

Abel 平均から作らぬ Littlewood-Paley の g -関数と Gauss-Weierstrass 平均から作らぬものと
の同値補間.

東北大教養 金子 誠 (Makoto Kaneko)

座 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とし、その Abel 平均

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t |\xi|} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

から作らぬ平方関数

$$g(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

が、通常、Littlewood-Paley の g -関数と呼ばれている。
Abel 平均を Gauss-Weierstrass 平均

$$w(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

で置きかえて作らぬ平方関数

$$G(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty \left| x \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

も重要である (Calderón-Torchinsky [1]). ここで、 $\mathbb{R}^n$ の点をゴシックであらわし、 $\hat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

である。この二つの平方関数の間には

$$g(f)(x) \leq C G(f)(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

という、点ごとの関係がある (Kaneko-Sunouchi [1]).

この $g(f)(x)$ と $G(f)(x)$ との間を補間するような平方関数を考えるのが本稿の目的である。

1. $g(f)(x)$ と $G(f)(x)$ との間を補間 上半空間 $\mathbb{R}_+^{n+1}$
 $= \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ での Poisson 核 $P_t(x)$ は

$$P_t(x) = t^{-n} P(t^{-1}x), \quad P(x) = c_n (1 + |x|^2)^{-(n+1)/2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

で与えられる。そして、

$$g(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} (P_t * f)(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}.$$

一方、

$$W(x) = e^{-\pi|x|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

とすれば、 $w(x, t) = (W_{\sqrt{\pi t}} * f)(x)$ である。ここで、 $W_s(x) = s^{-n} W(s^{-1}x)$ 、平方根数を作る $(0, \infty)$ 上の測度 dt/t は拡大不変であり、

$$G(f)(x) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} (W_t * f)(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

となる。そこで、次のような関数 K^m を導入する([1])。

$$\begin{aligned} K^m(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{m+1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^n e^{-t^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|x|t) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

こゝで、 $V_\nu(z) = \bar{J}_\nu(z)/z^\nu$ であり、 $\bar{J}_\nu$ は Bessel 関数である。
 として、

$$(1.1) \quad g_{K^m}(f)(x) = \left[\int_0^\infty \left| \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \{ (K^m)_\sigma * f \}(x) \right|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} \right]^{1/2}$$

とおく。容易に

$$g(f)(x) = g_{K^0}(f)(x), \quad G(f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} g_{K^1}(f)(x)$$

がわかる。そして次の結果が得られる。

Proposition 1 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、各点 x で

$$g(f)(x) \leq C_{m_1} g_{K^{m_1}}(f)(x) \leq C'_{m_1, m_2} g_{K^{m_2}}(f)(x) \leq C''_{m_2} G(f)(x)$$

となるような定数 $C_{m_1}, C'_{m_1, m_2}, C''_{m_2}$ が存在する。こゝで、

$0 \leq m_1 < m_2 \leq 1$. $C_{m_1}, C'_{m_1, m_2}, C''_{m_2}$ は n, m_1, m_2 で定まる。

P と W の間の補間として、 σ -分布の確率密度関数を考えるのも自然なことのうに思われる。

$$T^\nu(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi}^\nu \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{|x|^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}$$

とおけば、 $T^n(x) = c'_n P_{\overline{n}}(x)$ であり、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T^\nu(x) = c_1 W(\frac{x}{c_2})$.
この T^ν を用いて

$$g_{T^\nu}(f)(x) = \left[\int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} \{ (T^\nu)_t * f \}(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right]^{1/2}$$

とおく。すると次のような関係がわかる。

Proposition 2 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とすれば、

$$n \leq \nu < \infty, \quad 0 < m \leq 1$$

に対して、すべての点 x において

$$g(f)(x) \leq C_\nu g_{T^\nu}(f)(x) \leq C'_{\nu,m} g_{K^m}(f)(x) \leq C''_{\nu,m} G(f)(x)$$

