V), y \in E'CH(V) \Rightarrow x, y \in E * E'CH(V)$ であるが, この様な adequate な同値関係の中で最小のものが $E * E'$ である:

E, E', E'' を adequate な同値関係とすると

$$[\forall V (\forall x \in ECH(V), \forall y \in E'CH(V) \Rightarrow x, y \in E''CH(V))] \iff E * E' \subset E''.$$

注意 2.13. 上記の操作は可換環 A の ideal α, β に対して $\alpha + \beta$

α, β , 交わり $\alpha \cap \beta$ 及び積 $\alpha \beta$ と類似している。Ideal 論では

$$\alpha: \beta = \{x \in A; x\beta \subset \alpha\}$$

なる操作もある。Adequate な同値関係 E, E' に対して

$$(E \cdot E')CH(V) = \{x \in CH(V); \forall W, \forall z \in E'CH(V \times W): z(x) \in ECH(W)\}$$

という操作 (及び、これと類似のもの) があるが、今の所、余り応用がない。

2.14. E, E' を adequate な同値関係とする。 $z \in CH(V \times W)$ によつて
 引起された写像

$$CH(V) \rightarrow CH(W), x \mapsto z(x)$$

は, $E'CH(V)$, $E \cdot E'CH(V)$ も, $E'CH(W)$, $E \cdot E'CH(W)$ に写し, 写像

$$[z]: E'CH(V)/E \cdot E'CH(V \times W) \rightarrow E'CH(W)/E \cdot E'CH(W \times W)$$

が得られる。2.12. にあり $[z]$ は $CH(V \times W)/ECH(V \times W)$ の中で z の像にしか依存しない。

2.14.1. Adequate な同値関係 E^l を次の様に帰納的に定義する。

$$E^{*0} = I, \quad E^{*(l+1)} = E \cdot E^{*l} \quad (l \geq 0).$$

$$I = E^{*0} \supset E = E^{*1} \supset E^{*2} \supset \dots \supset E^{*l} \supset E^{*(l+1)} \supset \dots$$

であり,

$$gr_E^l CH(V) = E^{*l}CH(V)/E^{*(l+1)}CH(V), \quad gr_E^l CH(V) = \bigoplus gr_E^l CH(V)$$

と置くと, $z \in CH(V \times W)$ に対して, 上の様に定義された写像

$$[z]: gr_E^l CH(V) \rightarrow gr_E^l CH(W)$$

は, $CH(V \times W)/ECH(V \times W)$ に於ける z の像にしか依存しない, cf. 0.3.

例 2.15. $H^l = (H^1)^{*l}$ は, l -cubic equivalence に他ならない, cf [13], [15]. もっと一般に, E が adequate な同値関係ならば

$$E * H^l CH(V) = \left\{ z(\gamma); \begin{array}{l} \exists C_1, \dots, C_\ell: \text{曲線}, \exists z \in ECH(C_1 \times \dots \times C_\ell \times V), \\ \exists a_i^{(v)}, a_i^{(v')} \in C_i \text{ s.t. } \gamma = (a_1^{(v)} - a_1^{(v')}) \times \dots \times (a_\ell^{(v)} - a_\ell^{(v')}) \end{array} \right\}$$

例 2.16. E, E' は adequate な同値関係で, 任意の V に対して $E'CH(V)$ は可除群 (i.e., $\pi_x: E'CH(V) \rightarrow E'CH(V)$: 全射, $\forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$) ならば $E * E' = \bar{E} * E'$, 特に $E * H^l = \bar{E} * H^l$ ($l > 0$).

例 2.17. $z \in \bar{H}CH^{p+g}(V' \times V)$ とする. 中間次元 Jacobi 多様体の間の写像 $[z]: T^{\dim V - g}(V') \rightarrow T^p(V)$ は零写像である. $x \in HCH_g(V')$ に対して, $x(x)$ の Abel-Jacobi 写像による $T^p(V)$ に於ける像は, x の Abel-Jacobi 写像による $T^{\dim V - g}(V')$ の中での像の $[z]$ による像故 $x(x) \in JCH^p(V)$. このことから容易に $H * \bar{H} \subset J$ が解る.

§ 3. Evidence と問題.

