

特性指数が正整数値を取る非線型特異 1 階偏微分方程式¹

山根英司 (Hideshi Yamane)²

Abstract

次の形の偏微分方程式を考える：

$$(tD_t - \rho(x))u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \dots, D_n u).$$

R.Gérard と田原秀敏の研究によると、もし特性指数 $\rho(x)$ が正整数値を取らないならば $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解がただ一つ存在する。この論説では、 $x = 0$ において $\rho(x)$ が正整数値を取る場合について調べる。

解 $u(t, x)$ は解析的集合 $\{t = 0, \rho(x) \in \mathbf{N}^*\}$, $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, に沿って特異性を持つが、この近くでの解の存在範囲について考える。

§1. イントロダクション

次のタイプの非線型特異 1 階偏微分方程式について調べる：

$$(tD_t - \rho(x))u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \dots, D_n u). \quad (1)$$

ここで $(t, x) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $D_t = \partial/\partial t$, $D_i = \partial/\partial x_i$. また、 $\rho(x)$ と $a(x)$ は、 $\mathbf{C}_x^n$ の原点を中心とする多重円盤 D で定義された正則関数。また、 G_2 は

$$G_2(x)(t, z, X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} a_{pq\alpha}(x) t^p z^q X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n,$$

の形の巾級数展開を持つとする。ここで $a_{pq\alpha}(x)$ は D で正則であり、

$$\sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} \sup_{x \in D} |a_{pq\alpha}(x)| t^p z^q X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n} \text{ は } (t, z, X_0, \dots, X_n) \text{ の収束巾級数とする。}$$

さて局所正則解 $u(t, x)$ であって、条件 $u(0, x) \equiv 0$ を満たすものを探そう。(1) の左辺はこの条件のおかげで well-defined になる。

次の定理は [1] で証明されている。

定理 1 (Gérard-田原) $\overset{\circ}{x} \neq 0$ を D の一つの点とする。もし $\rho(\overset{\circ}{x}) \notin \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ならば、方程式 (1) は $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解 $u(t, x)$ を $(0, \overset{\circ}{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ の近傍でただ一つ持つ。

この定理を踏まえて、 $\rho(\overset{\circ}{x})$ が正整数値を取る場合に何が起きるかを調べよう。

まず [1] の計算を説明する。

$$u(t, x) = \sum_{m \geq 1} u_m(x) t^m \quad (2)$$

¹この場合、「特異」は「フックス型」と言い換えてもよい。

²275 千葉県習志野市芝園 2-1-1 千葉工業大学数学教室 yamane@cc.it-chiba.ac.jp

と置いて形式解を求めるとというのが方針である。 $\{u_m(x)\}$ について次が成り立つ：

$$u_1(x) = \frac{a(x)}{1 - \rho(x)}, \quad (3)$$

であり、 $m \geq 2$ のときは

$$\begin{aligned} & (m - \rho(x))u_m(x) \\ &= f_m(u_1(x), 2u_2(x), \dots, (m-1)u_{m-1}(x), u_1(x), \dots, u_{m-1}(x), \\ & \quad D_1u_1, \dots, D_nu_1, \dots, D_1u_{m-1}, \dots, D_nu_{m-1}, \{a_{pq\alpha}(x)\}_{p+q+|\alpha| \leq m}). \end{aligned} \quad (4)$$

ここで f_m は多項式で、どの係数も 1 である。

仮定 $\rho(\overset{\circ}{x}) \notin N^*$ により、 $u_m(x)$ たちは全ての m に関して、 C_x^n の原点の共通の近傍で正則となる。一方、もし $\rho(\overset{\circ}{x}) \in N^*$ ならば、generic にはある m に関して、 $u_m(x)$ は $x = \overset{\circ}{x}$ で特異性を持つ。そうであれば、 $(0, \overset{\circ}{x}) \in C_t \times C_x^n$ のどんなに小さい近傍においても $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解は存在しない。このような状況について調べようというのである。

例 方程式

$$(tD_t - (1 - x^g))u = tx^h + G_2(x)(t, tD_tu, u, D_1u, \dots, D_nu), \quad g, h \in N^*,$$