となる。 n, ν, m で定まる定数 $C_\nu, C'_{\nu,m}, C''_{\nu,m}$ が存在する。

$P_t(x)$ は $\mathbb{R}_+^{n+1}$ での Laplace の方程式に関係しており、
 $W_{2\sqrt{\pi t}}(x)$ は 熱方程式と関係している。 $K^{m,\delta}(x)$ を

$$K^{m,\delta}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-e^{i\delta} |\xi|^{m+1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

で定義すれば、 $K^{0,0}(x) = P_{\sqrt{2\pi}}(x)$, $K^{1,0}(x) = \overline{W}_{\sqrt{\pi}}(x)$ であり、 $K^{0,\pi/2}(x)$ (または $K^{0,-\pi/2}(x)$) は波動方程式 $\partial^2 u / \partial t^2 = \Delta_x u$ の解である。 $K^{m,\delta}$ を K^m のかわりに用いて (1.1) で定義される平方関数 $g_{K^{m,\delta}}(f)(x)$ を考えるのも自然かと思う。 $g_{K^{m,\delta}}(f)(x)$ と先に導入されている平方関数の間の関係は Prop. 1, 2 のような形のものも得られる。これについては最後の節で触れる。

2. Proposition 1 の証明 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ を固定し、 $0 \leq m \leq 1$ を考える。

$$\theta(t) = \theta(t; x, f) = \int_{S^{n-1}} -t y' \cdot \nabla f(x - t y') d\sigma(y'),$$

$$\Theta(x) = \Theta(x; x, f) = \theta(e^x; x, f)$$

とおく。ここで、 $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$, $\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ であり、 $d\sigma$ は $\mathbb{R}^n$ での単位球面の面積要素である。さらに、

$$x^m(x) = e^{-nx} k^m(e^{-x}),$$

$$k^m(s) = (2\pi)^{n/2} \int_0^\infty t^n e^{-ts^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi st) \frac{dt}{t}$$

とおく. すると, $K^m(x) = k^m(|x|)$ であり,

$$\begin{aligned} \{(K^m)_t * f\}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K^m(y) f(x - ty) dy \\ &= \int_0^\infty s^n k^m(s) \frac{ds}{s} \int_{S^{n-1}} f(x - tsy') d\sigma(y') \end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned} t \frac{\partial}{\partial t} \{(K^m)_t * f\}(x) &= \int_0^\infty \theta(ts) \cdot s^n k^m(s) \frac{ds}{s} \\ &= \int_{-\infty}^\infty \theta(e^{x-y}) e^{-ny} k^m(e^{-y}) dy \\ &= (\theta * \kappa^m)(x) \quad (t = e^x) \end{aligned}$$

従って,

$$(2.1) \quad \{g_{K^m}(f)(x)\}^2 = \int_{-\infty}^\infty |\kappa^m * \theta(x)|^2 dx$$

$$= \sup_{A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \|A\|_2 \leq 1} \left| \int_{-\infty}^\infty \kappa^m(y) (\check{\theta} * A)(y) dy \right|.$$

$z > 0$. $\check{\theta}(x) = \theta(-x)$. そこで, $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ を一つとり,

$$\begin{aligned} (2.2) \quad F(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy} \kappa^m(y) (\check{\theta} * A)(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zy} \kappa^m(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(-\xi) \hat{A}(\xi) e^{2\pi i y \xi} d\xi \end{aligned}$$

とおく. $\kappa^m(s)$ の定義より,

$$|\kappa^m(s)| \leq C \quad (0 < s \leq 1), \quad \leq C s^{-1} \quad (1 \leq s < \infty)$$

がわかる. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ としてゐるから, $\forall N > 0$ に対して

$$|\theta(t)| \leq C t^2 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \leq C t^{-N} \quad (1 \leq t < \infty)$$