3.1. Metaconjecture 0.4 の $\text{Gr}_F^2 \text{Ho}(V)$ の圏に対応する圏を定義しよう. 先の 前 § によって, 次の様な adequate 同値関係の列がある:

$$\begin{array}{ccccccc} I = H^0 & \supset & H^1 & \supset & H^2 & \supset & \dots \supset H^l & \supset & H^{l+1} & \supset & \dots \\ 3.1.1. & \cup & \supset & \cup & \supset & \cup & & \cup & \supset & \cup & \\ & \bar{H} & \supset & \bar{H} * H^1 & \supset & \bar{H} * H^2 & \supset & \dots \supset \bar{H} * H^l & \supset & \bar{H} * H^{l+1} & \supset & \dots \end{array}$$

そこで多少, 混しい記号であるが,

$$3.1.2. \quad \text{Gr}^l CH(V) := H^l CH(V) / \bar{H} * H^l CH(V)$$

と置く。整数 $l \geq 0$ に対して, $Gr^l(CH_g(V'))$ から $Gr^l(CH_r(V))$ への代数幾何的に自然な射は, 2.14 で定義された

$$[Z]: Gr^l(CH_g(V')) \longrightarrow Gr^l(CH_r(V))$$

($Z \in (H^{g+m-r}(V' \times V))$, $m = \dim V$) の形の Abelian 群の準同型写像である。

この形の準同型全体は, 又 Abelian 群になっている。そこで擬Abel圏 $\mathcal{C}(l)$ を導入する。先づ

定義 3.1.3. 加法圏 $\mathcal{C}(l)_{\mathbb{Z}}$ を,

対象: $\bigoplus_i Gr^l(CH_{r_i}(V_i))$, (V_i : 非特異射影多様体; 有限和)

射: $Hom(\bigoplus_j Gr^l(CH_{g_j}(V'_j)), \bigoplus_i Gr^l(CH_{r_i}(V_i))) = \bigoplus_{i,j} Hom(Gr^l(CH_{g_j}(V'_j)), Gr^l(CH_{r_i}(V_i)))$
 $Hom(Gr^l(CH_g(V')), Gr^l(CH_r(V))) = \{[Z]: Gr^l(CH_g(V')) \rightarrow Gr^l(CH_r(V)); Z \in (H^{g+m-r}(V' \times V))\}$

によって定義する。これから $\mathbb{Q}$ -加法圏 $\mathcal{C}(l)$ は,

対象: $\mathcal{C}(l)_{\mathbb{Z}}$ と同じ。

射: $Hom_{\mathcal{C}(l)}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}(l)_{\mathbb{Z}}}(X, Y) \otimes \mathbb{Q}$ ($X, Y \in ob \mathcal{C}(l)$)

によって定義される。

一般に, 加法圏 $\mathcal{C}$ 如, 擬Abel圏とは, $p \in End_{\mathcal{C}}(X)$, $p^2 = p$ は核 $ker(p)$ を持つものとして定義されたことを思い出す。

加法圏 $\mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{C}$ の擬Abel包 $(\tilde{\mathcal{C}}, i)$ (或いは単に $\tilde{\mathcal{C}}$) とは擬Abel圏 $\tilde{\mathcal{C}}$ と加法的函手 $i: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ で, 任意の擬Abel圏 $\mathcal{D}$ 及び加法的函手 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 一意的に, $\varphi \circ i = f$ なる加法的函手 $\varphi: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{D}$ が存在するものである。 $\tilde{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ から圏同値を除き一意的に存在し, $\mathcal{C}$ は $\tilde{\mathcal{C}}$ の充滿加法部分圏となり,

具体的に、次の様に与えられた:

対象: (X, p) , $X \in \mathcal{A}b$ と, $p \in \text{End}_{\mathcal{A}}(X)$, $p^2 = p$

射: $\text{Hom}_{\mathcal{A}}((X, p), (Y, q)) = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) : fp = qf\} / \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) : fp = qf = 0\}$.

この時 $\mathcal{A}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, $X \mapsto (X, \text{id}_X)$ であり, これにより $\mathcal{A}(X, p) = \text{Im } p$.

