

2002.7.30

京都大学数理解析研究所

研究集会

古今算法記の遺題について

竹之内 脩

1 古今算法記

古今算法記は、1671 年、沢口一之によって著された。

巻 1 ～ 巻 3 は、日常生活の数学

巻 4 ～ 巻 6 は、算法根源記の答術

巻 7 は 遺題 15 問（自問一十五好）

から成る。

巻 4 ～ 巻 6 は、佐藤正興著、算法根源記 (1669) の遺題に解答を与えたものである。著者はここで日本ではじめて本格的に天元術を使用して解答を与えた。天元術は、目的とする数量を未知数として代数方程式を立てて解を求めるもので、これによって、代数学が研究されるようになった。

沢口は、それ以前の諸例にならって問題を遺す、として、15 問の遺題を与えているのであるが、これは、なかなかの難問ぞろいであった。その問題の半数以上は、3 乗の形で条件が与えられ、この条件をどのように活用するかが問題であった。これについて、関孝和は、その著発微算法の序文で次のように述べている。

古今算法記は遺題 15 問を設けて、解答を明らかにしていない。それ以来、多数の算者がこれを手にしたが、その理は高遠で悟りがたく、苦しんだ。そして、未だに解答した書物はないのである。私はかつて算学に志したので、その理の深い意味を明らかにして、術式を述べた。……私の門弟の学徒らがみなぜひ版木に刻して、その術を広めよという。よって、求めに応じて出版する。

この解答は、

関孝和、 発微算法、 1674

田中由真、 算法明解、 1678

によって与えられた。

2 三乗化

三乗化というのは、

$$x + y + z = 0$$

から、

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

を導くものである。

三乗化の術語 (?) は、

小川東、関孝和「発微算法」－現代語訳と解説、大空社、1994

による。

どのようにしてこれを導いたのかは問題である。

私は、1670 年の頃、大阪に、橋本正數という算者がおり、この人を中心としたスクールに多くの人が集まり、その中で、この手法が見いだされたものと考えている。このスクールの中に沢口も属していた。実際、当時のことを書いた書物の中に、次のようにある。

橋本伝兵衛正數。住大坂……正數与其門人大坂烏屋町の住沢口三郎左衛門
一之相共作古今算法記。行于世。此本邦以天元術著書之始也。
(三上義夫による)

ここでは、古今算法記は、橋本正數と、沢口一之の合作というように書かれているけれども、古今算法記には、橋本正數の名前をいっていない。しかし、このスクールの中でこの手法は、いろいろ論じられ、これを使った問題集をつくろう、というのが、この古今算法記の遺題の動機であったと思われる。

実際、この第 2 問に、次のものがある。

大きな立方体と小さな正方形が一つずつある。

只云う。正方形の面積の 3 乗根と、立方体の体積の平方根を併せると、1 尺である。

別に、正方形の 1 辺の長さと、立方体の 1 辺の長さの和は 7 寸である。

正方形の 1 辺の長さ、立方体の 1 辺の長さはいくらか。

この解は、次のようにするのが自然であると思う。

正方形の 1 辺の長さを x 、立方体の 1 辺の長さを y 、
また、只云数 $= a$ 、別云数 $= b$ とする。

そうすると、与えられた条件は、

$$\begin{cases} a = (x^2)^{1/3} + (y^3)^{1/2} \\ b = x + y \end{cases}$$

である。

$$a = (x^2)^{1/3} + (y^3)^{1/2}$$

からは、移項して 2 乗すると、

$$y^3 = a^2 - 2ax^{2/3} + x^{4/3}$$

したがって、

$$x^{4/3} - 2ax^{2/3} + a^2 - y^3 = 0$$

となる。これに 3 乗化を施せば、

$$x^4 - 8a^3x^2 + (a^2 - y^3)^3 + 6ax^2(a^2 - y^3) = 0$$

となる。これに

$$y = b - x$$

を代入すれば、 x の 9 次方程式ができる。

これは、初歩的な、あるいは基本的な問題で、まるで三乗化の最初の例題のようなものである。ところが、関も田中も、この問題のあとでは、さまざま三乗化の方法を使って厄介な問題に解を与えているのに、この問題に対しては、三乗化とは無関係な、全く違った方法で解を与えているのである。これをどう解釈するか。

私は、一つの解釈として、次のように考えている。

関も田中も、同じ橋本のスクールにいて、この問題は知悉していた。そして、沢口は、一つの例題的な感覚で、これを問題集の中にとり入れた。関も田中も、そのことは十分承知で、それではそれと違う方法でやってやろうではないか、と挑戦したものであろう。もちろん関がそれに先鞭をつけたので、田中は、それでは俺も、としたのに相違ない。

