

K3 曲面の周期写像を通して見た Hilbert モジュラー関数

早稲田大学 基幹理工学部数学科 永野中行
Atsuhira Nagano
Department of Mathematics, Waseda University

はじめに

ある K3 曲面族の周期積分を詳しく研究すると、判別式が 5 の実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数との密接に関連する ([N1], [N2], [N3])。これは、楕円曲線と楕円モジュラー関数の古典的な関係の自然な拡張として捉えることが可能である。本稿では、この結果を紹介する。

まず、古典理論を簡単に復習する。複素パラメータ $\lambda \neq 0, 1$ を持つ楕円曲線族 $\{S(\lambda)\}$,

$$S(\lambda) : y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \quad (0.1)$$

を考える。このとき、二重被覆 $S(\lambda) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の 4 つの分岐点が $0, 1, \infty$ と λ で、 λ が楕円曲線のモジュライのパラメータを与えている。 $S(\lambda)$ の正則 1-形式は定数倍を除いて唯一に定まる：

$$\omega = \omega(\lambda) = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}.$$

$S(\lambda)$ のシンプレクティック基底 $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)\} \subset H_1(S(\lambda), \mathbb{Z})$ をとる。ここで、 $0 < \lambda < 1$ のとき、 $\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}$ の分枝を、 $0 < x < \lambda$ ならば $-\mathbb{R}_+$ に、 $\lambda < x < 1$ ならば $\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$ になるように取る。このとき、 γ_1, γ_2 上の周期積分は次のような楕円積分で与えられるとしてよい。

$$\int_{\gamma_1} \omega = 2 \int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}, \quad \int_{\gamma_2} \omega = 2 \int_\lambda^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} \quad (0.2)$$

これらの積分の比を取った

$$z(\lambda) = \frac{\int_{\gamma_2} \omega}{\int_{\gamma_1} \omega} = \frac{\int_{\gamma_2(\lambda)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}}{\int_{\gamma_1(\lambda)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}} \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\} \quad (0.3)$$

を $S(\lambda)$ の周期という。このとき、対応 $\lambda \mapsto z = z(\lambda)$ は多価の解析写像 $\mathbb{C} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{H}$ を与える。

多価周期写像の局所的に一価な分枝 z をひとつ定め、閉曲線 $\alpha \in \pi_1(\mathbb{C} - \{0, 1\}, *)$ に沿って z を解析接続して得られる分枝を z_α とする。一般に多価解析写像を詳細に取り扱うことは容易ではないが、今の場合は次の形の Gauss 超幾何微分方程式

$${}_2E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 : \lambda\right) : \lambda(1-\lambda) \frac{d^2\eta}{d\lambda^2} + (1-2\lambda) \frac{d\eta}{d\lambda} - \frac{1}{4}\eta = 0. \quad (0.4)$$

を利用した詳細な考察が可能である。なぜならば、この線形微分方程式の解空間の次元は複素 2 次元であり、その一次独立解として 2 本の楕円積分 $\int_{\gamma_1} \omega, \int_{\gamma_2} \omega$ が取れるからである。Gauss 超幾何微分方程式の Schwarz 写像の理論 (藤原 [F], 吉田 [Y] 等を参照) を経由することによって、周期写像 (0.3) の多価性を知る事ができ、その結果 z と z_α は、主合同部分群 $\Gamma(2)$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の一次変換で結びつくことがわかる:

$$z_\alpha = \frac{az + b}{cz + d}.$$

周期写像 $\lambda \mapsto z(\lambda)$ の逆対応 $\mathbb{H} \ni z \mapsto \lambda(z) \in \mathbb{C}$ は、 $\Gamma(2)$ についてのモジュラー関数を与える。更に、ヤコビのテータ零値

$$\vartheta_{ab}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi\sqrt{-1}\left(n + \frac{a}{2}\right)z + 2\pi\sqrt{-1}\left(n + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\right)$$

による表示

$$\lambda(z) = \frac{\vartheta_{01}^4(z)}{\vartheta_{00}^4(z)} \quad (0.5)$$

を持つ。

今回は、楕円曲線の正則 1-形式の積分にかえて、2つのパラメータを持つある $K3$ 曲面族の周期写像を考える。この周期写像はある線形偏微分方程式によって統制される。すると、この $K3$ 曲面族の周期写像の逆対応が判別式が 5 の 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ についての Hilbert モジュラー関数を与える。この Hilbert モジュラー関数はテータ表示を持つ。さらに、 $K3$ 曲面の塩田・猪瀬構造から得られる Kummer 曲面についての考察も紹介する。

1 $K3$ 曲面族 $\mathcal{F} = \{S((X, Y))\}$

1.1 $K3$ 曲面

Definition 1.1. S をコンパクト複素曲面とする。その標準バンドルが自明であり、更に $H^1(X, \mathcal{O}_S) = 0$ であるとき、 S を $K3$ 曲面という。

$K3$ 曲面の正則 2-形式は定数倍を除いて唯一である。したがって、 $K3$ 曲面は楕円曲線の 2 次元への自然な拡張として認識する事が可能である。

今回用いる $K3$ 曲面の基本性質を簡単にまとめる。まず、ホモロジー群 $H_2(S, \mathbb{Z})$ の階数は 22 である。カップ積により $H_2(S, \mathbb{Z})$ には次のようなユニモジュラーな格子構造が入る:

$$H_2(S, \mathbb{Z}) = E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus U \oplus U \oplus U = L,$$