定義 3.1.4. $\mathcal{C}(E)$ の擬 Abel 包を $\tilde{\mathcal{C}}(E)$ と記す。 $\tilde{\mathcal{C}}(E)$ は $\mathbb{Q}$ -擬 Abel 圏である。

3.2. 本当は, $\tilde{\mathcal{C}}(E)$ から Hodge 構造への関手も定義したいのであるが,

今の所, 出来なくて, $\tilde{\mathcal{C}}(E)$ を後に述べるように

少し小さくしなければならぬ。関手は本質的に, 次におて

与えられる: $\pi \in (H^{p+q}(T \times V))$ に対し, π の cohomology 類

$\{\pi\} \in H^{p+q}(T \times T, \mathbb{Q})(p, q)$ を考える (以下と書いたのは, 同型

$T \times V \cong V \times T$ により写したから)。整数 $l \geq 0$ に対して

$$3.2.1. \quad \{\pi\}: \text{gr}^r H^{2m+l}(V, \mathbb{Q})(r) \longrightarrow \text{gr}^s H^{2q+l}(T, \mathbb{Q})(s)$$

($p+r = m = \dim V$) を, 合成

$$\text{gr}^r H^{2m+l}(V, \mathbb{Q})(r) \longrightarrow \text{gr}^r H^{2m+l}(V \times T, \mathbb{Q})(r) \xrightarrow{\{\pi\} \cup} \text{gr}^{m+q} H^{2m+2q+l}(V \times T)(m+q) \xrightarrow{p_{T*}} \text{gr}^s H^{2q+l}(T, \mathbb{Q})(s)$$

によって定義する。これは重さ l の Hodge 構造の射である。

例 3.3. C を曲線, D を $\mathbb{P}^N \times C$ 上の正の因子とする。一般の

$t \in \mathbb{P}^N$ に対して, $D(t) = P_1(t) + \dots + P_d(t)$ と書く。 C 上の第 i 種微分

ω に対して, P_0 を参照点として, 積分路を適当に定めて,

$$F(t) = \int_{P_1(t)} \omega + \dots + \int_{P_d(t)} \omega$$

と置く。 $F(t)$ が $t \in \mathbb{P}^1$ の有理函数になるというのが Abel の定理である(元々の Abel の定理は, ω に第三種微分を許し, その場合には, $F(t)$ は, $\mathbb{P}^1$ 上の有理函数と, $\log Q(t)$ ($Q(t)$: 別の有理函数)の和になるというものであった) [1]。 $dF(t) = \omega(P_1(t)) + \dots + \omega(P_d(t))$ である。 $T = \mathbb{P}^1$, $V = \mathbb{C}$, $l=1$, $r=g=0$ の場合の

$$\text{Id}: \text{gr}^0 H^1(\mathbb{C}, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{gr}^0 H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})$$

に, $\mathbb{C}$ を tensor したものは, 1.6.1 の同一視により, ω を, $\mathbb{P}^1$ 上の第二種微分 $\omega(P_1(t)) + \dots + \omega(P_d(t))$ に写す。一斉に $\text{gr}^0 H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}) = 0$ 故ある $\mathbb{P}^1$ 上の有理函数 $R(t)$ により $dR(t) = \omega(P_1(t)) + \dots + \omega(P_d(t))$, i.e., $dF(t) = dR(t)$ 。従って $F(t) = R(t) + \text{const.}$ は有理函数である。

例 3.4. 前例により Abel の写像 3.2.1 を考えていたというのは, 少し無理があるかも知れないが, Severi はもう少し明確に, 3.2.1 を意識していた(ようである)。曲面 V に対して, $t \in T$ を parameterize された V 上の 0-cycle の代数族 $\mathcal{Z}$ は, $\mathcal{Z} \in \text{CH}^0(T \times V)$ を与える。 $l=1$ の時, 対応する Id が零の時, $\mathcal{Z}$ は *circolazione lineare nulla* といい, $l=2$ の時, Id が零写像であることを $\mathcal{Z}$ は *circolazione (superficiale) algebrica* と呼んで Severi は重視している [16]。

次の定理が §(1) (のある部分) から Hodge 構造の圏への写手が定義できることを保証する:

定理 3.5. $\Sigma \in CH^p(T \times V)$ が, 全ての $t \in T$ に対して, $\Sigma(t) \in H^{p,p}(CH^p(V))$ ならば, $r = \dim V - p$ とする時,

$$D = \{t \in T : \text{gr}^r H^{2r+l}(V, \mathbb{Q})(r) \rightarrow \text{gr}^0 H^l(T, \mathbb{Q})\}.$$

証明の方針は, [14], 3.2 とほぼ同様である。

3.6. 次の条件を考える:

