

Bloch 予想のいくつかの例について

東大理 猪瀬博司

1. 以下曲面は、複素数体上の射影曲面のみを考える。 $CH_0(S)$ で曲面 S 上の0-サイクルの有理同値類のつくる群、 $A_0(S)$ で、その中で次数が0のもののつくる部分群とする。1969年 Mumford [5] は $P_g(S) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Omega^2) > 0$ の時、 $A_0(S)$ が“無限次元”になる事を証明し、余次元2以上のサイクルの群の構造が、余次元1のものとはかなり違ったものである事を示した(この結果は、基礎体の標数が正の時には、一般には成り立たない)。Roitman [7] はこの Mumford の結果を精密な形で述べ、更に、 $A_0(S)$ が“有限次元”になるような S については、自然にそれが S の Albanese 多様体 $alb(S)$ に同型となる事を証明した。一方 Bloch [1] は Quillen [6] の代数的 K 理論を用いて、 $P_g(S)=0$ なる曲面 S について $A_0(S)$ が $alb(S)$ に同型(

したがってもしも有限次元)となる事を示唆する結果を得て、この事を予想として定式化した。その時点で、Artin, Lieberman による Enriques 曲面を含むいくつかの曲面について、この予想の成り立つ事がわかっていたが、これらの例は、Bloch, Kas, Lieberman [3] により " S の Kodaira 次元 $k(S)$ が 2 より小の時、 $P_g(S)=0$ なる $A_0(S) \cong \text{alb}(S)$ " とより拡張された形で証明された。しかしここでは曲面の分類理論が使われているためこれに関する条件をはずす事は難しいものと思われる ($k(S)=2$, $P_g(S)=0$ なる曲面の分類はまだ不完全である)。また、 $k(S)=2$ の場合、" P_g に関係なく $A_0(S)$ が無限次元" という命題が成り立つ事も十分ありそうに思えた。そこで今迄知られている $k(S)=2$, $P_g(S)=0$ を満たす曲面について $A_0(S)$ を調べる事に興味をもたれた。自己同型を利用した初等的な計算ののち筆者は次の2つのものにつき Bloch 予想が成り立つ事を確かめた。(他の例については、この報告集中の水上君の稿を見たい。)

① $z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = 0$ を普遍被覆曲面とする

Godeaux 曲面

② Campedelli 曲面 ($k(S)=2$, $P_g(S)=0$, $(K_S^2)=2$, $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$ を満たす極小曲面)

$k(S)=2$, $P_g(S)=0$ なる自動的に $g(S)=\dim H^1(S, \mathcal{O})=0$ となるので $\text{alb}(S)=0$ だから、予想は我々の場合、 $A_0(S)=0$ である。①, ②についてこれを用いるため、次の簡単な補題を用いる。

(補題) X を曲面, G をその上の位数 m の自己同型群, Y を X/G の non-singular model $\pi: X \rightarrow Y$ を商有理写像とすると、2つの準同型

$$\pi_*: A_0(X) \rightarrow A_0(Y), \quad \pi^*: A_0(Y) \rightarrow A_0(X)$$

があり

$$\pi^* \pi_* = \sum_{g \in G} g_*$$

$$\pi_* \pi^* = m$$

を満たす。(但し m 倍写像を単に m と書いた。)

(補題) 上と同じ状況で、 $A_0(Y)=0$ と $\sum_{g \in G} g_* = 0$ は同値である。

(証明) $\sum_{g \in G} g_* = 0$ とせよ。任意の $x \in A_0(Y)$ に対して、 $A_0(Y)$ は divisible (Bloch [2]) なので $x = m^2 z$ となる $z \in A_0(Y)$ がある。 $x = m^2 z = \pi_* \pi^* \pi_* \pi^* z = \pi_* (\sum_{g \in G} g_*) \pi^* z = 0$.