ただし

$$E_8(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 0 & \\ & & & & & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\{\gamma_1, \dots, \gamma_{22}\}$ を格子 L の生成元とする。このとき、

$$\left(\int_{\gamma_1} \omega : \dots : \int_{\gamma_{22}} \omega \right) \in \mathcal{D}_0 = \{ \xi \in \mathbb{P}^{21}(\mathbb{C}) \mid {}^t \xi M \xi = 0, {}^t \xi M \bar{\xi} > 0 \},$$

を S の周期という。ここで、 $\{\gamma_1^*, \dots, \gamma_{22}^*\}$ を L における $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{22}\}$ の双対基底とし、 $M = (\gamma_j^* \cdot \gamma_k^*)_{1 \leq j, k \leq 22}$ としている。ここで、関係式

$${}^t \xi M \xi = 0 \quad {}^t \xi M \bar{\xi} > 0 \quad (1.1)$$

は Riemann-Hodge 関係式に他ならない。

Remark 1.1. $K3$ 曲面においては *Torelli* 型定理が証明されている。よって、 $K3$ 曲面のモジュライは、 $K3$ 曲面の周期によって与えられる。

Definition 1.2. S の因子たち全体で生成された $H_2(S, \mathbb{Z})$ の部分格子を *Néron-Severi* 格子といい、 $\text{NS}(S)$ と書く。その L における直交補空間 $\text{Tr}(S) = \text{NS}(S)^\perp$ を超越格子という。

Néron-Severi 格子と超越格子は、具体的に $K3$ 曲面の周期を考察する上で極めて重要である。例えば $\gamma \in \text{NS}(S)$ ならば、 $\int_{\gamma} \omega = 0$ となる。

1.2 $K3$ 曲面族 $\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$

楕円曲線 (0.1) の族の代わりに、複素パラメータ $(X, Y) \neq (0, 0)$ をもつ $K3$ 曲面族 $\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$

$$S(X, Y) : z^2 = x^3 - 4y^2(4y - 5)x^2 + 20Xy^3x + Yy^4 \quad (1.2)$$

を考える。

Remark 1.2. $S(X, Y)$ は楕円ファイバー $(x, y, z) \mapsto y$ による楕円曲面として見ている。Figure 1 は楕円ファイバー切断と特異点解消の様子を表している。ただし、 F が一般のファイバー、 O, R

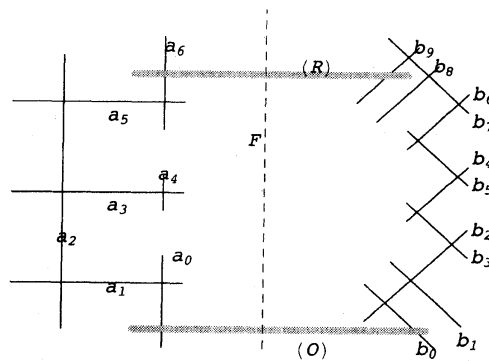


Figure 1: 楕円曲面 $S(X, Y)$

が切断、 $a_0, \dots, a_6, b_0, \dots, b_9$ が特異ファイバー由来の例外因子である。

$\mathcal{F}$ の周期写像・周期領域を得るために必要な Néron-Severi 格子、超越格子の構造は次で与えられる。

Theorem 1.1. (*[N1]*) *generic* な (X, Y) について、 $\text{NS}(S(X, Y))$ の格子構造を表す交点行列は

$$E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$\text{Tr}(S(X, Y))$ の格子構造を表す交点行列は

$$U \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =: A.$$

超越格子の交点行列 A が定める IV 型の Hermite 対称領域

$$\mathcal{D} = \{\xi \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid {}^t\xi A \xi = 0, {}^t\xi A \bar{\xi} > 0\}$$

を考える。 $\mathcal{D}$ は 2 つの連結成分に分かれる： $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$ 。ただし、 $(1:1:-\sqrt{-1}:0) \in \mathcal{D}_+$ をみたすように $\mathcal{D}_+$ を定めた。このとき、双正則写像

$$j: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \simeq \mathcal{D}_+ \quad (1.3)$$

が存在する。

Remark 1.3. 関係式

$${}^t\xi A \xi = 0 \quad {}^t\xi A \bar{\xi} > 0$$

は、*Riemann-Hodge* 関係式 (1.1) が、われわれの *Néron-Severi* 格子 $\text{NS}(S(X, Y))$ にしたがって退化したものと見なされる。

$\mathcal{F}$ の周期写像を具体的に記述すると次のような形になる。 $K3$ 曲面 $S(X, Y)$ の正則 2-形式を $\omega = \omega(X, Y)$ とする。このとき適切な 2-サイクル

$$\Gamma_1 = \Gamma_1(X, Y), \dots, \Gamma_4 = \Gamma_4(X, Y) \in H_2(S(X, Y), \mathbb{Z})$$

が存在して、 $\left(\int_{\Gamma_1} \omega : \int_{\Gamma_2} \omega : \int_{\Gamma_3} \omega : \int_{\Gamma_4} \omega\right) \in \mathcal{D}_+$ となるようにできる。周期写像は、

$$\Phi: (X, Y) \mapsto \left(\int_{\Gamma_1} \omega : \int_{\Gamma_2} \omega : \int_{\Gamma_3} \omega : \int_{\Gamma_4} \omega\right) \quad (1.4)$$

