

散乱の定常論の微分作用素 の散乱問題への応用

東大 理 黒田 成 俊

研究集会の折の話が、話の標題とは少しずれたものになってしまったので、講究録では、標題も表記のように変更させて頂いたことを、はじめに御諒承頂きたり。大体、研究集会でお話ししたことを詳しく述べるが、紙数が許せば、その後しらべたこともつけ加える。(§4)

散乱理論でとり扱われている微分作用素と云えば、Schrödinger 作用素、外部問題、一階対称双曲系、特に *uniformly propagative system* などがある。いわゆる *abstract stationary method* はこれまで主として Schrödinger 作用素に应用されてきたが、多少の改良を加えると、他の問題にも应用できるようである。本稿は、これについての暫定的な報告である。

§1 で一般論について述べ、§2 以下で二、三の問題への応用について述べる。

§ 1. 一般論.

一般論は, "分解法" を用いた smooth perturbation による。すなわち, $H_2 \cong H_1 + A^*B$ のような場合を考える。このとき, 簡単のためという理由で, Domain も含めて $H_2 = H_1 + A^*B$ となる場合に限っても応用上可成りの場合を含むことができるが, 少し長くなっても一般性を犠牲にしないほうが, 結局はいいようなので, 以下 Assumptions to simplify はなるべく導入しないことにする。

1.1. 分解法. H_1 をヒルベルト空間 H における自己共役作用素であるとし, また, $A_k, B_k, k=1, \dots, r$, は H から他のヒルベルト空間 X_k への内作用素で定義域は稠密であるとする (なお, 断らないかぎり, 作用素はすべて線型作用素とする)。また, $C_k \in B(X_k)$ とする。ただし $B(X_k)$ は X_k における有界線型作用素で X_k を定義域とするものの全体とする。以下

$$H_2 \sim H_1 + \sum_{k=1}^r A_k^* C_k B_k$$

で与えられる H_2 を考えるが, そのため Kato [5] に従って次の三条件 (C.1), (C.2), (C.3) を導入する。

$$(C.1) \quad D(A_k) \supset D(H_1), \quad D(B_k) \supset D(H_1),$$

$$k = 1, 2, \dots, r.$$

条件 (C.1) のもとで、次の (C.2) を考える。ただし、
 $B(X_k, X_j)$ の定義は $B(X_k)$ に準じ、 $[A]^a$ は作用素 A
 の closure を表わす。この記号がでてきたときには、 A が
 closable ということはおつねに仮定されるものとする。

$$(C.2) \quad \begin{cases} \text{任意の } z \in P(H_1) \text{ に対し,} \\ Q_{jk}^{(0)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} [B_j R_1(z) A_k^*]^a \in B(X_k, X_j). \end{cases}$$

(C.2) のもとで、次の記号を導入する*)

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_r,$$

$$Q^{(0)}(z) = \{Q_{jk}^{(0)}(z)\} \in B(X),$$

$$Q_{jk}(z) = C_j Q_{jk}^{(0)}(z) \in B(X_k, X_j),$$

$$Q(z) = \{Q_{jk}(z)\} \in B(X).$$

さて、条件 (C.3) は次の通り。

$$(C.3) \quad \begin{cases} (1 + Q(z_0))^{-1} \text{ が } B(X) \text{ の元として存在す} \\ \text{るような } z_0 \in P(H_1) \text{ がある。} \end{cases}$$

定理 1.1. 条件 (C.1), (C.2), (C.3) を仮定する。

このとき、 H のなかの稠密な定義域をもつ閉作用素 H_2 で
 次の性質 i), ii) をみたすものが一意的に存在する。

i) 集合 $\Lambda = \{z \mid (1 + Q(z))^{-1} \in B(X)\}$ は $P(H_1) \cap P(H_2)$
 の連結成分いくつかの合併になる。 ii) $z \in \Lambda$ に対し、

$$*) A = \{A_{jk}\} \in B(X) \text{ の定義は, } u = \{u_1, \dots, u_r\} \text{ のとき } (Au)_j = \sum_{k=1}^r A_{jk} u_k$$

$(1+Q(z))^{-1} = \{G_{jk}(z)\}$ とかき, また $R_j(z) = (H_j - z)^{-1}$ を H_j の resolvent とすると,

$$R_2(z) = R_1(z) - \sum_{j,k} [R_1(z)A_j^*]^a G_{jk}(z) C_k B_k R_1(z).$$

注意. 条件 (C.1) により, $[R_1(z)A_j^*]^a = \{A_j R_1(\bar{z})\}^* \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_j, \mathcal{H})$. 上の定理には, H_1 の自己共役性はいらない. Resolvent が空でない内作用素でよい. ただし, 若干の修正 (たとえば (C.1) で $D(A_k) \supset D(H_1^*)$ など) がいる.

定理 1.1 の証明は, 容易に $\gamma = 1$ の場合に帰着される. すなわち, 上に定義した $\mathbb{X}$ をとり, $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{X}$ とし,
 $D(A) = \bigcap_k D(A_k)$, $Au = \{A_1 u, \dots, A_k u\}$, B も同様,
 また $C: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ とし $C\{u_1, u_2, \dots\} = \{C_1 u_1, C_2 u_2, \dots\}$
 ととればよい. $\gamma = 1$ の場合の証明は, Kato [5] の証明ほとんどそのままである.

定理 1.1 において, A_k, B_k に条件を追加すれば, H_2 も自己共役になることが証明できる (以下の定理 1.2 参照).

しかし, 本稿で論ずる応用では, 自己共役作用素 H_1, H_2 が与えられて, 定理 1.1 の関係が成り立つ場合を考えるので, 定理 1.2 は使わない. 以下 §1.1 の残りはとばして読まれても差し支えない.

次の条件 (C.4), (C.5) を考える.

(C.4) $z_0 \in \mathbb{C}, \bar{z}_0 \in \mathbb{C}$, および z_0 と 1 を結ぶ path Γ (Γ は端点を含むものとする) で, 次の性質をみたすものが存在する. i) $\|z_0 Q(z_0)\| < 1$, $\|\bar{z}_0 Q(\bar{z}_0)\| < 1$; ii) 任意の $z \in \Gamma$ に対して, $(1 + z Q(z_0))^{-1}$, $(1 + \bar{z} Q(\bar{z}_0))^{-1}$ が $B(X)$ の元として存在する.

(C.5) 任意の $u, v \in \{\bigcap_{k=1}^r D(A_k)\} \cap \{\bigcap_{k=1}^r D(B_k)\}$ に対して, 次の式が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^r (C_k B_k u, A_k v)_{X_k} = \sum_{k=1}^r (A_k u, C_k B_k v)_{X_k}.$$

定理 1.2. 条件 (C.1) — (C.5) が成立するならば, 定理 1.1 の H_2 は自己共役になる.

注意. 条件 (C.4) は条件 (C.3) を含む. (C.3) が成り立ち, $Q(z_0)$, $Q(\bar{z}_0)$ が完全連続ならば, (C.4) が成り立つ. 摂動項が, 非摂動項に比べて低階のときには, この criterion が使えることが多い.

定理 1.2 は Konno and Kuroda [10] の Lemma 2 の証明に用いた方法で容易に証明できるが, ここでは省略する.

1.2. Smooth Perturbation の一つの定理.

$H_2 \cong H_1 + A^*CA$ の形で Schrödinger 作用素を取り扱ったとき (Kato-Kuroda [8], Kato [7] 参照) 主な役割りをしたのは,

H_1 の或る意味での spectral density $M(\lambda) = (d/d\lambda) A E_1(\lambda) A^*$ (E_1 は H_1 のスペクトル分解) と $Q(z) = C A R_1(z) A^*$ であつた. $M(\lambda)$ については存在と, Hölder 連続性, $Q(z)$ については, 完全連続性が要求された. 本稿では, それを一般化して, $Q(z)$ の完全連続性の要求をはずす^{*} の代り, $M(\lambda)$ が完全連続であるとする. もともと, $M(\lambda)$ は local に定義されていれば十分で, 例えば $\lambda=0$ で定義されないような場合があつたのであるが, $Q(z)$ の完全連続性をはずした代りに, $\|M(\lambda)\|$ の local integrability が要求される. なお, ついでに, H_1 は discrete な固有値 (連続スペクトルに埋つた固有値) をもつてもよい状況にも使える形にする. ただし, 以下の応用では H_1 はすべて絶対連続である. 定理の正確な形は次の通りである. (定理 1.3)

まず, H_1 , A_R , B_R は § 1.1 の冒頭に述べた通りとし, 条件 (C.1) を仮定する. そのとき, 任意の有界な Borel 集合 e に対して, $[B_j E_1(e) A_R^*]^a = B_j E_1(e) [E_1(e) A_R^*]^a \in B(X)$ となる. このことに注意した上で, 次の条件 (C.6) - (C.9) を導入する. ただし, これらの条件の中で, 集合 e_i は, $\mathbb{R}$ の可算部分集合 $e_i = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ で, (有限な) 集積点をもたないものとし, 以下そのような e_i が一つ固定されていると考える.