$(*: V, \ell, r)$: 有限個の曲線の積 $T_1, \dots, T_n$ と, $\Sigma_i \in CH^{n-r}(T_i \times V)$ が存在し, 写像

$$3.6.1. \quad (\{t \Sigma_i\}): \text{gr}^r H^{2r+l}(V, \mathbb{Q})(r) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{gr}^0 H^l(T_i, \mathbb{Q}), \omega \mapsto (\{t \Sigma_i(\omega)\})_i$$

が単射になる。

$(*: \text{曲線の積}, \ell, 0)$ は勿論, 恒に正しい。容易に,

$$(i) \quad (*: V \times V', \ell, r) \Rightarrow (*: V, \ell, r);$$

$$(ii) \quad (*: V', \ell, r) \text{ が成立し, } V' \text{ から } V \text{ の有限射があれば } (*: V, \ell, r);$$

(iii) $(*: V', \ell, 0)$ が成立し, V' から V への支配的有理写像が存在すれば, $(*: V, \ell, 0)$ 。特に $(*: V, \ell, 0)$ は V について双有理不変な性質である。従って, Abel 多様体, Fermat 超曲面については, $(*: V, \ell, 0)$ が成立する。

$\ell=1$ に関しては, Hypoth $(V; r, 1)$ から $(*: V, 1, r)$ が従う, 特に, 曲線, 曲面, Abel 多様体, 非特異超曲面の積に対しては

$(\ast: V, l, r)$ が任意の r に対して正しい。

なお, $\mathrm{gr}^r H^{2r+l}(V, \mathbb{Q}) = 0$ ならば, $(\ast: V, l, r)$ が成立することを注意しておく。

系 3.7. $(\ast: V', l, g)$ が正しいと仮定する。 $z \in \mathrm{CH}^g(V' \times V)$ に対して,

$$o = [z] : \mathrm{Gr}^l \mathrm{CH}_g(V') \rightarrow \mathrm{Gr}^l \mathrm{CH}_r(V)$$

ならば

$$o = \iota^* z : \mathrm{gr}^r H^{2r+l}(V, \mathbb{Q})(1) \rightarrow \mathrm{gr}^g H^{2g+l}(V', \mathbb{Q})(g)$$

である。

3.8. $\mathcal{E}(l)$ の中で, $(\ast: V, l, r)$ が成立する V に対する $\mathrm{Gr}^l \mathrm{CH}_r(V)$ によって生成される擬Abel部分圏を $\mathcal{E}(l)'$ と書く。もっと精確にいうと, この様な $\mathrm{Gr}^l \mathrm{CH}_r(V)$ の和を対象とする $\mathcal{E}(l)$ の $\mathbb{Q}$ -加法部分圏の擬Abel包は $\mathcal{E}(l)$ の充満部分圏となり, これを $\mathcal{E}(l)'$ と記す。

系 3.7 は, $z, z' \in \mathrm{CH}^g(V' \times V)$ に対して $[z] = [z'] \Rightarrow \iota^* z = \iota^* z'$ と書けるから,

系 3.8.1. 加法的反変関手

$$\gamma: \mathcal{E}(l)' \rightarrow \mathrm{Hdg}(l), \quad \mathrm{Gr}^l \mathrm{CH}_r(V) \mapsto \mathrm{gr}^r H^{2r+l}(V, \mathbb{Q})(r)$$

は, well-defined である。

関手 $\gamma: \mathcal{E}(l)' \rightarrow \mathrm{Hdg}(l)$ によって, $\mathcal{E}(l)'$ の程度 $\mathcal{E}(l)'$ の性質は, Hodge 構造の性質に精確に反映されるかということが問題になる。

$$\mathrm{Hypoth}(V; r, l): N^r H^{2r+l}(V, \mathbb{Q}) \times N^{m-r-l} H^{2m-2r-l}(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2m}(V, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

は, 非退化。

であつたことを思い出そう。

定理 3.9. $\ell \leq 2$ とし, $\text{Hypoth}(V: r, \ell)$ を仮定する. $z \in \text{CH}^{m+\ell}(V \times V)$ に対して, z が引起す

$$\text{写像: } \text{gr}^{\ell} H^{2m+\ell}(V, \mathbb{Q})(r) \longrightarrow \text{gr}^{\ell} H^{2\ell}(V', \mathbb{Q})(g)$$

が零ならば

$$0 = [z]: \text{Gr}^{\ell}(\text{H}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\ell}(V')) \longrightarrow \text{Gr}^{\ell}(\text{H}_r(V)).$$