の形で与えられる。これは $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ 上の多価解析写像を定める。

Remark 1.4. 上記のような 2-サイクル $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ が存在し、周期写像 Φ が *well-defined* となる事は自明な事ではない。また、 $\Phi(X_1, Y_1) = \Phi(X_2, Y_2)$ ならば、 $(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$ も成立する。これらの事実は *Torelli* の定理を用いた詳細な議論によって示される。本稿では省略する (詳細は *[N2]*)。

双正則対応 (1.3) との合成により、多変数多価解析写像

$$\begin{aligned} (X, Y) &\mapsto (z_1(X, Y), z_2(X, Y)) \\ &= \left(-\frac{\int_{\Gamma_3} \omega + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \int_{\Gamma_4} \omega}{\int_{\Gamma_2} \omega}, -\frac{\int_{\Gamma_3} \omega + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \int_{\Gamma_4} \omega}{\int_{\Gamma_2} \omega} \right) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

を得る。これは (0.3) の対応物である。

(1.5) の多価性の考察のために、周期積分を解に持つような微分方程式を考えたい。つまり、古典理論における Gauss 超幾何微分方程式 (0.4) の対応物を考えたい。本稿ではこの微分方程式を周期微分方程式と呼ぶ。これは Hodge 構造の変形理論における Gauss-Manin 接続が定める微分方程式を考える事と同じである。

Theorem 1.2. ($[N1]$) $S(X, Y)$ の周期積分 $\int_{\Gamma_1} \omega, \dots, \int_{\Gamma_4} \omega$ は次の微分方程式の一次独立解を与える。

$$\begin{cases} u_{XX} = L_1 u_{XY} + A_1 u_X + B_1 u_Y + P_1 u, \\ u_{YY} = M_1 u_{XY} + C_1 u_X + D_1 u_Y + Q_1 u \end{cases} \quad (1.6)$$

ただし

$$\begin{cases} L_1 = \frac{-20(4X^2 + 3XY - 4Y)}{36X^2 - 32X - Y}, & M_1 = \frac{-2(54X^3 - 50X^2 - 3XY + 2Y)}{5Y(36X^2 - 32X - Y)}, \\ A_1 = \frac{-2(20X^3 - 8XY + 9X^2Y + Y^2)}{XY(36X^2 - 32X - Y)}, & B_1 = \frac{10Y(-8 + 3X)}{X(36X^2 - 32X - Y)}, \\ C_1 = \frac{-2(-25X^2 + 27X^3 + 2Y - 3XY)}{5Y^2(36X^2 - 32X - Y)}, & D_1 = \frac{-2(-120X^2 + 135X^3 - 2Y - 3XY)}{5XY(36X^2 - 32X - Y)}, \\ P_1 = \frac{-2(8X - Y)}{X^2(36X^2 - 32X - Y)}, & Q_1 = \frac{-2(-10 + 9X)}{25XY(36X^2 - 32X - Y)}. \end{cases}$$

Remark 1.5. この周期微分方程式は、 $[N1]$ において、ある GKZ 超幾何微分方程式の部分系として与えられる事が示されている。この周期微分方程式決定の際には周期積分をパラメータの中級数として展開し、中級数が満足する微分方程式を GKZ 超幾何方程式から取り出す直接的な方法をとった。

この周期微分方程式は周期写像の多価性を統制している。周期微分方程式の考察を通して次が示される。

Theorem 1.3. ($[N2]$) 周期写像 (1.5) は、 (X, Y) -空間内の因子

$$Y(1728X^5 - 720X^3Y + 80XY^2 - 64(5X^2 - Y)^2 - Y^3) = 0 \quad (1.7)$$

で位数 2 の分岐をする多価解析的な写像である。そしてこの逆対応

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \ni (z_1, z_2) \mapsto (X(z_1, z_2), Y(z_1, z_2)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (1.8)$$

は、実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ についての対称 Hilbert モジュラー関数 (Definition 2.1 で後述) の組を定める。

Remark 1.6. 微分方程式 (1.6) は、独立変数が 2 つ、解空間の次元が 4 の線形偏微分方程式である。このような微分方程式の研究手法としては正則共型構造の研究が有効である ($[SY], [Sa]$)。正則共型構造は微分方程式の特異点と深い関係にある。 $[N1]/[N2]$ では、周期微分方程式 (1.6) の正則共型構造についての考察を通じて周期写像のモノドロミー群 (則ち周期写像の多価性を示す群) を決定した。なお、周期写像の分岐因子 (1.7) は周期微分方程式 (1.6) の特異点と一致している。また、因子 (1.7) に現れる複雑な関係式

$$1728X^5 - 720X^3Y + 80XY^2 - 64(5X^2 - Y)^2 - Y^3$$

は、Klein の正 20 面体関係式に他ならない。

2 実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ についての Hilbert モジュラー関数

本論で扱う実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ についての Hilbert モジュラー関数についてまとめる。

$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数環は $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathbb{Z}$ である。Hilbert モジュラー群 $PSL(2, \mathcal{O})$ は $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ に次の形で作用する： $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathcal{O})$ に対し、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (z_1, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \frac{a'z_2 + b'}{c'z_2 + d'} \right), \quad (2.1)$$

ただし $(\sqrt{5})' = -\sqrt{5}$ 。更に、本稿では対合 $\tau : (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ も考える。