^{*}) もともと, 完全連続性は $(1+Q(z))$ が, 大部分の実軸上の境界点も含めて, 正則であることを示すためのみに用いられていた.

$$(C.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{次の性質 i), ii) をもつような作用素値函数} \\ M_{jk} : \mathbb{R} - e_1 \rightarrow B(X_k, X_j), \quad 1 \leq j, k \leq r, \text{ が} \\ \text{存在する. i) } M_{jk} \text{ は } \mathbb{R} - e_1 \text{ で作用素のノル} \\ \text{ムの意味で Hölder 連続; ii) } \bar{I} \subset \mathbb{R} - e_1 \text{ である} \\ \text{ような任意の有界区間 } I \text{ に対して} \\ [B_j E_1(I) A_k^*]^a = \int_I M_{jk}(\lambda) d\lambda. \end{array} \right.$$

$$(C.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{jk} : \mathbb{R} - e_1 \rightarrow B(X_k, X_j), \quad 1 \leq j, k \leq r, \\ \text{が存在して, (C.6) の性質 i), ii) が, 上の式を} \\ \text{次のように変えて成り立つ.} \\ [A_j E_1(I) A_k^*]^a = \int_I \tilde{M}_{jk}(\lambda) d\lambda. \end{array} \right.$$

$$(C.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (C.6) \text{ の } M_{jk}(\lambda) \text{ が次の性質 iii), iv) をもつ.} \\ \text{iii) 任意の } j, k \text{ と任意の } N > 0 \text{ に対して} \\ \int_{-N}^N \|M_{jk}(\lambda)\| d\lambda < \infty, \\ \text{iv) 任意の } \lambda \in \mathbb{R} - e_1 \text{ に対して, } M_{jk}(\lambda) \\ \text{は完全連続である.} \end{array} \right.$$

$$(C.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_k \in e_1 \text{ が } H_1 \text{ の固有値であるならば, その多} \\ \text{重度は有限である.} \end{array} \right.$$

§ 1 の主定理は次の通り.

定理 1.3. H_1, A_k, B_k, C_k は § 1.1 冒頭の通りとし,
 $0 \leq \sigma_k \leq 1, 0 \leq \rho_k \leq 1,$

$$(1.1) \quad \max_k \sigma_k + \max_k \rho_k \leq 1$$

をみたすような σ_k, ρ_k が存在して, 任意の k に対して

$$(1.2) \quad D(A_k) \supset D(H_1^{\sigma_k}), D(B_k) \supset D(H_1^{\rho_k})$$

が成り立つとする. しかれば, (C.1), (C.2) は明らかに成立するが, さらに (C.3) が $\overset{= \text{この点}}{\wedge} z_0 = z_{\pm}, \operatorname{Im} z_{\pm} \geq 0$ に対して成立すると仮定し, そのとき定理 1.1 で定まる H_2 が自己共役であると仮定する. また, 条件 (C.6), (C.8), (C.9) がみたされていると仮定する. そのとき, 次の i), ii), iii) が成り立つ. i) 任意の $\lambda \in \mathbb{R} - e_1$ に対して, 極限

$$Q(\lambda + i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q(\lambda + i\varepsilon)$$

がノルム収束の意味で存在する; ii) $Q(\lambda + i\varepsilon)$ は,

$\lambda \in \mathbb{R} - e_1, \varepsilon \geq 0$ でノルムの意味で連続である; iii)

$e_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} - e_1 \mid (1 + Q(\lambda + i0))^{-1} \text{ が } \mathcal{B}(X) \text{ の元として存在しない}\}$ とすると, e_+ は閉集合かつ零集合である.

同様の主張は, $\lambda + i\varepsilon, \lambda + i0$ を $\lambda - i\varepsilon, \lambda - i0$ に変えても成立する.

以上の仮定に加えて, さらに (C.7) を仮定すれば, wave operator $W_{\pm}(H_2, H_1)$ が存在して完備である.

注意 1. 定理の最後の部分の仮定のもとでは, 散乱理論の種

種の結論も導かれる。すなわち、1) 1) わける invariance principle が成り立つ; 2) $W_{\pm}$ は定常的に構成される; 3) $R(A^*) = A^* \times$ (ただし A は 4 頁で定義したもの) を自然に フレ・ヒルベルト空間とみるとき, $R(A^*)^*$ において固有関数展開の摂動論を構成できる。^{なお} 定理の最後の部分の証明, および上の諸性質の検証は, 実質的にはすでになされている。(Kato and Kuroda [8, 9] 参照)

注意 2. $M_{jk}(\lambda)$ および $\tilde{M}_{jk}(\lambda)$ の Hölder 連続性の指数が $> 1/2$ ととれるときには, $e_+ = e_- \equiv e_2$ であり, e_2 は $\mathbb{R} - e_1$ の内部には集積しない可算集合であり, e_2 の各点は H_2 の多重度有限な固有値となる (Kuroda [12] 参照).

定理 1.3 の証明は, 紙数に余裕があれば, 最後に述べる. (55)

§ 2. 応用 1. 二階の摂動を含む Schrödinger 作用素.

$L^2(\mathbb{R}^n)$ で次の作用素を考える. H_2 の正確な定義はのちに述べる.

$$\begin{aligned} H_1 &= -\Delta = \sum_{k=1}^n D_k^2, \quad D_k = -i\partial/\partial x_k, \\ H_2 &= \sum_{j,k=1}^n D_j(\delta_{jk} + a_{jk}(x))D_k \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (b_j(x)D_j + D_j \overline{b_j(x)}) + q(x). \end{aligned}$$

この問題は, Ushijima [16] ($a_{jk} \equiv 0$ の場合), Ikebe and

Tayoshi [4] によって考察され, 各係数および適当な微係数が遠方で $|x|^{-(2+\varepsilon)}$, または $|x|^{-(3+\varepsilon)}$ の order で減少すれば (またはそれに相当する integrability condition をみたせば) $W_{\pm}$ が存在して Complete ということがわかってゐる. ここでは, 定理 1.3 を用いて, $|x|^{-(1+\varepsilon)}$ までいけることを示す.

分解法を用いるのに, 固有函数展開のことを考えるならば, $H_2 = \sum (\delta_{jk} + \alpha_{jk}) D_j D_k + \sum \beta_j D_j + \gamma$ の形を採用して, $A = (1+|x|)^{-\lambda}$. とえらぶのがよいかもしれないが, ここでは, 分解法と Form の理論の関係をみる目的もあって, さきに与えた H_2 の形を用いて, Form の理論を使うことにする. なお, 簡単のため係数はすべて有界とするが, ある種の非有界性を許すこともできる.

この § を通じて, 次の (A.1) - (A.3) を仮定する.

(A.1) q は実数値, また $a_{jk}(x) = \overline{a_{kj}(x)}$;

(A.2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ある } \alpha > 1 \text{ に対して,} \\ c_{jk}(x) = (1+|x|)^{\alpha} a_{jk}(x), \\ c_j(x) = (1+|x|)^{\alpha} b_j(x), \\ c(x) = (1+|x|)^{\alpha} q(x) \\ \text{はすべて } L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ に属する.} \end{array} \right.$

(A.3) $\int$ (一様楕円性) ある $\delta_0 > 0$ が存在して,

$$\left| \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} + a_{jk}(x)) \bar{z}_k z_j \right| \geq \delta_0 |z|^2, 0 \neq z \in \mathbb{C}^n.$$

まず, $H^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{L^2(\mathbb{R}^n)}^1$ を定義域とするエルミート形式を次のように導入する.

$$h_1[u, v] = \sum_j (D_j u, D_j v)$$

$$h_{20}[u, v] = \sum_{j,k} ((\delta_{jk} + a_{jk}) D_k u, D_j v)$$

$$h_2[u, v] = h_{20}[u, v] + \sum_j \{(b_j D_j u, v) + (u, b_j D_j v)\} + (q u, v).$$

命題 2.1. h_1, h_{20}, h_2 は下に有界で閉なエルミート形式である.

証明. h_1, h_{20} については明らか (cf. (A.3)). b_j, q は有界だから, $h_2 - h_{20}$ は h_1 従って h_{20} に関して相対的に有界で, relative bound は任意に小さくできる. これより h_2 に関する主張がでる. (証終)

定理 2.2. h_1, h_2 に Form の理論の意味に対応する自己共役作用素を H_1, H_2 とする. しかるは, wave operators $W_{\pm}(H_2, H_1)$ が存在して完備である.

定理 2.2 を証明するために, まず, Form による定義と分解法の関係を与える次の一般的補題を証明する.

補題 2.3. h_1 を非負かつ閉であるエルミート形式とし, H_1 を h_1 に対応する自己共役作用素とする. また, $A_k,$

B_k, C_k は § 1.1 冒頭の仮定をみたす作用素とし, $D(A_k) \supset D(H_1^{1/2}), D(B_k) \supset D(H_1^{1/2})$ とする. さらに, $D(H_1^{1/2})$ 上で定義される二次形式

$$(2.1) \quad h_2[u, v] = h_1[u, v] + \sum_{k=1}^r (C_k B_k u, A_k v)_{\mathcal{H}_k}$$

が下に有界な閉エルミート形式であると仮定する. そのとき, 条件 (C.1), (C.2), (C.3) が成立し, 定理 1.1 できまる H_2 は h_2 に対応する自己共役作用素と一致する.

(C.1), (C.2) がなりたつこと, および補題 2.3 の証明が $r=1$ の場合に帰着されることは容易にわかる. 以下, $r=1$ の場合の証明において, $A_1, \dots$ は $A, \dots$ とかき, また H_2' は h_2 に対応する自己共役作用素とし, $R_2'(z) = (H_2' - z)^{-1}$ とする. z はつねに $\rho(H_1) \cap \rho(H_2)$ からとる. $D(h_1) = D(h_2) = D(H_1^{1/2})$ を D とかく.