2.14 で触れた様に $z \in \text{HCH}^{m+\ell}(V' \times V)$ ならば, $[z] = 0$ である。

そこで証明は, 本質的には, $[z] = 0$ ならば z が $\text{HCH}^{m+\ell}(V' \times V)$ の元に "近い" ことを示すことにより行なわれる。

3.10. Abel-Jacobi 写像により自然に $F^1 \text{CH}^p(V) \subset \text{HCH}^p(V) \rightarrow T^p(V)$ が定義され, その像 $J_{\alpha}^p(V) (= J_{\mathbb{P}}^p(V))$ は, 複素 torus $T^p(V)$ の Abel 部分多様体になる: $F^1 \text{CH}^p(V) \twoheadrightarrow J_{\alpha}^p(V)$ 。さて

$$\bar{H} * F^1 \text{CH}^p(V) \subset \bar{H} * \text{HCH}^p(V) \subset J \text{CH}^p(V) = \text{Ker}(\text{HCH}^p(V) \rightarrow T^p(V))$$

(cf. 2.17) 故, $\text{Gr}^1 \text{CH}^p(V) \twoheadrightarrow J_{\alpha}^p(V)$ が引起される。これについて

系 3.10.1. $\text{Hypoth}(V: r, 1)$ が成立するならば,

$$\bar{H} * F^1 \text{CH}_r(V)_{\mathbb{Q}} = ((F^1 \cap H * \bar{H}) \text{CH}_r(V))_{\mathbb{Q}} = ((F^1 \cap J) \text{CH}_r(V))_{\mathbb{Q}},$$

従つて

$$\text{Gr}^1 \text{CH}_r(V)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow J_{\alpha}^q(V)_{\mathbb{Q}}.$$

更に Abel-Jacobi 写像が引起す $F^1 \text{CH}_r(V)_{\text{tors}} \rightarrow J_{\alpha}^q(V)_{\text{tors}}$ ($(?)_{\text{tors}} = ?$ の torsion 部分) が同型ならば,

$$\bar{H} * F^1 CH_r(V) = (F^1 \cap H * \bar{H}) CH_r(V) = (F^1 \cap J) CH_r(V)$$

であり, $Gr^1 CH_r(V) \cong J_r^A(V)$. 特に, $r=0, m, m-1, m-2$ の時, こうなっている。

注意 3.11. 従って $H * \bar{H} CH_0(V) = \text{Ker}(H CH_0(V) \rightarrow \text{Alb } V)$ である。

2.14 によって, 0-cycle に対して

$$I \supset H \supset H * \bar{H} \supset H * \bar{H}^{*2} \supset \dots \supset H * \bar{H}^{*l} \supset H * \bar{H}^{*(l+1)} \supset \dots$$

は, $(H * \bar{H}^{*m} CH_0(V) = 0$ を除いて) 予想 0.3 を充している。この filtration は, torsion を除いて filtration $\bar{H}^{*l} CH_0(V) \subset CH_0(V)$ と一致する。

3.12. さて定理 3.9 を函手 γ の言葉で言い表わす爲に, 次の様な圏 $\mathcal{C}(l)'' \subset \mathcal{C}(l)'$ を導入する: $\mathcal{C}(l)''$ は, $(\psi: V, l, n)$ と $\text{Hypoth}(V; n, l)$ を充す V に対する $Gr^1 CH_r(V)$ で生成された $\mathcal{C}(l)'$ の凝 Abel 部分圏とする (精確には, $\mathcal{C}(l)'$ を構成した時と同様に $\mathcal{C}''(l)$ を構成する)。($\psi: V, l, 0$) を充す時, $Gr^1 CH_0(V) \in \text{ob } \mathcal{C}(V)''$ である。

系 3.13. $l \leq 2$ に対して, 加法的反変函手 $\gamma: \mathcal{C}(l)''^o \rightarrow \text{Hdg}(l)$ は, 忠実である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(l) & \xrightarrow{?} & \\ \cup & \searrow & \\ \mathcal{C}(l)' & \xrightarrow{\gamma} & \text{Hdg}(l) \\ \cup & \nearrow & \\ \mathcal{C}(l)'' & \xrightarrow{\text{忠実}} & \end{array}$$