Definition 2.1. $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ 上の正則関数 g が関数等式

$$g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z_1, z_2)\right) = (cz_1 + d)^k (c'z_2 + d')^k g(z_1, z_2).$$

をみたすとき、 g は重み k の Hilbert モジュラー形式という。また、 $g(z_1, z_2) = g(z_2, z_1)$ なるときは対称モジュラー形式と呼ばれる。 $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ 上の有理型関数 f が

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z_1, z_2)\right) = f(z_1, z_2).$$

をみたすとき、 f を Hilbert モジュラー関数という。

$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ についての Hilbert モジュラー関数は、様々な研究者が様々な手法を用いて研究がなされている。今回は、Hirzebruch と Müller の結果を用いて、 $\mathcal{F}$ の周期写像の考察を行った。

2.1 Hilbert モジュラー曲面 $(\mathbb{H} \times \mathbb{H}) / \langle PSL(2, \mathcal{O}), \tau \rangle$

Hirzebruch ([Hi]) は、対称 Hilbert モジュラー曲面 $(\mathbb{H} \times \mathbb{H}) / \langle PSL(2, \mathcal{O}), \tau \rangle$ を代数幾何学的に研究した。このモジュラー曲面は一点を添加してコンパクト化される。Hirzebruch によると、コンパクト化 $(\mathbb{H} \times \mathbb{H}) / \langle PSL(2, \mathcal{O}), \tau \rangle$ は重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1, 3, 5) = \{(\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C})\}$ に等しく、コンパクト化で添加される一点は $(\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}) = (1 : 0 : 0)$ である。

$$X = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^3}, \quad Y = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^5}. \quad (2.2)$$

とおくと、 (X, Y) は $\{\mathfrak{A} \neq 0\} \subset \mathbb{P}(1 : 3 : 5)$ におけるアファイン座標を与える。

Remark 2.1. われわれの曲面族 $\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$ のパラメータ空間 $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} = \{(X, Y)\}$ 、および周期写像 (1.5) の定義域は、(2.2) 及び

$$S(\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}) : z^2 = x^3 - 4(4y^3 - 5\mathfrak{A}y^2)x^2 + 20\mathfrak{B}y^3x + \mathfrak{C}y^4. \quad (2.3)$$

によって $\mathbb{P}(1 : 3 : 5) - \{(1 : 0 : 0)\}$ にまで自然に拡張される ($[N2]$)。

2.2 Müller のモジュラー形式

Müller [Mu] は、モジュラー形式の環の生成元たちのテータ表示を与えている。Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_2 = \{Z \in \text{Mat}(2, 2) \mid {}^t Z = Z, \text{Im}(Z) > 0\}$ 上

$$\vartheta(Z; a, b) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(\pi i {}^t \left(g + \frac{1}{2}a\right) Z \left(g + \frac{1}{2}a\right) + {}^t g b\right)$$

とテータ零値をとる。埋め込み $\psi: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{S}_2$

$$\psi: (z_1, z_2) \mapsto \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})z_1 - (1-\sqrt{5})z_2 & 2(z_1 - z_2) \\ 2(z_1 - z_2) & (-1+\sqrt{5})z_1 + (1+\sqrt{5})z_2 \end{pmatrix}$$

をとり、 $j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ と ${}^t a = (a_1, a_2), {}^t b = (b_1, b_2)$ の対応を次の表のように定める。

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
${}^t a$	(0, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(0, 1)
${}^t b$	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)

すると、

$$\theta_j(z_1, z_2) = \vartheta(\psi(z_1, z_2); a, b).$$

は $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ 上の正則関数を定める。以下、次の記法 $\theta_{jk} = \theta_j \theta_k, \theta_{jkl} = \theta_j \theta_k \theta_l, \dots$ を用いる。

Müller は、重みが 2, 6, 10, 15 の対称モジュラー形式

$$\left\{ \begin{array}{l} g_2 = \theta_{0145} - \theta_{1279} - \theta_{3478} + \theta_{0268} + \theta_{3569}, \\ s_6 = 2^{-8}(\theta_{012478}^2 + \theta_{012569}^2 + \theta_{034568}^2 + \theta_{236789}^2 + \theta_{134579}^2), \\ s_{10} = 2^{-12}\theta_{0123456789}^2, \\ s_{15} = -2^{-18}(\theta_{07}^9\theta_{18}^5\theta_{24} - \theta_{25}^9\theta_{16}^5\theta_{09} + \theta_{58}^9\theta_{03}^5\theta_{46} - \theta_{09}^9\theta_{25}^5\theta_{16} + \theta_{09}^9\theta_{16}^5\theta_{25} - \theta_{67}^9\theta_{23}^5\theta_{89} \\ + \theta_{18}^9\theta_{24}^5\theta_{07} - \theta_{24}^9\theta_{18}^5\theta_{07} - \theta_{46}^9\theta_{03}^5\theta_{58} - \theta_{24}^9\theta_{07}^5\theta_{18} - \theta_{89}^9\theta_{67}^5\theta_{23} - \theta_{07}^9\theta_{24}^5\theta_{18} \\ + \theta_{89}^9\theta_{23}^5\theta_{67} - \theta_{49}^9\theta_{13}^5\theta_{57} + \theta_{16}^9\theta_{09}^5\theta_{25} - \theta_{03}^9\theta_{46}^5\theta_{58} + \theta_{16}^9\theta_{25}^5\theta_{09} - \theta_{46}^9\theta_{58}^5\theta_{03} \\ - \theta_{25}^9\theta_{09}^5\theta_{16} - \theta_{57}^9\theta_{49}^5\theta_{13} + \theta_{67}^9\theta_{89}^5\theta_{23} + \theta_{58}^9\theta_{46}^5\theta_{03} + \theta_{57}^9\theta_{13}^5\theta_{49} - \theta_{23}^9\theta_{89}^5\theta_{67} \\ + \theta_{18}^9\theta_{07}^5\theta_{24} + \theta_{03}^9\theta_{58}^5\theta_{46} + \theta_{23}^9\theta_{67}^5\theta_{89} + \theta_{49}^9\theta_{57}^5\theta_{13} - \theta_{13}^9\theta_{57}^5\theta_{49} + \theta_{13}^9\theta_{49}^5\theta_{57}). \end{array} \right.$$