命題 2.4. 任意の $u \in \mathcal{H}$ に対して $v = [R_1(z) A^*]^a u$ とおくと, $v \in D$ であり,

$$(h_1 - z)[v, w] = (u, A w)_{\mathcal{H}}, \quad \forall w \in D.$$

証明. $v \in D$ は容易. まず $w \in D(H_1)$ とする. しかるは, $(h_1 - z)[v, w] = (v, (H_1 - \bar{z})w) = (u, A R_1(\bar{z})(H_1 - \bar{z})w)_{\mathcal{H}} = (u, A w)_{\mathcal{H}}$. 任意の $w \in D$ に対しては, $w_n \in D(H_1)$ により, $w_n \rightarrow w, H_1^{1/2} w_n \rightarrow H_1^{1/2} w$ と近似すればよい. ただし, $A w_n = A(H_1 + 1)^{-1/2} (H_1 + 1)^{1/2} w_n \rightarrow A w$ に注意 (証明終)

命題 2.5. $1 + Q(z)$ は一対一である.

証明. $(1 + Q(z))u = 0$, $u \in \mathbb{X}$, とし $v = [R_1(\bar{z})A^*]^a u$ とおく. すなわち, $u = -Q(z)u = -CBv$. したがって,
命題 2.4 を使えば,

$$(h_1 - z)[v, w] = (u, Aw) = -(CBv, Aw), \quad \forall w \in D.$$

すなわち, $(h_2 - z)[v, w] = 0$. 故に, $h_2 \geq \delta$ であるような任意の δ に対して,

$$((H_2 - \delta)^{1/2}v, (H_2 - \delta)^{1/2}w) = (z - \delta)(v, w), \\ \forall w \in D = D((H_2 - \delta)^{1/2}).$$

故に $v \in D(H_2)$ で $H_2 v = z v$ とするが, $z \in \rho(H_2)$ であったから, $v = 0$. $u = -CBv$ により $u = 0$ を得る. (証終)

命題 2.6. $CBR_1(z) = (1 + Q(z))CBR_2'(z)$,
 $(1 + Q(z))(1 - [CBR_2'(z)A^*]^a) = 1$.

証明. $u, w \in \mathbb{H}$, $v = R_2'(z)u$ とすると,

$$(2.2) \quad (R_1(z)u, w) = ((H_2' - z)v, R_1(\bar{z})w) \\ = (h_1 - z)[v, R_1(\bar{z})w] + (CBv, AR_1(\bar{z})w) \\ = (v, w) + (CBv, AR_1(\bar{z})w).$$

==> $w = B^*w'$, $w' \in D(B^*)$, と入れれば,

$$BR_1(z) = BR_2'(z) + Q^{(0)}(z)CBR_2'(z)$$

を得る. これに左から C をかければ, 証明すべき方の式

が得られ、それに右から A^* をかけて変形すればカニの式が得られる。(証終)

補題 2.3 の証明. 命題 2.5 および 命題 2.6 のカニ式により, $(1+Q(z))^{-1} \in B(X)$ が存在することがわかり (C.3) が成り立つ. よって補題 (2.6) 式のカニの式より, $CBR_2'(z) = (1+Q(z))^{-1} CBR_1(z)$ を得て, これを (2.2) に代入すれば, $R_1(z) = R_2'(z) + [R_1(z)A^*]^q (1+Q(z))^{-1} CBR_1(z)$ が成り立つ. 一方定理 1.1 により, H_2 の resolvent もこの式をみたしたから, $(H_2' - z)^{-1} = (H_2 - z)^{-1}$, すなわち $H_2' = H_2$ が示された。(証終)

さて, 1) より定理 1.3, 補題 2.3 を利用して, 定理 2.2 を証明するのであるが, そのためには, この問題における A_k 等を定めねばならない. この場合, 添字を $1 \leq k \leq r$ と一列に並べる代りに, 次のような添字の組を考える. 1) 零階の項に対応して, 添字 0; 2) 一階の項 $(u, b_j D_j v)$ に対応して添字 j , $1 \leq j \leq n$; 3) 一階の項 $(b_j D_j u, v)$ に対応して添字 j , $1 \leq j \leq n$; 4) 二階の項に対応して, 添字 j, k , $1 \leq j, k \leq n$. (結局 $r = (n+1)^2$ とある) 1), 2), 3), 4) の場合における作用素 A, B, C をそれぞれ, $A_0, \dots; A_j, \dots; A_j', \dots; A_{jk}, \dots$ とかく. また, X_k に当る空間はすべて $H = L^2(R^m)$ に等しいとする. $\square$

のとき, A_0 etc. を次のようにとれば, エルミート形式 h_2 が (2.1) の形になることがわかる. ただし, α は仮定 (A.2) にでてきた数で, $\lambda = \alpha/2$ とする. また $\cdot$ は掛り算作用素を表わす.

$$\begin{aligned} (2.3) \quad & A_0 = B_0 = (1+|\alpha|)^{-\lambda} ; \quad A'_j = B_j = A_0 ; \\ & A_j = B'_j = A_{jk} = B_{kj} = (1+|\alpha|)^{-\lambda} D_j ; \\ & C_0 = c(x) \cdot, \quad C_j = C'_j = c_j(x) \cdot, \\ & C_{jk} = c_{jk}(x) \cdot ; \quad 1 \leq j, k \leq n. \end{aligned}$$

このように定義した上で, 定理 1.3 の仮定を検証しよう. ただし, 添字 k は上のようにおきかえて考える. (1.2) はすべての σ , ρ を $1/2$ として成立するから, (1.1) も成り立つ. h_2 が下に有界な Hermite 形式であることは, 命題 2.1 でわかっていたから, h_2 に補題 2.3 を適用することができる. よって (C.3) はみたされ, h_2 に対応する H_2 に対して, 定理 1.1 の分解法が適用できる. したがって, 定理 2.2 を証明するには, $e_1 = \{0\}$ として条件 (C.6), (C.7), (C.8) が検証できれば十分である.*)

(2.3) にでてきた $(n+1)^2$ 個の作用素は, 同じ形のものが多い. 結局のところ, (C.6) — (C.8) を検証するには,

$$(2.4) \quad [A_j E_1(I) A_k^*]^a = \int_I M_{jk}(\lambda) d\lambda, \quad 0 \leq j, k \leq n,$$

*) H_1 は固有値をもたないから, (C.9) は当然みたされる

$$D_0 = I,$$

(ただし, $A_j = (1+|x|^2)^{-\Delta} D_j$) を示し, $M_{jk}(\lambda)$ の性質を論ずればよいことになる. それには, Schrödinger 作用素の場合と同じように, $M_{jk}(\lambda)$ の "平方根" のようなものを考えればよい.

補題 2.7. 任意の $\lambda > 0$ と $k = 0, 1, \dots, n$ に対して, 次の (2.5) をみたすような $T_k(\lambda) \in B(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(S^{n-1}))$ が存在する: (式右辺の $\sqrt{2} \lambda^{(n-2)/4}$ の因子は後の便宜のためにつけてある)

$$(2.5) \quad (T_k(\lambda)u)(\omega) = \sqrt{2} \lambda^{(n-2)/4} (\mathcal{F}(A_k^* u))(\lambda^{1/2} \omega), \\ \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

ただし, $\mathcal{F}$ は Fourier 変換 $(\mathcal{F}v)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int v(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$ をあらわす. この $T_k(\lambda)$ に対して, 次の性質 i), ii), iii) が成り立つ: i) $T_k(\lambda)$ は $\lambda \in (0, \infty)$ に関し, 次数 $\Delta - 1/2$ の局所 Hölder 連続性^{**)}をもつ; ii) 任意の $\eta > 2(n-1)/(2\Delta-1) = (n-1)/(\Delta - 1/2)$ に対して^{*)}, $T_k(\lambda) \in B_\eta(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(S^{n-1}))$; iii) $\|T_k(\lambda)\|^2$ は $\lambda = 0$ の近傍で可積分である.

証明. $A_k^* = D_k (1+|x|^2)^{-\Delta}$, $A_0^* = A_0 = (1+|x|^2)^{-\Delta}$
($k \neq 0$)
だから, $(\mathcal{F}(A_k^* u))(\xi) = \xi_k (\mathcal{F}(A_0^* u))(\xi)$. 故に,
 $T_0(\lambda)$ が存在して, 性質 i), ii), iii) を満足することが云え

*) $B_\eta(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ は von Neumann-Schatten class を表わす. すなわち, 完全連続作用素 $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ で T^*T の固有値 $\{\alpha_n\}$ が $\sum \alpha_n^{\eta/2} < \infty$ を満足するものの全体. なお, (C.8) の検証のためには, $T_k(\lambda)$ の完全連続性だけがあればよい.

**) $\Delta - 1/2 \geq 1$ のときは,
いさぐよく云い換えねばならない.

れば, $(T_R(\lambda)u)(\omega) = \lambda^{1/2} \omega_R (T_0(\lambda)u)(\omega)$ とおくことによ
り, 補題が証明される. さて,

$$(\hat{T}(\lambda)v)(\omega) = \lambda^{\frac{n-2}{4}} (\mathcal{F}v)(\lambda^{1/2}\omega), \quad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

とおく. また

$$\|v\|_{L_{\Delta}^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\Delta} |v(x)|^2 dx$$

とおき, $\|v\|_{L_{\Delta}^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$ なる v の全体を $L_{\Delta}^2(\mathbb{R}^n)$ とかく.