が得られる. $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ であるから

$$(|\check{\theta}| * |A|)(y) \leq C e^{-2y} \quad (y > 0), \quad \leq C e^{Ny} \quad (y < 0).$$

これから次のとおり.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|)^{\eta|y|} |\chi^m(y)| (|\hat{G}| * |A|)(y) dy < \infty \quad (\eta < n+2),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{zy} \chi^m(y) \hat{G}(-\xi) \hat{A}(\xi) e^{2\pi i y \xi}| dy d\xi < \infty$$

$$(n-1 < \operatorname{Re} z < n)$$

かわかる。上のことから (2.2) で定義される F は複素 z -
平面の $-(n+2) < \operatorname{Re} z < n+2$ で解析的であることがわかる。
そして、(2.2) における累次積分の順序交換が許されて

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(-\xi) \hat{A}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \chi^m(y) e^{(z+2\pi i \xi)y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}^m(n-z-2\pi i \xi) \hat{G}(-\xi) \hat{A}(\xi) d\xi \\ &\quad (n-1 < \operatorname{Re} z < n) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\hat{k}^m(z) = \int_0^{\infty} t^z k^m(t) \frac{dt}{t}.$$

$0 < \operatorname{Re} z < \frac{n+1}{2}$ なる z に対して $\hat{k}^m(z)$ は次のように
計算できる。

$$\begin{aligned}
\hat{k}^m(z) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}-z} \int_0^\infty t^z \frac{dt}{t} \int_0^\infty s^n e^{-s^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi ts) \frac{ds}{s} \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}-z} \int_0^\infty s^{n-z} e^{-s^{m+1}} \frac{ds}{s} \int_0^\infty u^z V_{\frac{n}{2}-1}(u) \frac{du}{u} \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}-z} \Gamma(\frac{z}{2})}{(m+1) 2^{\frac{n}{2}-z} \Gamma(\frac{n-z}{2})} \int_0^\infty v^{\frac{n-z}{m+1}} e^{-v} \frac{dv}{v} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}-z}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{z}{2}) \Gamma(\frac{n-z}{m+1})}{\Gamma(\frac{n-z}{2})}
\end{aligned}$$

こゝで三番目の等号の所では Weber の公式 ([, p.391, (1)]) を用いている。 $n-1 < \operatorname{Re} z < n$ であれば、 $0 < \operatorname{Re}(n-z-2\pi i\xi) < 1 \leq (n+1)/2$ であるから、

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\pi^{-\frac{n}{2}+z+2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{z}{2}-i\pi\xi) \Gamma(\frac{z+i2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(\frac{z}{2}+i\pi\xi)} \hat{\theta}(-\xi) \hat{A}(\xi) d\xi \\
&\quad (n-1 < \operatorname{Re} z < n)
\end{aligned}$$

が成立することになる。ところで右辺は $-(m+1) < \operatorname{Re} z < n$ で解析的であり、 $F(z)$ は $-(n+2) < \operatorname{Re} z < n+2$ で解析的であったから、上の等式は $-(m+1) < \operatorname{Re} z < n$ で成立することになる。特に $z=0$ で成立する。従って、

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} x^m(y) (\check{\mathcal{G}} * A)(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^{-\frac{n}{2}+2\pi i \xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-i\pi \xi) \Gamma(i\frac{2\pi \xi}{m+1})}{\Gamma(i\pi \xi)} \hat{\mathcal{G}}(-\xi) \hat{A}(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

を得る。 $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ の任意性から

$$\left\{ g_{km}(f)(x) \right\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}-2\pi i \xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi \xi) \Gamma(i\frac{2\pi \xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi \xi)} \hat{\mathcal{G}}(\xi) \right|^2 d\xi$$

が得られる。 Γ -関数の零点を持つこと、Stirling の公式
により、

$$(2.3) \quad \left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}+2\pi i \xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi \xi) \Gamma(-i\frac{2\pi \xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi \xi)} \right| \approx (|\xi|)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\pi^2 \frac{|\xi|}{m+1}}$$