を与え、その対称モジュラー形式の環が g_2, s_6, s_{10}, s_{15} で生成されることを示した。ただし、 g_2, s_6, s_{10}, s_{15} は

$$s_{15}^2 = \left(5^5 s_{10}^3 - \frac{5^3}{2} g_2^2 s_6 s_{10}^2 + \frac{1}{24} g_2^5 s_{10}^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{2} g_2 s_6^3 s_{10} - \frac{1}{2^3} g_2^4 s_6^2 s_{10} - 2 \cdot 3^3 s_6^5 + \frac{1}{2^4} g_2^3 s_6^4 \right) \quad (2.4)$$

をみたとす。

2.3 周期写像 Φ の逆対応のテータ表示

周期写像の逆対応として得られる Hilbert モジュラー関数の組 (1.8) を Müller のモジュラー形式で表示すると次のようになる。

Theorem 2.1. ($[N2]$) $K3$ 曲面族 $\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$ の周期写像の逆対応 (1.8) は、次のような表示を持つ:

$$X(z_1, z_2) = 2^5 \cdot 5^2 \cdot \frac{s_6(z_1, z_2)}{g_2^3(z_1, z_2)}, \quad Y(z_1, z_2) = 2^{10} \cdot 5^5 \cdot \frac{s_{10}(z_1, z_2)}{g_2^5(z_1, z_2)}. \quad (2.5)$$

この結果は (0.5) の自然な拡張とみなされる。

Remark 2.2. 上の定理の $[N2]$ における証明の概略を述べる。

まず、微分方程式 (1.6) の $Y = 0$ への制限を考える。これは $\mathcal{F}$ の部分族 $\{S(X, 0)\}$ の周期微分方程式を考える事と同じである。この制限された微分方程式は *Fuchs* 型の常備分方程式に退化し、その *Schwarz* 写像が対角集合

$$\Delta = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} | z_1 = z_2\} \simeq \mathbb{H}$$

に値をとる事が示される。 Δ に制限された微分方程式の *Schwarz* 写像の逆対応を考察することで、部分族 $\{S(X, 0)\}$ の周期写像の逆を楕円モジュラー形式で表示することができる。以上により、周期写像 Φ の逆対応の Δ への制限を楕円モジュラー形式で表示する事ができたことになる。

一方、対角集合 Δ において *Müller* のモジュラー形式は特別な形に退化する。実際、 g_2, s_6 は Δ へ制限すると楕円モジュラー形式で書き下す事ができ、また $s_{10}(z, z)$ は恒等的に 0 に等しい。

この二つの事実を見比べると、周期写像 Φ の逆対応の Δ への制限を、*Müller* のモジュラー形式の Δ への制限で表示する事ができる。

次に、 Δ 上の表示を $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ 上の表示へと拡張する。今回の場合は、周期写像 Φ の分岐因子 (1.7) がわかっていて、また *Müller* のモジュラー形式は関係式 (2.4) を満足しなければならない。これらの事実を総合的に用いる事により、周期写像 Φ の逆対応の対角集合 Δ 上の表示を、 $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ 上の表示 (2.5) に一意的に拡張できる事が示される。

3 塩田・猪瀬構造による Kummer 曲面および 2 変数空間の部屋上の積分

Hilbert モジュラー関数は、そもそも実乗法をもつアーベル曲面やクンマー曲面のモジュライに関係するものであった。このアーベル曲面あるいはクンマー曲面は古くに Humbert [Hu] が詳しく研究している。この結果と、 $K3$ 曲面 $\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$ の結果との関係について述べる。

3.1 Humbert 曲面 $\mathcal{H}_5$ についての結果

シンプレクティック群 $Sp(4, \mathbb{Z})$ は Siegel 上半平面 $\mathfrak{G}_2$ に自然に作用し、 $\mathfrak{G}_2/Sp(4, \mathbb{Z})$ は主偏極 Abel 曲面のモジュライ空間と見做せる。 $\Omega \in \mathfrak{G}_2$ として、 L_Ω を $\left(\Omega, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ で定まる格子とする時、2-次元複素トーラス $Z_\Omega = \mathbb{C}^2/L_\Omega$ が主偏極 Abel 曲面を与える。

Humbert 曲面 $\mathcal{H}_5$ とは、余次元 1 の $\mathfrak{G}_2/Sp(4, \mathbb{Z})$ 解析的部分集合で、

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \text{End}^0(Z) = \text{End}(Z) \otimes \mathbb{Q}$$