3.14. 一般に Hodge 予想を仮定する (V, V' に対する "47" ない) と, 定理 3.9 は, $\ell > 2$ に対しても言える. この場合 $\text{Hypoth}(V: r, \ell)$ が恒に成立し, 従って $\tilde{E}(\ell)' = \tilde{E}(\ell)''$. そして

$$\begin{aligned} \text{gr}^r H^{2\ell}(V', \mathbb{Q})_{(g)} &\cong G^r H^{2\ell}(V', \mathbb{Q})_{(g)} \subset H^{2\ell}(V', \mathbb{Q})_{(g)} \\ \text{gr}^r H^{2\ell}(V, \mathbb{Q})_{(r)} &\cong G^r H^{2\ell}(V, \mathbb{Q})_{(r)} \subset H^{2\ell}(V, \mathbb{Q})_{(r)} \end{aligned} \quad (\text{cf. 1.12})$$

は, 夫々 Hodge 構造の直和因子になっているから, Hodge 構造の射

$$\varphi: \text{gr}^r H^{2\ell}(V, \mathbb{Q})_{(r)} \rightarrow \text{gr}^s H^{2\ell}(V', \mathbb{Q})_{(g)}$$

は Hodge 構造の射 $H^{2\ell}(V, \mathbb{Q})_{(r)} \rightarrow H^{2\ell}(V', \mathbb{Q})_{(g)}$ に拡張される。

Hodge 予想によれば, この Hodge 構造の射は, 代数的 cycle $\gamma \in \text{gr}^{p+q} H^{2p+2q}(V \times V', \mathbb{Q})_{(g)}$ によって引起されるから

$$[\gamma]: G^{\ell} CH_{\ell}(V') \rightarrow G^{\ell} CH_{\ell}(V)$$

の函数 γ による像が φ となる。従って Hodge 予想の系として

"予想" 3.14. 1. 加法的反変函数 $\gamma: \tilde{E}(\ell)' \rightarrow \text{Hdg}(\ell)$ は忠実充満である。

γ の本質的像如何になるかについては殆んど何も解らない。

一般の Hodge 予想 1.7 によれば, $H = \text{gr}^r H^{2\ell}(V, \mathbb{Q})_{(r)}$ は性質

" $H(1)$ には, effective な部分 Hodge 構造 $\neq 0$ が存在しない" を

持つことが言え $\gamma(G^2 CH_0(V)) = \text{gr}^0 H^2(V, \mathbb{Q})$ は, Lefschetz により 実際 この性質を背っている。

更に想像を逞しくすれば,

Hope 3.14.2. $\exists \bar{\gamma}: \tilde{\mathcal{C}}(\ell)^0 \xrightarrow{\sim} (\text{niveau } \ell \text{ の motive } \mathcal{C} \text{ の圈}) : \text{圈(反)同値}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\ell)^0 & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & (\text{niveau } \ell \text{ の motive } \mathcal{C} \text{ の圈}) \\ \cup & \searrow & \downarrow H_B \\ \mathcal{C}(\ell)^0 & \xrightarrow{\gamma} & \text{Hdg}(\ell) \end{array}$$

ここで, H_B は 値を Hodge 構造の圈と見做した時の motive の Betti 実現を表わす (niveau ℓ の motive については, cf [12]).

注意 3.14.3. 次の同値可言える:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Gr^2 H_0(V'), Gr^2 H_0(V)) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Hdg}(2)}(gr^0 H^2(V, \mathbb{Q}), gr^0 H^2(V', \mathbb{Q})) : \text{同型} \\ \iff &\left[\begin{array}{l} H^2(V', \mathbb{Q}) \otimes H^{2w-2}(V, \mathbb{Q})(w) \subset H^{2w}(V' \times V, \mathbb{Q})(w) \text{ の中 } \\ \text{Hodge type } (0,0) \text{ の元は, } N^w H^{2w}(V' \times V, \mathbb{Q})(w) \text{ に含まれる, 即ち計数的.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

3.15. $gr^0 H^2(V, \mathbb{Q}) = 0$ であれば ($(\ast; V, 2, 0)$, $\text{Hypoth}(V; 0, 2)$ が成立し), $Gr^2 H_0(V) \in \text{ob } \tilde{\mathcal{C}}(\ell)^0$ は零対象. 従って $Gr^2 H_0(V) = 0$ ($H \ast F^1 H_0(V) \supset F^2 H_0(V)$ は Roitman [11] により $\mathbb{Q}$ -vector 空間).

$$\begin{aligned} gr^0 H^2(V, \mathbb{Q}) = 0 &\iff NS(V)_{\mathbb{Q}} (= H^2(V, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(V)) = H^2(V, \mathbb{Q}) \\ &\iff H^{2,0}(V) = 0 \end{aligned}$$