なお、この発微算法の解を批判した佐治^{かず}一平は、次の解を与えている。(1681)

$$\begin{aligned} b - y &= x \\ a - (y^{1/2})^3 &= (x^2)^{1/3} \quad \dots (*) \\ x^2 &= (*)^3 \end{aligned}$$

すなわち、

$$(b - y)^2 = (a - (y^{1/2})^3)^3$$

として、 y に関する方程式を得る。

これはきわめて単純、明解な解である。

3 傍書術

古今算法記の遺題では、前節に示したように、 a, b として具体的な数が与えてある。発微算法では、この数字を挙げておきながら、解答にはそれに一切触れず、どんな数でも成り立つようになっている。算法明解では、問題文には数値を挙げず、若干といてある。

天元術は、もともと数値を与えて、それを使って方程式をつくるので、このように数値無しの文字ばかりでは、立式の仕様がでないわけである。

特にここでは、二つの未知数が使われる。前節の例では、 x と y で、そのほかに a, b などの文字もはいつてくる。

このために、天元術で縦棒の脇に書く数値のところに、文字を書く方式が発明された。これが傍書術である。

これは、まだこれらの書、発微算法、算法明解では explicit には示されていないが、後の解見題之法、算学紛解では、明瞭に使われている。

この方法は、関は傍書術とよんでいるのだが、後に関流では、點竄術とよんでいる。

4 消去法

二つの未知数を含んだ二つの式から、一方の未知数を消去して、一つの未知数の方程式（開方式）を導いて解を求める。その方式が使われている。

第 5 問は、次のものである。

五つの立方体 甲、乙、丙、丁、戊 がある。

只云う。甲の体積 + 乙の体積 = 700 坪

又云う。丙の体積 + 丁の体積 + 戊の体積 = 500 坪

甲、乙、丙、丁、戊の各一辺の長さを求めよ。

甲、乙、丙、丁、戊方面差、同寸。

解は次のようになっている。

甲の一辺 x 、乙の一辺 y 、丙の一辺 z 、丁の一辺 w 、戊の一辺 v

また、甲、乙、丙、丁、戊方面差を d とする。

条件は、

$$x^3 + y^3 = a \text{ (先云数)} \quad z^3 + w^3 + v^3 = b \text{ (又云数)}$$

$$w := v + d \quad z := v + 2d \quad y := v + 3d \quad x := v + 4d$$

天元 = v とする。そして、

$$u: = v^3$$

$$t: = 3a + 15u - 7b$$

$$s: = -9a + 91b - 255u$$

とし、

$$\text{左:} = 21,829,500u^2t + 365,010ut^2 + 177,330uts$$

$$\text{右:} = 6,600us^2 + 49s^3$$

を作れば、左 = 右 として、開方式 9 次方程式を得る。

これが関の与えた解であるが、これだけでは何をやっているのか、わからない。これを解釈していこう。

まず、 a, b を、 v と d の式として書き下ろす。

$$a = 91d^3 + 75d^2v + 21dv^2 + 2v^3$$

$$b = 9d^3 + 15d^2v + 9dv^2 + 3v^3$$

この二式から、 dv^2 の項、 d^3 の項を消去した式をつくる。 v^3 の項は左辺に移す。

$$t = 3a - 7b + 15v^3 = 210d^3 + 120d^2v$$

$$s = -9a + 91b - 255v^3 = 690d^2v + 630dv^2$$

そして、 d の多項式として、高次の項から、順に係数が一致するように変形していく。

t が 3 次式、 s が 2 次式であるから、 t^2, s^3 をつくることから始める。

$$\begin{aligned} r1 &= 30 \times 23^3 t^2 v^3 &= 16,096,941,000 d^6 v^3 + 18,396,504,000 d^5 v^4 \\ &\quad (30 \times 23^3 = 365,010) &&+ 5,256,144,000 d^4 v^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s1 &= 7^2 s^3 &= 16,096,941,000 d^6 v^3 + 44,091,621,000 d^5 v^4 \\ &&&+ 40,257,567,000 d^4 v^5 + 12,252,303,000 d^3 v^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r2 &= r1 + 177,330 t s v^3 &= 16,096,941,000 d^6 v^3 + 44,091,621,000 d^5 v^4 \\ &&&+ 43,399,827,000 d^4 v^5 + 13,406,148,000 d^3 v^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s2 &= s1 + 6,600 v^3 s^2 &= 16,096,941,000 d^6 v^3 + 44,091,621,000 d^5 v^4 \\ &&&+ 43,399,827,000 d^4 v^5 + 17,990,343,000 d^3 v^6 + 2,619,540,000 d^2 v^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r3 &= r2 + 21,829,500 v^6 t &= 16,096,941,000 d^6 v^3 + 44,091,621,000 d^5 v^4 \\ &&&+ 43,399,827,000 d^4 v^5 + 17,990,343,000 d^3 v^6 + 2,619,540,000 d^2 v^7 \end{aligned}$$