なる主偏極 Abel 曲面のモジュライ空間を与えるものである。

Remark 3.1. $\mathcal{H}_5$ は明示的に与えられる。 $\mathcal{N}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_2 \mid -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \right\}$ とし、 p を自然な射影 $\mathfrak{G}_2 \rightarrow \mathfrak{G}_2/Sp(4, \mathbb{Z})$ とすると、 $\mathcal{H}_5 = p(\mathcal{N}_5)$ 。

T を複素トーラス $Z_\Omega = \mathbb{C}^2/L_\Omega$ 上の対合で $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$ から決まるものとする。最小特異点解消 $\overline{Z_\Omega}/\langle id, T \rangle$ を Kummer 曲面 $\text{Kum}(Z_\Omega)$ という。Kummer 曲面は $K3$ 曲面の一種である。 Z_Ω が Abel 曲面のとき、 $\text{Kum}(Z_\Omega)$ は代数的 Kummer 曲面となる。

Remark 3.2. Kummer 曲面 $\text{Kum}(Z_\Omega)$ は、3 つのパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ 6 本の直線

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= 0, & \zeta_2 + 2\zeta_1 + \zeta_0 &= 0, & \zeta_0 &= 0, \\ \zeta_2 + 2\lambda_1\zeta_1 + \lambda_1^2\zeta_0 &= 0, & \zeta_2 + 2\lambda_2\zeta_1 + \lambda_2^2\zeta_0 &= 0, & \zeta_2 + 2\lambda_3\zeta_1 + \lambda_3^2\zeta_0 &= 0, \end{aligned}$$

で分岐する $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \{(\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2)\}$ の二重被覆として実現されうる。このように得られた Kummer 曲面の表示を本稿では $K_H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ と書く事にする。このとき、パラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ はレベル 2 のモジュラー構造を持つと見なされる。

特に、 $\Omega \in \mathcal{H}_5$ のときは Humbert によって研究され、 $K_H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ のパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は次の関係式で特徴付けられる事が示された。

$$\begin{aligned} &4(\lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2(1 - \lambda_1) + \lambda_2^2\lambda_3)(\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3) \\ &= (\lambda_1^2(\lambda_2 + 1)\lambda_3 - \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_3) + (1 - \lambda_1)\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3))^2. \end{aligned}$$

この関係式は *Humbert* のモジュラー方程式と呼ばれ、これを用いた研究として [HM] などがある。しかし、この関係式はなかなか複雑であり、これを直接用いて *Kummer* 曲面のモジュライの性質、例えばモジュライ空間のコンパクト化を明示的に考察することは必ずしも容易ではないと思われる。

3.2 塩田・猪瀬構造

今回は、*K3* 曲面族 $\mathcal{F}$ を利用して *Kummer* 曲面族 $\{\text{Kum}(Z_\Omega) | \Omega \in \mathcal{H}_5\}$ の別の明快な表示を与える。

X を代数的 *K3* 曲面、 ω を正則 2-form、 ι を X 上の対合で $\iota^*\omega = \omega$ なるもの (Nikulin 対合) とする。このとき、 X/ι の最小特異点解消 Y はやはり *K3* 曲面となる。このとき自然な有理写像 $\chi: X \dashrightarrow Y$ がある。

Definition 3.1. ([Mo]) 特異点解消 $Y = \overline{X/\iota}$ が *Kummer* 曲面となり、 χ_* が *Hodge* 等距離 $\text{Tr}(X)(2) \simeq \text{Tr}(Y)$ を与える時、 X は塩田・猪瀬構造を持つという。

実は、[Mo] の主定理を Theorem 1.1 の格子構造に適用する事により、 $S(X, Y)$ には塩田・猪瀬構造が入ることが保証される。則ち、 $S(X, Y)$ には適切な Nikulin 対合 ι が存在し、 $\overline{S(X, Y)/\iota}$ が *Kummer* 曲面 $K(X, Y)$ を与える。そして、 $K(X, Y)$ の二重被覆として $\Omega \in \mathcal{H}_5$ から定まる *Abel* 曲面 Z_Ω が存在する。換言すると、*Kummer* 曲面 $K(X, Y)$ を通じて、*K3* 曲面 $S(X, Y)$ と、 $\mathcal{H}_5$ 上の *Abel* 曲面とが結びつく。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{K3 曲面} \\ S(X, Y) \end{array} & & \begin{array}{c} \text{Abel 曲面} \\ Z_\Omega \text{ (for } \Omega \in \mathcal{H}_5) \end{array} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & K(X, Y) = \text{Kum}(Z_\Omega) & \end{array}$$

塩田・猪瀬構造を与える対合 ι は、Néron-Severi 格子の中の 2 つの $E_8(-1)$ を交換するような対合として幾何的に実現され、次の定理が示される。

Theorem 3.1. ([N3]) *Kummer* 曲面 $K(X, Y)$ は次のように具体的に表示される。

$$v^2 = (u^2 - 2y^5)(u - (5y^2 - 10Xy + Y)). \quad (3.1)$$

Remark 3.3. (3.1) は重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1:1:2)$ の二重被覆と自然に見なされる。