任意の $\Delta' > 1/2$ に対し, 不等式

$$(2.6) \quad \|(\mathcal{F}v)(\omega)\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_{\Delta'} \|v\|_{L_{\Delta'}^2(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ. 一方

$$(\mathcal{F}v)(\lambda^{1/2}\omega) = (2\pi\lambda)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega y} v(\lambda^{-1/2}y) dy$$

である. これに (2.6) を適用すれば, $0 \leq \lambda < 1$ として

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{F}v)(\lambda^{1/2}\omega)\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2 \\ & \leq C_{\Delta'}^2 \lambda^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\lambda|x|^2)^{\Delta'} |v(x)|^2 dx \leq C_{\Delta'} \lambda^{-n/2} \|v\|_{L_{\Delta'}^2(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

したがって

$$(2.7) \quad \|\hat{T}(\lambda)v\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_{\Delta'} \lambda^{-1/2} \|v\|_{L_{\Delta'}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

一方, $n/2 < \Delta''$ であるような任意の Δ'' に対し

$|(\mathcal{F}v)(\omega)| \leq C_{\Delta''} \|v\|_{L_{\Delta''}^2(\mathbb{R}^n)}$ であるから,

$$(2.8) \quad \|\hat{T}(\lambda)v\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_{\Delta''} \lambda^{n/4-1/2} \|v\|_{L_{\Delta''}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

さて, $\Delta = n/2 > 1/2$ であるが, $T_0(\lambda)$ の存在と性質 iii) を

云うには, $1/2 < \Delta \leq n/2$ として証明すれば十分. そこで,

$1/2 < \Delta' < \Delta$, $n/2 < \Delta''$ なる Δ' , Δ'' をとり, $\Delta = \theta\Delta' + (1-\theta)\Delta''$ とすれば, (2.7), (2.8) より, interpolation により

$$\|\hat{T}(\lambda)v\|_{L^2(S^{n-1})} \leq C_{\Delta'}^{\theta} C_{\Delta''}^{1-\theta} \lambda^{\frac{n(1-\theta)}{4} - \frac{1}{2}} \|v\|_{L^2_{\Delta}(R^n)}.$$

そこで, $v = A_0^* u$ を代入すれば,

$$\|T_0(\lambda)u\|_{L^2(S^{n-1})} \leq \sqrt{2} C_{\Delta'}^{\theta} C_{\Delta''}^{1-\theta} \lambda^{\frac{n(1-\theta)}{4} - \frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(R^n)}.$$

これより, $T_0(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2(R^n), L^2(S^{n-1}))$ の存在と, 性質 iii) が得る. 性質 i), ii) は $\hat{T}(\lambda)$ が同種の性質をもつことより導かれる (Kuroda [13] 参照). (証終)

定理 2.2 の証明を完了するために,

$$M_{jk}(\lambda) = T_j(\lambda)^* T_k(\lambda)$$

とおく.* M_{jk} が Hölder 連続であり,かつ (C.8) にのべた性質をもつことは, 補題 2.7 の i), ii), iii) から得る. よって, (2.4) を証明すればよい. $u, v \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} (\{R_1(\lambda+i\varepsilon) - R_1(\lambda-i\varepsilon)\} A_k^* u, A_j^* v) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{R^n} \frac{\varepsilon}{(\xi^2 - \lambda)^2 + \varepsilon^2} (\mathcal{F} A_k^* u)(\xi) \overline{(\mathcal{F} A_j^* v)(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} (T_k(\mu)u, T_j(\mu)v)_{L^2(S^{n-1})} d\mu \end{aligned}$$

となる. ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば,

$$\frac{d}{d\lambda} (E_1(\lambda) A_k^* u, A_j^* v) = (T_k(\lambda)u, T_j(\lambda)v), \text{ a.e.}$$

*) なお $\lambda < 0$ では $M_{jk}(\lambda) = 0$ とする.

が得られて, これから, (2.4) が証明される. (定理 2.2 の証明終り)

注意. H_1 のスペクトルは絶対連続で $(0, \infty)$ と一致するから, H_2 の絶対連続スペクトルは $(0, \infty)$ と一致する. 一方 H_2 の特異スペクトル $\sigma_s(H_2)$ は $e_+ \cup e_-$ と一致することがわかっている. $\sigma_s(H_2) \cap (-\infty, 0)$ はもちろん discrete である. もし $\Delta > 1$ すなわち $\alpha > 2$ ととれば, $T_j(\lambda)$ したがって $M_{jR}(\lambda)$ の Hölder 連続性の指数は $1/2$ より大きくとれるから, 9 頁の注意 2 によって, $\sigma_s(H_2) \cap (0, \infty)$ も discrete になる.

§ 3. 応用 2. Uniformly propagative system.

§ 2 で考えた問題は Schrödinger 作用素からおこってきたものであるが, wave propagation の問題として, Wilcox, Ikebe らによって取り扱われている uniformly propagative system がある. 考察される方程式は

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = i E_1^{-1} \sum_{k=1}^n L_k D_k u(x, t) \equiv H'_1 u(x, t),$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = i E_2(x)^{-1} \sum_{k=1}^n L_k D_k u(x, t) = H'_2 u(x, t).$$

こゝで, $u(x, t)$ は m -ベクトル値函数, $E_1, E_2(x), L_k$ は $m \times m$ 行列である. E_1 などに課す仮定については後に述べる. 系 $\{L_k\}$ に対する適当な条件と, $|x| \rightarrow \infty$ のとき適当な速さで $E_2(x) \rightarrow E_1, |x| \rightarrow \infty$, という仮定のもとで, wave operator などについて論ずるのが問題である.

$\{L_k\}$ に uniformly propagative という条件をつけると, wave operator が存在することは, Wilcox [17], Ikebe [3] によって示された. $E_2(x)$ に関する仮定は, 大雑把に云って, $|E_2(x) - E_1| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ である. Wave operator の completeness については, Birman による trace 条件を使う方法が適用される. いわゆる static solution が無い場合には, $|E_2(x) - E_1| = O(|x|^{-3-\varepsilon})$ で completeness が成ることがわかっていたが, 最近 Wilcox and Schulenberg [14] は Birman の一般論を改良することにより, static solution がある場合にも, $E_2(x)$ に関する同種の条件のもとで, completeness が成り立つことを示した. この § では, この問題に定理 1.3 を適用することを試みる. 差し当り, static solution が無いと仮定せねばならず, その仮定のもとで $E_2(x)$ に関する仮定を $|E_2(x) - E_1| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ 程度に改良するにとどまる.

(3.1), (3.2) の右辺にあらわれている作用素は, E_1 ま

たは $E_2(x)$ を weight とするヒルベルト空間で自己共役となるから、問題は、二つのヒルベルト空間を含む問題であるが、適当なユニタリ変換で一つの空間の問題に帰着することができる（このこと、および二つのヒルベルト空間のときの wave operator の定義などにについては、Kato [6] 参照）。

まず、ヒルベルト空間 $\mathbb{H} = \{L^2(\mathbb{R}^n)\}^m$ における一階対称双曲系に対する散乱問題を考え、のちにその結果を uniformly propagative system に応用する。

$\mathbb{H} = \{L^2(\mathbb{R}^n)\}^m$ において、二つの作用素

$$(3.3) \quad \begin{cases} H_1 = \sum_{k=1}^n L_k^1 D_k, \\ H_2 = \sum_{k=1}^n L_k(x) D_k + L_0(x). \end{cases}$$

を考えよう。係数 L_k , $L_k(x)$ につき、次のような仮定をする。

まず H_1 においては、 L_k^1 は $m \times m$ 行列で $L_k^{1*} = L_k^1$ とし、さらに、 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$P(\mathbf{z}, \lambda) = \det \left(\lambda I - \sum_{k=1}^n z_k L_k^1 \right)$$

とおいて、 $\mathbf{z} \neq 0$ に対して $P(\mathbf{z}, \lambda) = 0$ を λ について解いた時の根はすべて 0 でなく、その多重度が $\mathbf{z}$ に無関係であると仮定する。

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^n z_k L_k^1$$

の斉次性を考慮すれば、この仮定は次のように云い表わせる。

$$(3.4) \quad \begin{cases} P(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\nu_j} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_{-j}(\xi))^{\nu_j}, \\ \lambda_{\ell}(\xi) > \cdots > \lambda_1(\xi) > 0 > \lambda_{-1}(\xi) > \cdots > \lambda_{-\ell}(\xi). \end{cases}$$

ここで $2 \sum_{j=1}^{\ell} \nu_j = m$ であるから, m は偶数である. また
高次性からの帰結として,

$$\begin{aligned} \lambda_j(\xi) &= |\xi| \lambda_j(\omega), \quad \xi = |\xi| \omega \\ \lambda_{-j}(\xi) &= -\lambda_j(-\xi), \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, この仮定のもとでは, 各 $\lambda_j(\xi)$ は $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ で実解析的となることがわかる.

H_2 において, $L_k(x)$, $L_0(x)$ は $m \times m$ 行列であり, $L_k(x)$ は一階連続的微分可能で, 一階導函数とともに有界, $L_0(x)$ は有界かつ可測とする. さらに, 対称性の条件

$$(3.5) \quad \begin{aligned} L_k(x)^* &= L_k(x), \\ \sum_{k=1}^n D_k L_k(x) + L_0(x)^* &= L_0(x). \end{aligned}$$

および楕円性

$$(3.6) \quad \begin{cases} \text{任意の } x \text{ と } \xi \neq 0 \text{ に対して, } L(\xi, x) = \\ \sum_{k=1}^n \xi_k L_k(x) \text{ は正則行列である.} \end{cases}$$

を仮定する. また $|x| \rightarrow \infty$ における条件として,

$$(3.7) \quad \begin{cases} \text{ある } \alpha > 1 \text{ が存在して} \\ C_k(x) = (1+|x|)^{\alpha} \{L_k(x) - L_k^1\}, \quad k=1, \dots, n, \\ C_0(x) = (1+|x|)^{\alpha} L_0(x). \\ \text{はすべて有界である.} \end{cases}$$

とこのことを仮定する.