よって $A_0(Y) = 0$. 逆は前の補題より明か。

2. 1 で挙げた Godeaux 曲面について $A_0(S) = 0$ を証明する。 $\tilde{S}$ を 5 次曲面 $z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = 0$, $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{S})$ を $\sigma(z_0:z_1:z_2:z_3) = (z_0:\omega z_1:\omega^2 z_2:\omega^3 z_3)$ (ω は 1 の原始 5 乗根), $S = \tilde{S}/\langle \sigma \rangle$ とおく。この Godeaux 曲面 S はもちろん $K(S) = 2$ で $P_g(S) = 0$ を満たす。 $A_0(S) = 0$ を証明するには、前の補題によって、

(命題) $\text{End}(A_0(\tilde{S}))$ の元として $\sum_{j=0}^4 \sigma_*^j = 0$

を証明すれば良い。以下これを示す。 H を $\text{Aut}(\tilde{S})$ の部分群で $(z_0:z_1:z_2:z_3) \mapsto (\alpha_0 z_0:\alpha_1 z_1:\alpha_2 z_2:\alpha_3 z_3)$ (α_k は 1 の 5 乗根を動く) の形のものの全体とする。 H は 125 個の元からなるが単位元を除く 124 個は次の 5 つの型のどれかに入る (変数の順序を無視して)。

型	$\tau = (\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3)$	$\tilde{S}/\langle \tau \rangle$ の構造
I	$(1:1:1:\omega)$	有理曲面
II	$(1:1:\omega:\omega)$	有理曲面
III	$(1:\omega:\omega^2:\omega^3)$	Godeaux 曲面
IV	$(1:1:\omega:\omega^4)$	$P_g > 0$
V	$(1:1:\omega:\omega^2)$	$P_g > 0$

$\tau \in H$ に対して $P(\tau) = \sum_{j=0}^4 \tau_*^j$ とおく。すると上の表と補題から、I 又は II の型の τ に対して $P(\tau) = 0$ を得る。また H の 2 要素 $\tau, \rho (\neq 1)$ について $\langle \tau \rangle \cap \langle \rho \rangle = \{1\}$ なる

$$P(\tau) \circ P(\rho) = P(\rho) + P(\tau) + P(\tau\rho) + P(\tau\rho^2) + P(\tau\rho^3) + P(\tau\rho^4) = 5.$$

特に、 τ か ρ が I 又は II 型なる

$$(*) \quad P(\rho) + P(\tau) + P(\tau\rho) + P(\tau\rho^2) + P(\tau\rho^3) + P(\tau\rho^4) = 5$$

となる。 $P(\tau)$ に関するこれらの関係式から、III 型の τ について $P(\tau) = 0$ を以下導こう。(この中に $\sum_{j=0}^4 \sigma_*^j$ が入っている。) そのため III, IV, V 型の τ に対する $P(\tau)$ に次の表にしたが、名前をつける。

τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$
$(1: \omega: \omega^2: \omega^3)$	g_1	$(1: 1: \omega: \omega^2)$	a_1	$(1: \omega: \omega^2: 1)$	c_1	$(\omega: 1: \omega^2: 1)$	e_1
$(1: \omega: \omega^3: \omega^2)$	g_2	$(1: 1: \omega^2: \omega)$	a_2	$(1: \omega^2: \omega: 1)$	c_2	$(\omega^2: 1: \omega: 1)$	e_2
$(1: \omega: \omega^2: \omega^{-1})$	g_3	$(1: 1: \omega: \omega^{-1})$	a_3	$(1: \omega: \omega^{-1}: 1)$	c_3	$(\omega: 1: \omega^{-1}: 1)$	e_3
$(1: \omega: \omega^{-1}: \omega^2)$	g_4	$(1: \omega: 1: \omega^2)$	b_1	$(\omega: \omega^2: 1: 1)$	d_1	$(\omega: 1: 1: \omega^2)$	f_1
$(1: \omega: \omega^{-1}: \omega^3)$	g_5	$(1: \omega^2: 1: \omega)$	b_2	$(\omega^2: \omega: 1: 1)$	d_2	$(\omega^2: 1: 1: \omega)$	f_2
$(1: \omega: \omega^3: \omega^{-1})$	g_6	$(1: \omega: 1: \omega^{-1})$	b_3	$(\omega: \omega^{-1}: 1: 1)$	d_3	$(\omega: 1: 1: \omega^{-1})$	f_3

$z_0 \leftrightarrow z_1$	$z_0 \leftrightarrow z_2$	$z_0 \leftrightarrow z_3$	$z_1 \leftrightarrow z_2$	$z_1 \leftrightarrow z_3$	$z_2 \leftrightarrow z_3$
$g_1 \leftrightarrow g_5$	$g_1 \leftrightarrow g_3$	$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_1 \leftrightarrow g_4$	$g_1 \leftrightarrow g_2$
$g_2 \leftrightarrow g_6$	$g_2 \leftrightarrow g_5$	$g_2 \leftrightarrow g_4$	$g_2 \leftrightarrow g_3$	$g_2 \leftrightarrow g_5$	$g_2 \leftrightarrow g_4$
$g_3 \leftrightarrow g_4$	$g_4 \leftrightarrow g_6$	$g_3 \leftrightarrow g_5$	$g_4 \leftrightarrow g_5$	$g_3 \leftrightarrow g_6$	$g_5 \leftrightarrow g_6$