ω_K を $K(X, Y)$ の正則 2-form としよう。 $\Delta_j = \chi_*(\Gamma_j)$ ($j = 1, \dots, 4$) とすると、*Kummer* 曲面の族 $\mathcal{K} = \{K(X, Y)\}$ の周期写像は (1.4) の Γ_j を Δ_j に変えた

$$\Phi_K: (X, Y) \mapsto \left(\int_{\Delta_1} \omega_K : \dots : \int_{\Delta_4} \omega_K \right) \quad (3.2)$$

に他ならない。また、

$$\left(\int_{\Gamma_1} \omega : \dots : \int_{\Gamma_4} \omega \right) = \left(\int_{\Delta_1} \omega_K : \dots : \int_{\Delta_4} \omega_K \right)$$

も成立する。よって (1.5) や、微分方程式 (1.6) やテータ表示 (2.5) は、*Kummer* 曲面族 $\mathcal{K}$ の周期写像においても同じように成立することに気をつける。

Remark 3.4. $K(X, Y)$ のモジュライのパラメータ (X, Y) はフルモジュラー関数の組を与える。よって、 $K(X, Y)$ は、Remark 3.2 で述べた $K_H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ のレベル 2 構造とは異なるモジュライが入っている。*Kummer* 曲面 $K(X, Y)$ には $K_H(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ よりも有利な点が幾つかある。例えば、Section 2.1 で述べたやり方でモジュライ空間は自然にコンパクト化され、それは $\mathbb{P}(1:3:5)$ である。また、次の節で述べるような周期積分についての幾何学的・直観的な認識を与える。

3.3 Kummer 曲面の上の二重積分

式 (3.1) で射影 $(y, u, v) \mapsto (y, u)$ は二重被覆を与え、その分岐因子は

$$\text{放物線 } P: u = Y - 10Xy + 5y^2, \quad \text{五次式 } Q: u^2 = 2y^5$$

である。モジュライのパラメータ (X, Y) はこの放物線 P の配置を与え、よって、分岐因子 P, Q の配置を与えると見なせる。これを用いて、(3.2) を古典的楕円積分の拡張として幾何学的に捉えることができる。

Figure 2 で示されるように因子 (1.7) で囲まれた $\mathbb{R}^2 = \{(X, Y)\}$ の開集合 U_0 を考えよう。

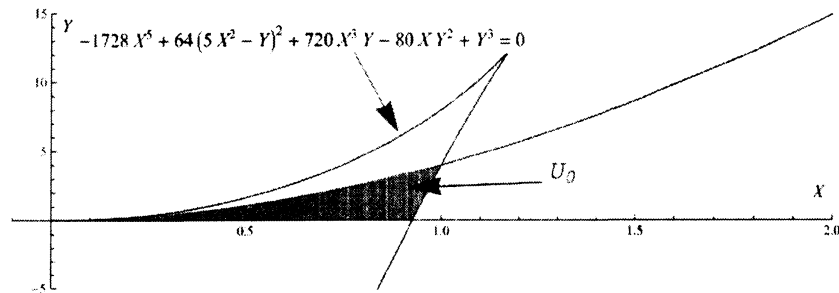


Figure 2: 開集合 U_0 .