命題 3. 1. 以上の仮定のもとで, H_1, H_2 は $\{H^1(\mathbb{R}^n)\}^m$ を定義域とする自己共役作用素となる.

証明. H_1 については, Fourier 変換を考へれば自明. H_2 については, (3. 6) と (3. 7) から一様楕円性: $\exists \delta > 0$, $|L(x)u|^2 \geq \delta |x|^2 |u|^2$, が得る. それを用いて, $\|u\|_1^2 \leq C(\|H_2 u\|^2 + \|u\|^2)$ を得る. well-known と $n \geq 2$ よりこのことかもしれないが, Wilcox and Schulenberg [15] に詳しい解説がある. (証終)

定理 3. 2. 仮定 (3. 4), (3. 5), (3. 6), (3. 7) のもとで, Wave operators $W_{\pm}(H_2, H_1)$ が存在して complete である.

この定理を証明するために,

$$H_2 = \sum_{k=1}^n L'_k D_k + \sum_{k=1}^n (L_k(x) - L'_k) D_k + L_0(x).$$

と書いて, 定理 1. 3 を適用する. まず, $H_2 - H_1$ を分解せねばならないが, § 2 と異なり, ここでは非対称な分解を行う. すなわち, $\Delta = \alpha/2$ とし,

$$A_1 = \cdots = A_n = A_0 = \frac{1}{(1+|x|)^{\Delta}},$$

$$B_k = \frac{1}{(1+|x|)^{\Delta}} D_k, \quad k=1, \dots, n,$$

$$B_0 = \frac{1}{(1+|x|)^{\Delta}},$$

$$C_k = C_k(x), \quad k=0; 1, \dots, n,$$

ただし $C_k(z)$ は (3.7) で定義された $m \times m$ 行列であり,
 A_k, B_k は m 次元数列空間にありては, スカラー演算子の
 ように作用する. このように A_k, B_k, C_k を定義すれば,

$$H_2 = H_1 + \sum_{k=0}^n A_k^* C_k B_k$$

となることは明らか. ($A_k^* = A_k$ であるが, §§1, 2 との対応上 $*$ をつけておく.) このとき, 定理 1.1 の仮定がみたされ,
 定理 1.1 で構成される H_2 と, 上の H_2 とが一致することがわかる. この検証は, §2 で述べたものよりずっと容易である. すなわち, 問題は $H_2 = H_1 + A^*CB$ の場合に帰着するが, その場合には, カニソルベント方程式

$$(3.8) \quad R_2(z) - R_1(z) = -R_2(z) A^* C B R_1(z)$$

が成り立つ. これに右から A^* をかけて整理すれば,

$$R_2(z) A^* (1 + Q(z)) = R_1(z) A^*$$

ただし, $Q(z) = C B R_1(z) A^*$. 一方 $(1 + Q(z))^{-1} = 1 - C B R_2(z) A^*$ であることが容易にわかるから, $R_2(z) A^* = R_1(z) A^* (1 + Q(z))^{-1}$ を (3.8) に代入すれば, 定理 1.1 のとうりとなる.

定理 1.3 の条件 (1.1), (1.2) は $\sigma_k = 0, \rho_k = 1$ で成り立っているから, あと検証すべきは (C.6), (C.7), (C.8) である. (ただし $e_1 = \{0\}$ とする. H_1 は絶対連続だから (C.9) は成立.) まず $L(z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k L_k^1$ の固有値 $\lambda_j(z)$

((3.4) 参照) を多重度を反復して大きさの順に並べたものを $\mu_m(\mathfrak{z}) \geq \dots \geq \mu_{m/2+1}(\mathfrak{z}) > 0 > \mu_{m/2}(\mathfrak{z}) \geq \dots \geq \mu_1(\mathfrak{z})$ とし、これらに対角要素にも $m-m$ 対角行列を $D(\mathfrak{z})$ としよう。すると、ある $m-m$ ユニタリ行列 $U(\mathfrak{z})$ により

$$L(\mathfrak{z}) = U(\mathfrak{z})^{-1} D(\mathfrak{z}) U(\mathfrak{z}), \quad \mathfrak{z} \neq 0.$$

となる。 $L(\mathfrak{z})$ の斉次性を考えれば、 $U(\mathfrak{z})$ は角度数のみによるようにとれる: $U(1|\omega_{\mathfrak{z}}) = U(\omega_{\mathfrak{z}})$. また $U(\omega)$ は $\omega \in S^{n-1}$ について可測であるようにとれる*).

(C.6), (C.7), (C.8) を検証するため、 §2 の 16-18 頁に対応する考察をするのであるが、ここではまず 18 頁後半に述べた計算からはじめて、 $T_k(\lambda)$ の形を導くことにしよう。 $A_k, B_k, k=0, \dots, n$ は 23 頁に書いた通りとする。また、 j は $1, \dots, m$ をとる添数に使うているので、 18 頁 j, k の代りに ℓ, k を使うことにする。

Fourier 変換すればすぐわかるように、任意の $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^m$ に対して

*) $U(\omega)$ が S^{n-1} 上で連続であるようにとれるかどうかは、すぐには明らかでないが、次のようにはできる。すなわち、 S^{n-1} を多角形的領域の有限個に分割して、各領域の内部で $U(\omega)$ は連続で、各領域の境界まで連続にのばせる。なお、各領域においては、 $U(\omega)$ は実解析的にとれるであろう。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} (\{R_1(\lambda+i\varepsilon) - R_1(\lambda-i\varepsilon)\} A_k^* u, A_l^* v) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left\{ \frac{\varepsilon \delta_{jj'}}{(\mu_j(\mathbb{Z}) - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \right\} U(\mathbb{Z})(\mp A_k^* u)(\mathbb{Z}), U(\mathbb{Z})(\mp A_l^* v)(\mathbb{Z}) \right) d\mathbb{Z} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon}{(\mu_j(\mathbb{Z}) - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \tilde{u}_j(\mathbb{Z}) \overline{\tilde{v}_j(\mathbb{Z})} d\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

ただし, k, l は固定した上で

$$\tilde{u}(\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z})(\mp A_k^* u)(\mathbb{Z}), \quad \tilde{v}(\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z})(\mp A_l^* v)(\mathbb{Z})$$

とおいた. また $\tilde{u}_j(\mathbb{Z})$ は $\tilde{u}(\mathbb{Z})$ の j 成分をあらわす.

そこで, $\rightarrow$ の積分

$$I_j(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\mu_j(\mathbb{Z}) - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \tilde{u}_j(\mathbb{Z}) \overline{\tilde{v}_j(\mathbb{Z})} d\mathbb{Z}$$

において, 変数を変換して $\mathbb{Z} \rightarrow (\mu, \omega)$, $\mu = \mu_j(\mathbb{Z})$, $\omega = \omega_{\mathbb{Z}}$ とする. $\mu_j(\mathbb{Z}) = |\mathbb{Z}| \mu_j(\omega_{\mathbb{Z}})$ だから, $|\mathbb{Z}| = \mu / \mu_j(\omega_{\mathbb{Z}})$. Jacobian を計算すると $d\mathbb{Z} = |\mu|^{n-1} d\mu d\omega / |\mu_j(\omega)|^{n-1}$ となる. よって, $j > m/2$ なら

$$I_j(\lambda) = \int_0^\infty \frac{|\mu|^{n-1} d\mu}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \int_{S^{n-1}} \frac{\tilde{u}_j(\mu\omega/\mu_j(\omega)) \overline{\tilde{v}_j(\mu\omega/\mu_j(\omega))}}{|\mu_j(\omega)|^{n-1}} d\omega$$

となる. $1 \leq j \leq m/2$ のときは, $\int_0^\infty d\mu$ を $\int_{-\infty}^0 d\mu$ に置きかえればよい. ここで, $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^m$ を $T_k(\lambda)u \in L^2(S^{n-1})^m$ に写す作用素 $T_k(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, $k = 1, \dots, n$, を次のように定める. $(T_k(\lambda)u)_j$ を $T_k(\lambda)u$ の j 成分とすると,

$$(3.9) \quad (T_k(\lambda)u)_j(\omega) = \frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{2}} \chi_j(\lambda)}{|\mu_j(\omega)|^{n-1}} (U(\omega) \mp A_k^* u)_j(\lambda \omega / \mu_j(\omega)),$$

ただし, $\chi_j(\lambda)$ は $1 \leq j \leq m/2$ のときは $(-\infty, 0)$ の定義函数, $m/2 < j$ のときは $(0, \infty)$ の定義函数である. すると, 前頁の計算により, 次の式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} (\{R_1(\lambda+i\varepsilon) - R_1(\lambda-i\varepsilon)\} A_k^* u, A_l^* v) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2 + \varepsilon^2} (T_k(\mu)u, T_l(\mu)v)_{L^2(S^{n-1})^m} d\mu. \end{aligned}$$

以上の計算は, A_k^* の代りに B_k^* を使っても, 全く同様である. あとは, 18頁と同じように考えれば, (C.6), (C.7), (C.8) を検証するためには, 次の補題を証明すればよいことがわかる.

補題 3.3. $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, $k=0, 1, \dots, n$ とする. (3.9)

によって与えられる作用素 $T_k(\lambda)$ は $T_k(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n)^m, L^2(S^{n-1})^m)$

に拡張される. 拡張された作用素 $T_k(\lambda)$ は次の性質 i), ii),

iii) をもつ. i) $T_k(\lambda)$ は $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ で次数 $\Delta - 1/2$ の局所 Hölder 連続性^{*)} (ルムの意味) をもつ; ii) 任意の $\eta >$

$2(n-1)/(2\Delta-1) = (n-1)/(\Delta-1/2)$ に対して, $T_k(\lambda) \in \mathcal{B}_\eta(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(S^{n-1}))$; iii) $\|T_k(\lambda)\|^2$ は $\lambda=0$ の近傍で

可積分である. (3.9) で A_k^* を B_k^* に置きかえたものに対して

*) $\Delta - 1/2 \geq 1$ のときは, なるべく云々換えてねばならない.