この後の方の表は、以下の計算に使うもので
 例えば、変数 z_0 と z_1 を入れ換えた時 $g_1 = (1: \omega: \omega^2: \omega^3)$
 は $(\omega: 1: \omega^2: \omega^3) = (1: \omega^{-1}: \omega: \omega^2) = (1: \omega^{-1}: \omega^{-1}: \omega^3) = g_5$ に移る事
 を意味している。まず $\tau = (1: 1: 1: \omega)$, $\rho = (1: 1: \omega: \omega)$ を(*)
 に入れて、関係式 $a_1 + a_2 + a_3 = 5$ を得る。同様に
 $b_1 + b_2 + b_3 = 5$, $c_1 + c_2 + c_3 = 5$, $d_1 + d_2 + d_3 = 5$, $e_1 + e_2 + e_3 = 5$, $f_1 + f_2 + f_3 = 5$
 を得る。 $\tau = (1: \omega: \omega^2: 1)$, $\rho = (1: 1: 1: \omega)$ とすると(*)
 は

$$(1) \quad c_1 + e_3 + d_2 + g_1 + g_3 = 5, \quad z_0 \text{ と } z_1 \text{ について } z_0 \text{ と } z_3 \text{ を入れ換えて}$$

$$(2) \quad c_3 + a_2 + b_2 + g_2 + g_3 = 5, \quad z_2 \text{ と } z_3 \text{ を入れ換えて}$$

$$(3) \quad f_3 + b_1 + d_2 + g_2 + g_4 = 5$$

$$(*) \quad \tau = (1: \omega: 1: \omega^{-1}), \rho = (1: \omega: \omega: 1) \text{ とおいて}$$

$$(4) \quad b_3 + e_3 + g_2 + g_5 = 5$$

$$(5) \quad c_3 + f_3 + g_1 + g_6 = 5$$

$$(*) \quad \tau = (1: 1: \omega: \omega), \rho = (1: \omega: \omega^2: 1) \text{ とおいて}$$

$$(6) \quad c_1 + b_2 + e_2 + f_1 + g_4 = 5 \quad (3) \text{ と } (5), (1), (2) \text{ を合わせて}$$

$$(5 - g_1 - g_6 - c_3) + b_1 + (5 - e_3 - c_1 - g_1 - g_3) + (c_3 + a_2 + b_2 + g_2 + g_3 - 5) + g_2 + g_4 = 5$$

$$(7) \quad -2g_1 + 2g_2 + g_4 - g_6 - c_1 - e_3 + a_2 + b_2 + b_1 = 0.$$

$$(4) \text{ を } (7) \text{ に加え, } b_1 + b_2 + b_3 = 5 \text{ を使って,}$$

$$(8) \quad -2g_1 + 3g_2 + g_4 + g_5 - g_6 - c_1 + a_2 = 0$$

z_1 と z_3 を入れ換えて

$$(9) \quad -2g_4 + 3g_5 + g_1 + g_2 - g_3 - a_2 + c_1 = 0 \quad \text{に (8) を加えて}$$

$$(10) \quad 5g_2 + 5g_5 - g = 0 \quad \text{但し} \quad g = \sum_{j=1}^6 g_j$$

z_2 と z_3 , z_1 と z_2 を入れ換えて

$$(11) \quad 5g_1 + 5g_6 - g = 0$$

$$(12) \quad 5g_3 + 5g_4 - g = 0 \quad (10), (11), (12) \text{ より } 2g = 0$$

$\text{End}(A_0(\mathcal{S}))$ は torsion free だから $g = 0$.

$$(13) \quad g_2 + g_5 = g_1 + g_6 = g_3 + g_4 = 0$$

これと (8) とから

$$(14) \quad c_1 = a_2 + 2g_2 - g_1 - g_3, \quad z_0 \text{ と } z_2 \text{ 互に } z_1 \text{ と } z_2 \text{ を換えて}$$

$$(15) \quad e_2 = f_2 + 2g_4 - g_2 - g_6, \quad (14) (15) \text{ を (6) に代入して}$$

$$(16) \quad a_2 + b_2 + f_1 + f_2 + g_2 - 4g_3 = 5, \quad z_1 \text{ と } z_2 \text{ を換えて}$$

$$(17) \quad b_2 + a_2 + f_1 + f_2 + g_3 - 4g_2 = 5, \quad (16) \text{ と } (17) \text{ を較べて}$$

$$g_2 = g_3$$

$z_0, \sim z_3$ を次々と入れ換えて

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = g_6$$

$g_2 + g_5 = 0$ だから $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = 0$, これ
が目的の命題であり. したがって $A_0(\mathcal{S})$ も 0 となる.