$(X, Y) \in U_0$ のとき、分岐因子 P と Q は $\{(y, u) | y > 0\}$ において5点で交わる (Figure 3)。

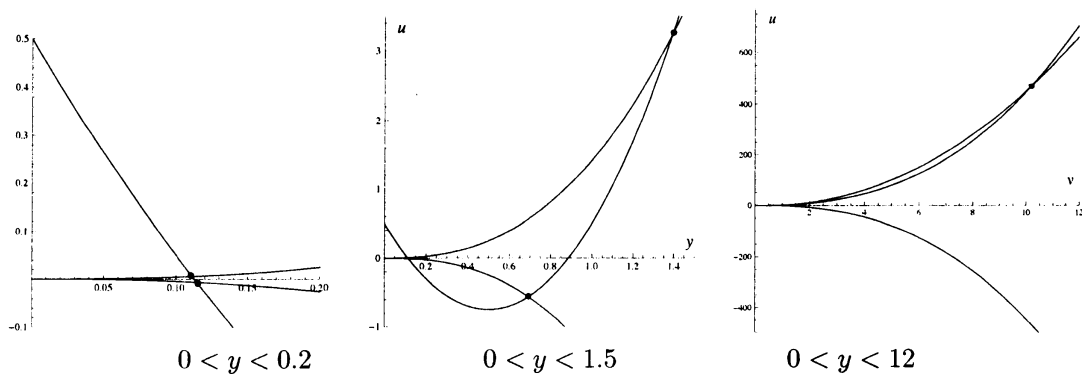


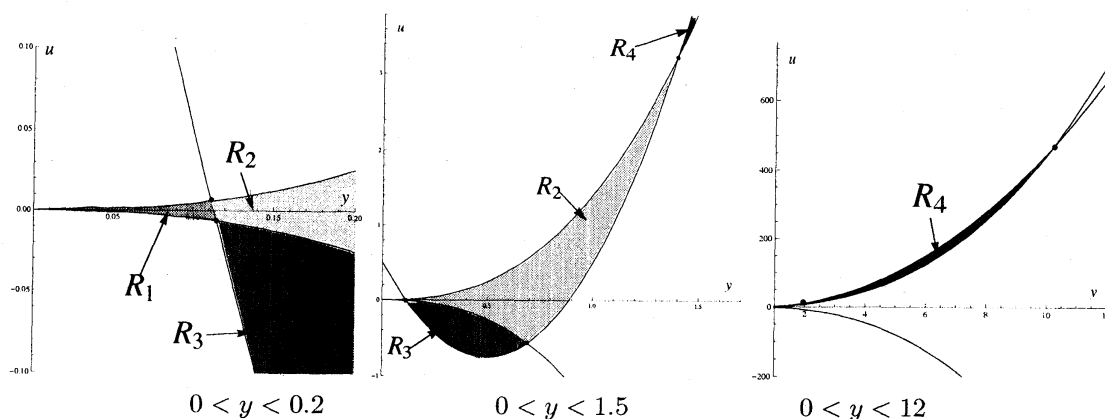
Figure 3: $y > 0$ における放物線 P と5次式 Q の配置。

P, Q で囲まれた部屋 R_1, R_2, R_3, R_4 を Figure 4 のように取る。

Theorem 3.2. ([N3]) 代数関数 $F(u, y) = \sqrt{(u^2 - 2y^5)(u - (Y - 10Xy + 5y^2))}$ をとる。ただし、部屋 R_1, R_2, R_4 では $\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$ 、部屋 R_3 では $-\mathbb{R}_+$ に値を取る分枝とする。すると、 $(X, Y) \in U_0$ のとき、周期写像 $\Phi_K: U_0 \mapsto \mathcal{D}_+$ の分枝は代数関数 $F(y, u)$ の $\mathbb{R}^2$ の部屋上の積分として与えられる:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Delta_1} \omega_K = 2 \left(\iint_{R_2} \frac{du dy}{F(u, y)} + \iint_{R_4} \frac{du dy}{F(u, y)} \right), \quad \int_{\Delta_2} \omega_K = 2 \iint_{R_2} \frac{du dy}{F(u, y)}, \\ \int_{\Delta_3} \omega_K = 2 \left(3 \iint_{R_1} \frac{du dy}{F(u, y)} + \iint_{R_3} \frac{du dy}{F(u, y)} \right), \quad \int_{\Delta_4} \omega_K = -2 \iint_{R_1} \frac{du dy}{F(u, y)}. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

これは、(0.2) の自然な拡張である。

Figure 4: 部屋 R_1, R_2, R_3, R_4 .

まとめ

楕円モジュラー関数における古典理論の拡張として、 $K3$ 曲面族 $\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$ の周期と $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数の対応を与える事ができる。

	古典理論	本稿
代数多様体	楕円積分 $S(\lambda)$ in (0.1)	$K3$ 曲面 $S(X, Y)$ in (1.2)
周期写像	(0.3)	(1.5)
微分方程式	Gauss 超幾何 in (0.4)	(1.6)
モジュラー関数	$\Gamma(2)$ のモジュラー関数 λ	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数 (X, Y)
テータ表示	(0.5)	(2.5)

$K3$ 曲面族 $S(X, Y)$ の塩田・猪瀬構造から得られる Kummer 曲面 $K(X, Y)$ を考えることによって、古典的楕円積分の拡張も見出される。

	古典理論	本稿
代数多様体	楕円積分 $S(\lambda)$ in (0.1)	Kummer 曲面 $K(X, Y)$ in (3.1)
	$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の二重被覆	$\mathbb{P}(1:1:2)$ の二重被覆
二重被覆の分岐因子	4 点 $0, 1, \infty, \lambda$	放物線 P と 5 次式 Q
モジュラー関数	λ	(X, Y)
	分岐点の位置	分岐因子 P, Q の配置
代数関数の積分	楕円積分 (0.2)	P, Q で囲まれた部屋上の二重積分 (3.3)

References

- [F] 藤原松三郎, 常微分方程式, 岩波書店, 1930.
- [Hi] F. Hirzebruch, *The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant*, Lecture Notes in Math. **627**, Springer-Verlag, 1977, 287-323.
- [Hu] G. Humbert, *Sur les fonctions abéliennes singulières*, Oeuvres de G. Humbert 2, pub. par les soins de Pierre Humbert et de Gaston Julia, Gauthier-Villars, 297-401, 1936.
- [HM] K. Hashimoto and Y. Murabayashi, *Shimura curves as intersections of Humbert equations and defining Equations of QM-curves of genus two*, Tohoku Math. J., **47** (2), 1995, 271-296.
- [Mo] D. R. Morrison, *On K3 surfaces with large Picard number*, Invent. Math. **75**, 105-121, 1984.
- [Mu] R. Müller, *Hilbertsche Modulformen und Modulfunctionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$* , Arch. Math. **45**, 1985, 239-251.
- [N1] A. Nagano, *Period differential equations for the families of K3 surfaces with 2 parameters derived from the reflexive polytopes*, Kyushu J. Math., **66** (1), 2012, 193-244.
- [N2] A. Nagano, *A theta expression of the Hilbert modular functions for $\sqrt{5}$ via the periods of K3 surfaces*, Kyoto J. Math., 2013, to appear.
- [N3] A. Nagano, *On the Kummer surfaces for the Humbert surface of invariant 5*, preprint, 2013.
- [SY] T. Sasaki and M. Yoshida, *Linear differential equations in two variables of rank four I-II*, Math. Ann. **282**, 1988, 69-111.
- [Sa] T. Sato, *Uniformizing differential equations of several Hilbert modular orbifolds*, Math. Ann. **291**, 1991, 179-189.
- [Y] 吉田正章, 私説超幾何関数, 共立出版, 1997.