でも同様の結果が成り立つ。

証明. 補題 2.7 の証明とほとんど同様である. 前と同じ理由で, B_k の場合は A_k の場合に帰着される. (2.6) に相当する式は, 左辺を $\|(\nabla u)(|\mu_j(\omega)|^{-1}\omega)\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2$ に変えても成り立つ. これより, $T_k(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{S}^{n-1}))$ の存在がでる. また 17 頁, 18 頁と同じやり方により $\|T_k(\lambda)\|$ の可積分性が証明されるから, iii) が成り立つ. i), ii) は前と同様 (証終)

以上で, 定理 3.2 が証明された.

次に定理 3.2 を uniformly propagative system の散乱問題 (3.1), (3.2) に応用する. 次の仮定をする

$$(3.10) \quad \begin{cases} E_1, E_2(x) \text{ はいずれも } m\text{-}m \text{ 行列で, } E_1 > 0, \\ C_1 I \leq E_2(x) \leq C_2 I, \quad 0 < C_1 \leq C_2 < \infty, \text{ をみたす} \\ (C_1, C_2 \text{ は } x \text{ に無関係な定数}) \end{cases}$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} L_k \text{ はすべて } m\text{-}m \text{ 行列で, } L_k^* = L_k. \text{ そして} \\ L_k^1 = E_1^{-1/2} L_k E_1^{-1/2} \\ \text{とおくと, } L_k^1 \text{ は条件 (3.4) をみたす.} \end{cases}$$

$$(3.12) \quad \begin{cases} E_2(x) \text{ は滑らかであり, ある } \alpha > 1 \text{ が存在し,} \\ (1+|x|)^\alpha \{E_2(x) - E_1\}, \\ (1+|x|)^\alpha D_k E_2(x), \quad k=1, 2, \dots, n \\ \text{はすべて有界である.} \end{cases}$$

注意. 条件 (3.10), (3.11) は Wilcox [17] が uniformly

propagative とよんだもので, static solution が無い場合とほぼ同じ条件である.

(3.1), (3.2) は二つのヒルベルト空間を含む問題なので, そのときの wave operator に $\rightarrow$ 112 一云しておこう. $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ を m -ベクトル値函数の空間を

$$(u, v)_{\mathcal{H}_l} = \int_{\mathbb{R}^n} (E_l(x) u(x), v(x)) dx, \quad l=1, 2,$$

($E_1(x) = E_1$ とする) を内積としてヒルベルト空間としたものとしよう. (3.1), (3.2) の右辺にあらわれる作用素をそれぞれ H'_1 , H'_2 とすると, H'_l は $\mathcal{H}_l$ における自己共役作用素となる. Wave operator は

$$W_{\pm}(H'_2, H'_1; J) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH'_2} J e^{-itH'_1} P_1$$

で定義される. P_1 は H_1 に関して絶対連続な部分空間への射影で, static solution が無い場合実は $P_1 = 1$. J は identification operator と稱される $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ なる有界作用素である. Kato[6] によれば, J を少し変えても, $W_{\pm}$ (の存在とその形) は J に関係しない. 例えは, 上に述べた仮定のもとで,

$$J_1 u(x) = u(x)$$

$$J_2 u(x) = E_2(x)^{-1} E_1 u(x)$$

$$J_3 u(x) = E_2(x)^{-1/2} E_1^{1/2} u(x)$$

という三つの J を考えると, このうち一つの J について $W_{\pm}(H'_2, H'_1; J)$ が存在すれば, 他の J についても存在し, $W_{\pm}$ はどの J を使って作っても同じになることが証明されている. 特に, J_3 はユニタリなので, $H''_2 = J_3^{-1} H'_2 J_3$ とおけば, H''_2 は $\mathbb{H}_1$ における自己共役作用素である. そして

$$W_{\pm}(H'_2, H'_1; J_3) = J_3 W_{\pm}(H''_2, H'_1)$$

となるから, 問題は一つのヒルベルト空間 $\mathbb{H}_1$ の問題に帰着する. さらに, $u(x) \rightarrow E_1^{1/2} u(x)$ により $\mathbb{H}_1$ を $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R}^n)^m$ にユニタリにうつして考えれば, 結局 $\mathbb{H}$ における二つの作用素

$$(3.13) \quad \begin{cases} H_1 = E_1^{-1/2} \sum_{k=1}^n L_k D_k E_1^{-1/2} \\ H_2 = E_2(x)^{-1/2} \sum_{k=1}^n L_k D_k E_2(x)^{-1/2} \end{cases}$$

を取り扱えばよいことがわかる. これは丁度 (3.3) で考えた形である. すなわち, (3.3) の $L_k^1, L_k(x)$ を

$$\begin{aligned} L_k^1 &= E_1^{-1/2} L_k E_1^{-1/2}, \\ L_k(x) &= E_2(x)^{-1/2} L_k E_2(x)^{-1/2}, \quad k=1, \dots, n, \\ L_0(x) &= \sum_{k=1}^n E_2(x)^{-1/2} L_k (D_k E_2(x)^{-1/2}) \end{aligned}$$

とすればよい.

このように定められた $L_k^1, L_k(x)$ に対して, 条件 (3.5) は当然成り立ち, 条件 (3.4) は条件 (3.11) より, 条件

(3.6) は $\sum_k L_k$ が正則行列であることよりである。最後に条件(3.7)は(3.12)から導かれる。実際、適当な積分路 Γ を使って、($|x|$ は十分大とする)

$$E_2(x)^{-1/2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-1/2} (z - E_2(x))^{-1} dz, \quad E_1^{-1/2} = \dots$$

と表わすことにより、(3.12) より $(1+|x|)^{\alpha} \{E_2(x)^{-1/2} - E_1^{-1/2}\}$, $(1+|x|)^{\alpha} D_k E_2(x)^{-1/2}$ の有界性を導くことができる。そうすれば、(3.17)はすぐにわかる。

かくして、定理3.2が適用され、次の定理を得る。

定理 3.4. (3.1), (3.2) で定まる伝播系に対して、(3.10), (3.11), (3.12) がみたされているとする。そのとき、(3.13) で定まる H_1, H_2 に対して、 $W_{\pm}(H_2, H_1)$ が存在して complete である。したがって、(3.1), (3.2) の H'_1, H'_2 に対して、 $W_{\pm}(H_2, H_1; J)$ が存在して complete である。ただし、 J は29頁の J_1, J_2, J_3 のいずれでもよい。

§4. 応用3. 外部問題.

§1 で述べた方法は外部問題にも応用できるようである。これによりては、まだ十分考察してゐないので、ポテンシャルなしの Dirichlet 境界条件の場合に限って、この方法が応用される可能性があることを略述するにとどめる。従って、証明される結果は、既知のことである。

K を滑らかな境界をもつコンパクト集合 ($\text{in } \mathbb{R}^n$) とし,
 $\Omega = \mathbb{R}^n - K$ とする. Ω は連結であると仮定する.
 函数空間の記号としては, $H^2(\Omega) = E^2_{L^2(\Omega)}$, $\dot{H}^1(\Omega) = \dot{D}^1_{L^2(\Omega)}$,
 などを使用する. 問題は二つの作用素

$$\begin{aligned} H_1 &= -\Delta, & D(H_1) &= H^2(\mathbb{R}^n), & \text{in } L^2(\mathbb{R}^n), \\ H'_2 &= -\Delta, & D(H'_2) &= H^2(\Omega) \cap \dot{H}^1(\Omega), & \text{in } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

を比較することである. 同じヒルベルト空間の問題にするために, Birman [2], Kato [6] などにならって,

$$\begin{aligned} H''_2 &= -\Delta, & D(H''_2) &= H^2(K^{\text{int}}) \cap \dot{H}^1(K^{\text{int}}), \\ & & & \text{in } L^2(K^{\text{int}}) \end{aligned}$$

を導入し, $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\Omega) \oplus L^2(K^{\text{int}})$ において, H_1 と
 $H_2 = H'_2 \oplus H''_2$ を比較する. すると, もとの問題との関係
 については [6] を参照されたい.

H_1, H_2 は共に ≥ 0 であるから, Friedrichs の意味で H_1, H_2 に対応するエルミート形式 h_1, h_2 を考えることができる. それらは次のように与えられる*)

$$\begin{aligned} h_1[u, v] &= \sum_{k=1}^n (D_k u, D_k v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, & D(h_1) &= H^1(\mathbb{R}^n) \\ h_2[u, v] &= \sum_{k=1}^n (D_k u, D_k v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ D(h_2) &= \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) \mid u|_{\partial K} = 0\}. \end{aligned}$$

ただし, $u|_{\partial K}$ は u の ∂K 上のトレースを表わす. h_1 は h_2 の拡張である.

* $D(h_1)$ は Form h_1 の定義域を表わす.

$D(h_1), D(h_2)$ を内積 $h_1[u, v] + [u, v]$ によってヒルベルト空間としたものを D_1, D_2 としよう ($D_1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ — 内積も二つ — であるが、今後 D_1 とかく.) D_2 は D_1 の部分空間である. D_1 における D_2 上への直交射影を P とかく. なお, $L^2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{H}$ とかく.