3. 次に Campedelli 曲面 S について $A_0(S)=0$ を証明する。(定義は1の②参照) このような曲面は宮岡[4]によって調べられ、その普遍被覆曲面が P^6 の中で a_j, b_j, c_j を或る定数として

$$(1) \quad z_j^2 = a_j z_0^2 + b_j z_1^2 + c_j z_2^2 \quad (3 \leq j \leq 6)$$

によって定義される $(2, 2, 2, 2)$ 完全交叉型曲面を標準モデルとしてもち、もとの S はこの曲面 $\tilde{S}$ を線型自己同型

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

の生成する群で商をとって得られるものに双有理同値である事がわかっている。 S' を

$\tilde{S}/\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ の non-singular model とすれば、 S は $S'/\langle \sigma_3 \rangle$ に双有理である。 $A_0(S)=0$ を証明するには、 $A_0(S')$ の中で

$$(\text{命題}) \quad \sigma_3^* = -1$$

を示せば良い。そのために、

$$\tau_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \text{他} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \tau_j(z_j) = -z_j \text{ 他は不変}$$

と置く。

τ_j は S' の自己同型を導くが、 $j \geq 1$ のとき $\text{End}(A_0(S'))$ で $\tau_j^* = -1$ である。(なぜなら $\bar{S}$ を $S'/\langle \tau_j \rangle$ の non-singular model とする時 $k(\bar{S}) \leq k(\tilde{S}/\langle \tau_j \rangle)$ で、 $\tilde{S}/\langle \tau_j \rangle$ は直接定義方程式を計算する事により、 P^S 中の $(2,2,2)$ 完全交叉に双有理である事がゆかり $k(\tilde{S}/\langle \tau_j \rangle) < 2$ よって $k(\bar{S}) < 2$ 。一方 $\tilde{S}$ 上の正則 2 型式は

$$\frac{z_k z_0^3 d(\frac{z_1}{z_0}) \wedge d(\frac{z_2}{z_0})}{z_3 z_4 z_5 z_6} \quad (k=0, \dots, 6)$$

を basis に持つ事から、 $\sigma_1, \sigma_2, \tau_j$ で不変なものがなく、したがって $p_9(\bar{S}) = 0$ 又 $q(\bar{S}) \leq q(\tilde{S}) = 0$ より結局 $k(\bar{S}) < 2$, $p_9(\bar{S}) = 0$, $q(\bar{S}) = 0$, これと [] より $A_0(\bar{S}) = 0$, 1 の補題を逆に使って $\tau_j^* = -1$)
 故に $(\sigma_3)^* = (\tau_3)^* (\tau_4)^* (\tau_6)^* = -1$ ($\text{End } A_0(S')$)
 となり命題したがって $A_0(S) = 0$ が証明された。

文 献

- [1] Bloch, S., K_2 of artinian $\mathbb{Q}$ -algebras with application to algebraic cycles, *Communication in Algebra*, 3 (1975), 405
- [2] Bloch, S., Some Elementary Theorems about Algebraic Cycles on Abelian Varieties, *Inv. Math.* 37 (1976), 215-228
- [3] Bloch, S., A. Kas and D. Lieberman, zero cycles on surfaces with $P_2 = 0$, *Compositio Math.* 33 (1976), 135-145
- [4] Miyazaki, Y., On Numerical Campedelli Surfaces, in *Complex analysis and algebraic geometry*, a collection of Papers dedicated to K. Kodaira, Iwanami-Cambridge Univ. Press 1977
- [5] Mumford, D., Rational equivalence of 0-cycles on surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* 9 (1969), 195-204
- [6] Quillen, D., Higher algebraic K-theory I, Springer lecture notes 341 (1973)
- [7] Roitman, A. A., Rational equivalence of 0-dimensional cycles, *Math. U.S.S.R. - Sbormik* 18 (1972), 571-588