に注意すると 曲面 S に対する Bloch の予想 [2]

$$b_2(S) = 0 \stackrel{?}{\iff} \text{Ker}(F^1 H_0(V) \rightarrow \text{Alb } V) = 0$$

は, 一般の曲面 V に対して $F^2 H_0(V) = \bar{H} \ast F^1 H_0(V)$, $\bar{H} \ast F^2 H_0(V) = 0$ という "二つの主張に分解" される。さて, Chow 群に入れた我々の "filtration" 3.1.1 を見れば, gap $\bar{H} \ast F^l \supset F^{l+1}$ がある。
 $l=0$ と時には, これは $\bar{H} \supset F^1$ となり 一般に一致しない。

そこで

問題 3.15.1. $l > 0$ を与えた時, 適当な多様体と余次元 p に対して, $\bar{H} \star \bar{H}^l \text{CH}^p(V) \neq F^{l+1} \text{CH}^p(V)$ か?

一方, $r=0$ の時を考えると V が 曲線の種, Abel 多様体 或いは, Fermat 超曲面の時, $F^2 \text{CH}_0(V) = \bar{H} \star F^1 \text{CH}_0(V)$ である。又, 3.11 を考慮すれば,

問題 3.15.2. 一般に $\bar{H} \star F^{l+1} \text{CH}(V) = \bar{H} \star F^l \text{CH}(V) \quad (l \geq 1)$
 $\bar{H} \star F^l \text{CH}_0(V) = F^{l+1} \text{CH}_0(V)$ か?

上の $\bar{H} \star F^2 \text{CH}_0(V) = 0$ の部分を考えれば, 任意の多様体 V に対して, Picard 多様体の理論より $\bar{H} \star F^1 \text{CH}^1(V) = 0$ である。又 Bloch [4] は, K 理論的考察から, 曲面 V について $F^3 \text{CH}_0(V) = 0$ を予想している。更に [3] を見れば,

問題 3.15.3. 一般に $\bar{H} \star F^p \text{CH}^p(V) = 0$ か?

— : — : —

REFERENCES

- [1] Abel, N.: Demonstration d'une propriete generale d'une certaine classe de fonctions transcendentes, J. reine Angew Math. 4(1829), 200-201.
- [2] Bloch, S.: K_2 of artinian $\mathbb{Q}$ -algebra, with application to algebraic cycles, Communications in Algebra, 3(5), 405-428 (1975).

- [3] ————— : Some elementary theorems about algebraic cycles on an abelian variety, *Inv. Math.*, 37(1975), 215-228.
- [4] ————— : An Example in the Theory of Algebraic Cycles, *Lecture Notes in Math.*, 551, Springer.
- [5] ————— : Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Series, IV, 1980.
- [6] ————— : Algebraic cycles and values of L-functions II, *Duke Math. J.* 52(2), 379-397, (1985).
- [7] ——— and Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Scient. ENS*, 74(1974), 181-202.
- [8] Clemens, H.: Homological equivalence modulo algebraic equivalence is not finitely generated, *Publ. Math., IHES*, N° 58(1983), 19-38.
- [9] Griffiths, P. A.: On the periods of certain rational integrals I,II, *Ann. of Math.*, 90(1969), 460-495, 496-541.
- [10] Kleiman, S.: Algebraic cycles and the Weil conjecture, in *Dix exposes sur la cohomologie des schemas*, North-Holland, 1968.
- [11] Roitman, A.: The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence , *Ann. of Math.*, 111(1980), 553-569.
- [12] Saavedra, N.: *Categories Tannakiennes*, *Lecture Notes in Math.* 265, Springer.
- [13] Saito, H.: The Hodge cohomology and cubic equivalences, *Nagoya Math. J.* 94(1984), 1-41.
- [14] ————— : A note on cubic equivalences, to appear in *Nagoya Math. J.* 101(1986), 1-26.
- [15] Samuel, P.: Relations d'equivalence en geometrie algebrique, *Proc. Internl Congress Math.*, 1958.
- [16] Severi, F.: Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza

sulle superficie algebriche, *Commentationes della Pontificia Accad. delle Scienza*(30, Nov. 1941) = Appendice I a *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varieta algebrica*, vol. 3, Edizione Cremonese, Rome, 1959. (This is a summury of his study on algebraic cycles in 1930's.).