この結果、 $s2$ と $r3$ の右辺が同じ式になった。この左辺を書いたものが、

$$\text{左} \quad 21,829,500u^2t + 365,010ut^2 + 177,330uts$$

$$\text{右} \quad 6,600us^2 + 49s^3$$

建部賢弘は、発微算法演段諺解において、右辺どうし引き算しながら右辺を 0 にしていく方法を述べているが、私は、上のように右辺に同じものができるように変形していくのが、他の諸問題の解答を見て、正当な解釈であると思う。

5 解伏題之法（関）、雙式一貫之術（田中）

前節に述べた二つの未知数の二つの式から、一方の未知数を消去して最終的な方程式（開方式）をつくる組織的な議論を、関は解伏題之法、田中は算学紛解の中の雙式一貫之術において展開している。この両者の稿本は、ともに 1683 年に作られたと見られるが、正確なことはわからない。

この田中の議論が、実は、前節の第 5 問の解に用いられているのではないかと考えるものである。

$$y^3 = a - x^3 \text{ である。}$$

$$b + 36x^3 = t^3 \text{ とする。}$$

$$970,299y^9 + 94,500x^3y^6 + 3,375,000x^6y^3 + 297t^6y^3$$

→ 左

$$94,500x^3y^3t^3 + 29,403y^6t^3 + t^9$$

→ 右

左 = 右 として、 x に対する開方式 9 次方程式を得る。

これも、これだけでは何をやっているのか、わからない。これを解釈していこう。

$$x = y + d$$

$$x^3 = y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3$$

$$\therefore d^3 + 3yd^2 + 3y^2d + (y^3 - x^3) = 0 \quad \text{①}$$

$$b = (y - d)^3 + (y - 2d)^3 + (y - 3d)^3$$

$$= 3y^3 - 18dy^2 + 42d^2y - 36d^3$$

$$b + 36x^3 = 39y^3 + 90dy^2 + 150d^2y \quad (= t^3 \text{ とおく})$$

$$\therefore 150yd^2 + 90y^2d + (39y^3 - t^3) = 0 \quad \text{②}$$

この d に関する二つの方程式 ①, ② から d を消去した式を作る。それを終結式というが、これは、雙式一貫之術に述べられている。

$$2 \text{ 次方程式} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{と}$$

3 次方程式 $dx^3 + ex^2 + fx + g = 0$ と

から x を消去した式 —終結式— は、

正の項 $a^3g^2, a^2cf^2, ab^2eg, 3abcdg, ac^2e^2, b^2cdf, c^3d^2$

負の項 $a^2bfg, 2a^2cdg, abcdf, b^3dg, 2ac^2df, bc^2de$

を加えたものになる。

これを、上の ①, ② に適用すると、以下のようにになる。左側がプラスのもの、右側がマイナスのもの。

$$\begin{array}{ll}
 (150y)^3(y^3 - x^3)^2 & (150y)^2(90y^2) \times 3y^2(y^3 - x^3) \\
 (150y)^2(39y^3 - t^3)(3y^2)^2 & 2 \times (150y)^2(39y^3 - t^3) \times 3y(y^3 - x^3) \\
 (150y)(90y^2)^2 \times 3y(y^3 - x^3) & 150y \times 90y^2(39y^3 - t^3) \times 3y \times 3y^2 \\
 3 \times 150y \times 90y^2(39y^3 - t^3)(y^3 - x^3) & (90y^2)^3(y^3 - x^3) \\
 150y(39y^3 - t^3)^2(3y)^2 & 2 \times 150y(39y^3 - t^3)^2 \times 3y^2 \\
 (90y^2)^2(39y^3 - t^3) \times 3y^2 & 90y^2(39y^3 - t^3)^2 \times 3y \\
 (39y^3 - t^3)^3 &
 \end{array}$$

これを加えて整理する。そして、プラスの項を集めたものが左、マイナスの項を集めたものが右である。

$$\text{左} = 970,299y^9 + 94,500x^3y^6 + 3,375,000x^6y^3 + 297t^6y^3$$

$$\text{右} = 94,500x^3y^3t^3 + 29,403y^6t^3 + t^9$$

6 結語

以上見たように、発微算法、算法明解は、いろいろ新しい手法を展開し、次の時代の基礎を作っていると見られる。これについての、多くの人の研究を待ちたい。