という評価が得られる。ここで、 ξ の関数 $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ が
 $\psi_1(\xi) \approx \psi_2(\xi)$ であるとは、 $C\psi_1(\xi) \leq \psi_2(\xi) \leq C'\psi_1(\xi)$ ($-\infty < \xi < \infty$) となる正定数 C, C' が存在することとする。以上のこと
から Proposition 1 の結論が得られる。

3. Proposition 2 の証明 $C_\nu = \Gamma(\frac{\nu+1}{2})/\sqrt{\pi\nu} \Gamma(\frac{\nu}{2})$ とし、

$$\tau^\nu(x) = C_\nu \left(1 + \frac{e^{-2x}}{\nu} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-nx}$$

とおけば、前節の (2.1) と同様に

$$\{g_{T^{\nu}}(f)(x)\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(\tau^{\nu} * f)(x)|^2 dx$$

が得られる。そして、この場合、 $\nu > n-1$ なる ν に対しては $\hat{\tau}^{\nu}(\xi)$ が次のように直接計算ができる。

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{\nu}(\xi) &= c_{\nu} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} t^{n+2\pi i \xi} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\nu^{\frac{n-1}{2}}}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \nu^{i\pi|\xi|} \Gamma\left(\frac{n}{2} + i\pi\xi\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-n}{2} - i\pi\xi\right) \\ &\approx (1+|\xi|)^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\pi^2|\xi|} \end{aligned}$$

そして、最後の評価と (2.3) とより、Proposition 2 の結論が得られる。

4. $K^{m,\delta}$ から作られる g -関数 (1.1) において K^m を $K^{m,\delta}$ で置き換えて作られる平方関数を $g_{K^{m,\delta}}(f)(x)$ とおく。 $k^m(s)$ のかわりに、

$$k^{m,\delta}(s) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} t^n e^{-e^{i\delta} s^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi s t) \frac{ds}{s}$$

を考え、 $\hat{k}^m(z)$ の計算を出せば

$$\begin{aligned}\hat{k}^{m,\delta}(z) &= \int_0^\infty t^z k^{m,\delta}(t) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}-z}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{z}{2}) \Gamma(\frac{n-z}{m+1})}{\Gamma(\frac{n-z}{2})} e^{-i\delta z}\end{aligned}$$

$$\left(m > -1, -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}, 0 < \operatorname{Re} z < \frac{m+1}{2} \right)$$

が得られる。そして、2節と同様の解析接続を考えて、上の z が $n+2\pi i\xi$ のときが問題となる。

$$\begin{aligned}\{g_{k^{m,\delta}}(f)(\omega)\}^2 &= \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}-2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi\xi) \Gamma(-i\frac{2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi\xi)} e^{-i\delta(n+2\pi i\xi)} \right. \\ &\quad \left. \times \hat{G}(\xi) \right|^2 d\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}-2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi\xi) \Gamma(-i\frac{2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi\xi)} e^{-i\delta(n+2\pi i\xi)} \right| \\ & \approx (1+|\xi|)^{\frac{m-1}{2}} e^{-\pi^2 \frac{|\xi|}{m+1}} e^{2\pi\delta\xi}\end{aligned}$$

となる。 $e^{2\pi\delta\xi}$ の掛り、(2.3)と比較ができる。

参考文献

- [1] A.P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, *Adv. in Math.*, 16 (1975), 1-64.
- [2] B.I. Golubov, On the summability method of Abel-Poisson type for multiple Fourier integrals, *Math. USSR-Sb.*, 36 (1980), 213-229.
- [3] M. Kaneko and G. Sunouchi, On the Littlewood-Paley and Marcinkiewicz functions in higher dimensions, *Tôhoku Math. J.*, 37 (1985), 343-365.
- [4] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1966.