H_1 と H_2 に関する wave operator の問題を調べるには,

$$R_1 = R_1(1) = (H_1 + 1)^{-1},$$

$$R_2 = R_2(1) = (H_2 + 1)^{-1},$$

に関する wave operator の問題が, §1 の方法で調べられれば十分である. 詳しいことは省略するが, 定理 1.3 の条件のもとで, いわゆる invariance principle が成り立つのがその理由である. 次の定理を §1 の方法で証明するのが目標である.

定理 4.1. $W_{\pm}(R_2, R_1)$ は存在して complete である.

系 4.2. $W_{\pm}(H_2, H_1)$ は存在して complete である.

$R_2 - R_1$ を取り扱うため, 次の命題 4.3 — 命題 4.7 を示す. これは, おおむね Krein [11], Birman [1] に述べてあることであるが, 一通りの証明をつけることにする.

命題 4.3. $R_2 - R_1 = -(1 - P)R_1$.

証. 任意の $u, w \in \mathbb{H}$ をとり, $v = R_1 u \in D_1$ とおく.

$$\begin{aligned} (R_2 u, w) &= ((H_1 + 1)v, R_2 w) = (h_1 + 1)[v, R_2 w] \\ &= (h_1 + 1)[Pv, R_2 w] \quad \because R_2 w \in D_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k_2 + 1)[Pv, R_2 w] \\
&= (Pv, w) = (v, w) - ((1-P)v, w) \\
&= (\{R_1 - (1-P)R_1\}u, w). \quad (\text{証終})
\end{aligned}$$

命題 4.4.* $R_1 - R_2 \geq 0$.

証. $\|R_1^{1/2}u\| \geq \|R_2^{1/2}u\|$, $\forall u \in \mathbb{H}$, を云えは十分. さて,

$$\|R_2^{1/2}u\| \leq \| [R_2^{1/2}(H_1+1)^{1/2}]^a \| \|R_1^{1/2}u\|,$$

ここに $[R_2^{1/2}(H_1+1)^{1/2}]^a = \{(H_1+1)^{1/2}R_2^{1/2}\}^* \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ で, そのノルムは 1 を越えない. 実際 $\|(H_1+1)^{1/2}R_2^{1/2}u\|^2 = (k_1+1)[R_2^{1/2}u, R_2^{1/2}u] = (k_2+1)[R_2^{1/2}u, R_2^{1/2}u] = \|u\|^2$. (証終)

簡単のため $V = R_1 - R_2 = (1-P)R_1$ とかき, 次の記号を使う:

$$N(V) = \{u \in \mathbb{H} \mid Vu = 0\}$$

U は V を $N(V)^\perp$ に制限した作用素. $N(V)^\perp$ における作用素と考える. 値域が稠密な有界作用素である. ($N(V)^\perp = \mathbb{H} \ominus N(V)$)

G は $N(V)^\perp$ での U^{-1} . $N(V)^\perp$ における, 必ずしも有界でない自己共役作用素.

命題 4.5. $D_1 \cap N(V)^\perp = D_1 \ominus D_2$.

証. まず, $N(V) = \{v \in \mathbb{H} \mid R_1 v \in D_2\}$ に注意する. さて, $u \in D_1 \ominus D_2$, $R_1 v \in D_2$ とすると, $(u, v) = (k_1+1)[u, R_1 v] = 0$. 故に命題の式で $\supset$ が成り立つ. 次に, $u \in D_1 \cap N(V)^\perp$
 *) 命題 4.4, 4.5, 4.7 の定式化は Birman [2], Lemma 2, 1 による.

とする. 任意の $w \in D_2 \cap D(H_1)$ は $w = R_1 v$ の形にかけ,
 $v \in N(V)$. 故に $0 = (u, v) = (h_1 + 1)[u, R_1 v] = (h_1 + 1)[u, w]$
 だから, u は $D_2 \cap D(H_1)$ と D_1 の内積で直交する. $\therefore$
 が, $D_2 \cap D(H_1)$ は D_2 で稠密である. (実際 ∂K の近傍で 0
 である C^∞ -函数は $D_2 \cap D(H_1)$ に属し, それらの閉包が, D_2
 $= \dot{H}^1(\Omega) \oplus \dot{H}^1(K^{\text{int}})$ と一致している.) 故に $u \in D_1 \ominus D_2$. (証終)

命題 4.6. $u \in D(G)$, $v \in D_1 \cap N(V)^\perp$ ならば,

$$(h_1 + 1)[u, v] = (Gu, v).$$

注意. $VH \subset D_1$ だから $D(G) \subset D_1 = D(h_1)$ である.

証. $(h_1 + 1)[u, v] = (h_1 + 1)[UGu, v] = (h_1 + 1)[VGu, v]$
 $= (h_1 + 1)[(I - P)R_1 Gu, v]$ であるが, 命題 4.5 により $v \in$
 $D_1 \ominus D_2$ であるから, この式の右辺で $I - P$ はとってよい.
 $\therefore (h_1 + 1)[u, v] = (h_1 + 1)[R_1 Gu, v] = (Gu, v)$. (証終)

命題 4.7. $D(G^{1/2}) = D(h_1) \cap N(V)^\perp$ であり, 任意の
 $u, v \in D(G^{1/2})$ に対して, $(G^{1/2}u, G^{1/2}v) = (h_1 + 1)[u, v]$.

証. 上の注意により, $D(G) \subset D_1 \cap N(V)^\perp$ であり, $D(G)$
 は $N(V)^\perp$ で稠密であるから, $D_1 \cap N(V)^\perp$ は $N(V)^\perp$ で稠密である.
 $h_1 + 1$ を $D_1 \cap N(V)^\perp$ に制限した二次形式は閉であるから, そ
 れに対応する $N(V)^\perp$ の自己共役作用素を G' としよう. 命
 題 4.6 と, 二次形式の一般論によれば, $G \subset G'$ したがって
 $G = G'$ となる. 故に $N(V)^\perp$ における二次形式 $h_1 + 1$ と

$(G^{1/2}u, G^{1/2}v)$ は同じものであり、命題が示された。(証終)

命題 4.8. $T \in B(H)$ が存在して,

$$V^{1/2} = (I-P)R_1^{1/2}T.$$

証. $V^{1/2} = G^{1/2}V$ であるから、命題 4.7 により,

$\|V^{1/2}u\|^2 = (R_1+1)[Vu, Vu] = \|(H_1+1)^{1/2}Vu\|^2$. 故に準等長作用素 T_1 が存在して $V^{1/2} = T_1(H_1+1)^{1/2}V$. よって * をとれば $V^{1/2} = [(H_1+1)^{1/2}V]^* T_1^* = [V(H_1+1)^{1/2}]^* T_1^* = (I-P)R_1^{1/2}T_1^*$. 故に $T = T_1^*$ ととればよい。(証終)

以上の命題を利用して、 V を分解し、その性質を調べる。

V の分解は、 $V = V^{1/2}V^{1/2}$ とするのが自然である。そうすると、§2 と同様の議論により、作用素

$$(T(\lambda)u)(\omega) = \sqrt{2} \lambda^{(n-2)/4} (\exists V^{1/2}u)(\lambda^{1/2}\omega), \lambda > 0$$

の性質を調べればよい。= = z, 命題 4.8 を使えば,

$$K = (I-P)R_1^{1/2}$$

とあり、作用素

$$(\hat{T}(\lambda)u)(\omega) = \sqrt{2} \lambda^{(n-2)/4} (\exists Ku)(\lambda^{1/2}\omega), \lambda > 0$$

を $L^2(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(S^{n-1})$ への作用素として考察し、有界性、 λ についての Hölder 連続性などを調べればよいことがわかる。 $\mathcal{H}_p$ によって weighted L^2 -空間*)

$$\mathcal{H}_p = \{u \mid (1+|x|^2)^{p/2}u(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

をあらわすと、次の命題が成り立つ。

*) 17頁で $L_p^2(\mathbb{R}^n)$ と書いたものである。

命題 4.9. 任意の $p > 0$ に対して, K は $H = H_0$ から H_p への有界作用素である.

しばらく, 命題 4.9 を仮定しよう. n また p をほどにした後
命題 4.9 で $p > n/2$ と $\varepsilon > 2$,
 の空間を, 普通の x -空間のように思えば, $\wedge K u \in H_p$ は,
 $\nabla K u$ が Sobolev 空間 $H^p(\mathbb{R}^n) = E_{L^2(\mathbb{R}^n)}^p$ に属すること
 を意味し, したがって $\nabla K u$ は有界である. これより, $\hat{\nabla}(\lambda)$
 が $L^2(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ への有界作用素であり, 補題 2.7 の性
 質 iii) をもつことがわかる. 補題 2.7 の性質 ii) は Lipschitz 連
 続という形で成り立ち, iii) は任意の $\eta > 0$ のとき $\hat{\nabla}(\lambda) \in$
 B_η という形で成り立つ. 二つは既知のことである. よっ
 て, 命題 4.9 を証明すれば, 定理 4.1 が証明されたことになる.

命題 4.9 の証明. $(1-P)R_1^{1/2}$ は $H_0 = L^2(\mathbb{R}^n)$ を $H^1(\mathbb{R}^n)$
 に連続に写像する. よって, $1-P$ の値域, すなわち $D_1 \ominus D_2$
 に属する u に対して, $\|u\|_{H_p} \leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ を云えばよい.
 $u \in D_1 \ominus D_2$ ならば, K の境界 ∂K の近傍で 0 になる $\varphi \in$
 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, (そのような φ は D_2 に入るから), $0 =$
 $\mathfrak{h}_1[u, \varphi] = \sum (D_k u, D_k \varphi) + (u, \varphi) = (u, -\Delta \varphi + \varphi).$

故に u は Ω および K^{int} において,

$$-\Delta u + u = 0$$

の解である. $R_1 > 0$ を, $K \subset \{x \mid |x| < R_1\}$ となるよう
 な数, $R_2 > R_1$ とし, Green の公式を使えば,

§5. 定理 1.3 の証明.

定理の最後の二行, すなわち (C.7) を仮定して,
 $W_{\pm}(H_2, H_1)$ の存在と完備性を主張する部分の証明は, すで
 になされている (Kato and Kuroda [8, 9]). この証明を
 ここに書くだけの紙数の余裕は, とうていないので, この部
 分の証明は認めず, $Q(\lambda + i\varepsilon)$ に対する性質 i), ii), iii)
 の証明だけを述べることにする.

4 頁中段に述べたのと同様に, 証明は $\gamma = 1$ の場合に
 帰着できるから, 以後 $\gamma = 1$ とし, 添字 j , k は省略する.

命題 5.1. 条件 (C.1), (C.2), (C.6) を仮定すれば,
 定理 1.3 の i), ii) が成り立つ.

証. 閉区間 I が $\mathbb{R} - e_1$ に含まれるような任意の有界開区間 I に対して
 $Q(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$, が $\{z = \lambda + i\varepsilon \mid \lambda \in I, \varepsilon \geq 0\}$ の上の連続
 関数に延長できることを証明する. 下半平面に対しても同様
 にできるから, i), ii) が得られる. さて, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ で
 あるような z_0 を一つとり, リゾルベント方程式により

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad Q(z) &= C[B R_1(z) A^*]^a \\
 &= C[B R_1(z_0) A^*]^a + (z - z_0) \overset{C}{\underset{\lambda}{\int}} B R_1(z) [R_1(z_0) A^*]^a \\
 &= Q(z_0) + Q_1(z) + Q_2(z), \\
 Q_1(z) &= (z - z_0) C B R_1(z) E_1(I^c) [R_1(z_0) A^*]^a, \\
 Q_2(z) &= (z - z_0) C B R_1(z) E_1(I) [R_1(z_0) A^*]^a.
 \end{aligned}$$

$Q_1(z)$ は、実軸上 I をこえて連続に下半面までのばせる。実際、リゾルバント方程式を再度用いて、 $BR_1(z)E_1(I^c) = BR_1(z_0)E_1(I^c) + (z - z_0)BR_1(z_0)R_1(z)E_1(I^c)$ とし、 $R_1(z)E_1(I^c)$ は I の近傍で連続であることに注意すればよい。 $Q_2(z)$ によりは、条件 (C.6) より、

$$Q_2(z) = (z - z_0) \int_I \frac{1}{(\mu - z)(\mu - z_0)} CM(\mu) d\mu$$

とかける。 $M(\mu)$ は Hölder 連続だから、Privalov の定理により、 $Q_2(\lambda + i\varepsilon)$ の $\varepsilon \downarrow 0$ のときの極限がノルムの意味で存在し、極限值まで入れて、 $\lambda + i\varepsilon$ の連続函数になる。

(もちろん、 $\varepsilon \downarrow 0$ の極限值と、 $\varepsilon \uparrow 0$ の極限值とが一致するとは限らない。) (証終)

命題 5.2. (1.1), (1.2), (C.3), (C.6), (C.8), (C.9) を仮定すれば、定理 1.3 の iii) が成り立つ。ただし、(C.3) は定理 1.3 におけるように、 $z_0 = z_+$, $z_0 = z_-$ の両方に対して仮定する。

証明. 上半平面の場合を取り扱う。 z_+ を上の通りとする。また、 $K(z) = Q_1(z) + Q_2(z)$ とおく。 $1 + Q(z_+) = S$ とおけば、 S は $IB(X)$ で逆をもち、(5.1) で $z_0 = z_+$ として、

$$1 + Q(z) = S(1 + S^{-1}K(z))$$

が得られる。したがって、iii) を証明するためには、iii) に

述べられた性質が, $1+S^{-1}K(z)$ に対してなりたつことを証明すればよい. そのためには, $K(z)$ が完全連続であることを云えば十分である ([12; Lemma 6.2] 参照. なおこの Lemma を適用するに際して, $K(z)$ の正則性は自明であり, $1+S^{-1}K(z)$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, が逆をもつことは, 定理 1.1 からわかる.)

さて, 任意に $N > 0$ をとり, $I_N = (-N, N)$,

$$K_N(z) = (z - z_+) C B R_1(z) E_1(I_N) [R_1(z_+) A^*]^q,$$

$$K'_N(z) = (z - z_+) C B R_1(z) E_1(I_N^c) [R_1(z_+) A^*]^q$$

とおく. $K(z) = K_N(z) + K'_N(z)$ である.

まず $K_N(z)$ が完全連続であることを示す. e_1 の元の番号をつけかえ, $e_1 \cap I_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ とする. H_1 の λ_k に属する固有空間への直交射影を P_k とする. (λ_k が H_1 の固有値でない場合は, $P_k = 0$) しかるに,

$$K_N(z) = \int_{I_N} \frac{z - z_+}{(\mu - z)(\mu - z_+)} C M(\mu) d\mu + \sum_{k=1}^m \frac{z - z_+}{(\lambda_k - z)(\lambda_k - z_+)} C [B P_k A^*]^q$$

となる. $M(\mu)$ は完全連続で I_N 上で Bochner 可積分だから, 第一項は完全連続^{*)}. (C.9) により, P_k は有限次元空間への射影だから, 完全連続である.

よって, $N \rightarrow \infty$ のとき, $\|K'_N\| \rightarrow 0$ となることを証明すれば, 命題が云えたことになる. (1.1) により, ひまちは
*) (C.8) による.

ρ のときらかは 1 より小さいから, たとえば $\rho < 1$ とする.

すると, $\|BR_1(z)E_1(I_N^c)\| \leq \|B\|H_1 - z\|^{-\rho}\|H_1 - z\|^{-(1-\rho)}E_1(I_N^c)\|$
 $\rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. これより $\|K'_N\| \rightarrow 0$ がでる. $\sigma < 1$ の場合
 の証明もほぼ同様である. (証終)

以上で定理 1.3 は証明された.

結び. §2, §3, §4 で述べた問題をもう少し一般の場合
 で考えられるであろうか. §2 の例では, H_1, H_2 が微分作
 用素であるということはほとんど使われていないから, これ
 らを擬微分作用素にしても, 同じような議論ができるであろ
 う. たとえば, " H_1 を symbol が x によらない擬微分作用素,
 $H_2 - H_1$ を (函数) $\times$ (symbol が x によらない擬微分作用素)
 の一次結合とする", などほとんど形式的な拡張といえよう.
 もちろん, 楕円性の条件などは必要である. 次に, §3 の問
 題では, static solution がある場合も扱えないが, §4 の問
 題では, potential がある場合も扱えないが, ということ
 が, すぐ問題になるが, これらについては, 引き続き, 調べ
 るつもりである.

補題 2.7 の性質 ii), 補題 3.3 の性質 ii) により, $T(\lambda)$ の型が
 わかり, それより散乱行列 $S(\lambda)$ について, $S(\lambda) - 1$ の型が
 わかる ([13] 参照). これについての詳細は省略する.

文 献

- [1] Birman, M. Sh., On the spectra of singular boundary value problems, Mat. Sb. 55 (97) (1961), 125-174. (AMS Transl. Ser.2 vol.53, 23-80.)
- [2] ———, Perturbations of the continuous spectrum of a singular elliptic operator under the change of the boundary and boundary conditions, Vest. Leningrad Univ., Ser. Mat., Meh., Astron. 1 (1962), 22-55.
- [3] Ikebe, T., Scattering for uniformly propagative systems, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, 225-230, Univ. of Tokyo Press, 1970.
- [4] Ikebe, T. and T. Tayoshi, Wave and scattering operators for second order elliptic operators in R^3 , Publ. Research Inst. Math. Science Kyoto Univ. Ser. A 4 (1968), 483-496.
- [5] Kato, T., Wave operators and similarity for non-selfadjoint operators, Math. Ann. 162 (1966), 258-279.
- [6] ———, Scattering theory with two Hilbert spaces, J. Funct. Anal. 1 (1967), 342-369.
- [7] ———, Some results on potential scattering, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, 206-215, Univ. of Tokyo Press, 1970.

- [8] Kato, T. and S. T. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, to appear in F. E. Browder, ed., Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag.
- [9] ————, The abstract theory of scattering, Lecture notes, 1969.
- [10] Konno, R. and S. T. Kuroda, On the finiteness of perturbed eigenvalues, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I 13 (1964), 55-63.
- [11] Kreĭn, M. G., Theory of self-adjoint extension of semi-bounded Hermite operators and its application, I. Mat. Sb. 20 (62) (1947), 431-495 (in Russian).
- [12] Kuroda, S. T., An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, J. Analyse Math. 20 (1967), 57-117.
- [13] ————, Some remarks on scattering for Schrödinger operators, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 17 (1970).
- [14] Schulenberger, J. R. and C. H. Wilcox, Completeness of the wave operators for perturbations of uniformly propagative systems, Technical Summary Report #5, Univ. of Denver, 1970.
- [15] ————, Coerciveness inequalities for nonelliptic

systems of partial differential equations, Technical

Summary Report #4, Univ. of Denver, 1970.

- [16] Ushijima, T., Note on the spectrum of some Schrödinger operators, Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, 4(1968), 483-496.

- [17] Wilcox, C. H., Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics, Arch. Rat. Mech. Anal. 22 (1966), 37-78.