は $g \leq h$ のときそのときに限り、(一意な) 正則解 $u(t, x) = \sum_{m \geq 1} u_m(x)t^m$ を持つ。

注意 上の例で示されるように、 $\rho(0) \in N^*$ であっても (3) と (4) で定められる $u_m(x)$ が全て正則になることがある。このような場合に $u(t, x) = \sum_{m \geq 1} u_m(x)$ は原点の十分近くで収束することが [1] で証明されている。

次の仮定を置く：

$$\rho(0) \in N^* = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \rho(x) \neq \rho(0). \quad (5)$$

この仮定のもとで、集合 $V = \{\rho(x) = \rho(0)\} \subset C_x^n$ は余次元 1 の解析的集合である。方程式 (1) は V の外で $u(0, x) \equiv 0$ を満たす正則解をただ一つ持つが、 V の点の近傍では generic にはそのような解は存在しない。

さて、

$$d(x) = \text{dist}(x, V \cup \partial D) = \text{dist}(x, V)$$

と置こう。ここで $\text{dist}(x, Z)$ は x から $Z \subset C_x^n$ までの距離を表わすものとする。第 2 の等号は x が原点に十分近ければ成り立つ。

解 $u(t, x)$ は次の形の開集合において正則である：

$$|t| < Cd(x)^p, \quad x \text{ は原点に十分近い。}$$

ここで p と C は正定数である。 p は $\rho(x)$ だけで決まり、他のもの、例えば G_2 などにはよらない。詳しいことは後で述べる。

$\rho(x) - \rho(0)$ が $x = 0$ においてちょうど g 位のゼロを持つとすると、次の評価が成り立つ：

$$\left| \frac{1}{\rho(x) - \rho(0)} \right| \leq C' d(x)^{-g}. \quad (6)$$

ここで C' は正定数。証明は付録で与える。

主定理を述べよう。

定理 2 (主定理)

(i) もし $\rho(0) \geq g + 2$ ならば、 $u(0, x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t, x)$ は

$$|t| < Cd(x), \quad x \text{ は原点に十分近い,}$$

の形の領域で正則である。

(ii) もし $\rho(0) < g + 2$ ならば、 $u(0, x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t, x)$ は

$$|t| < Cd(x)^{\frac{g+2}{\rho(0)}}, \quad x \text{ は原点に十分近い,}$$

の形の領域で正則である。

どちらの場合でも C は $\rho(x)$, $a(x)$ と $G_2(t, z, X_0, X_1, \dots, X_n)$ で定まる正定数である。

§2. 主定理の証明

解 $u(t, x)$ を t の巾級数の形で表わそう：

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) t^m.$$

そうすると $\{u_m(x)\}$ は次の漸化式を満たす：

$$u_1(x) = \frac{a(x)}{1 - \rho(x)}, \quad (7)$$

$m \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} & (m - \rho(x))u_m(x) \\ &= f_m(u_1(x), 2u_2(x), \dots, (m-1)u_{m-1}(x), u_1(x), \dots, u_{m-1}(x), \\ & \quad D_1 u_1, \dots, D_n u_1, \dots, D_1 u_{m-1}, \dots, D_n u_{m-1}, \{a_{pq\alpha}(x)\}_{p+q+|\alpha| \leq m}). \end{aligned} \quad (8)$$

ここで f_m は多項式で全ての係数が 1 である。 $\rho(0) = M \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ と置くと、generic には $u_m(x)$ ($m \geq M$) は $V = \{x \in \mathbb{C}^n; \rho(x) = M\}$ に沿って特異性を持つ。次の形の評価が成り立つことは簡単に示せる：

原点の共通の近傍で,

$$|u_m(x)| \leq C_m d(x)^{-s_m} \quad (m \geq M). \quad (9)$$

ここで C_m は正定数であり, s_m ($m \geq M$) は正整数である。明らかに $s_M = g$ と置いてよい。(始めの $M-1$ 項, すなわち $s_1, \dots, s_{M-1}$ の決め方はあとで説明する。ちょっとテクニカルな決め方をする。)

命題 1 もし $M \geq g+2$ ならば $s_m = m + g - M$ ($m \geq M$) としてよい。

もし $M < g+2$ ならば $s_{\ell M+k} = \ell(g+2) + k - 2$ ($\ell \geq 1, 0 \leq k \leq M-1$) としてよい。

証明 明らかに次の評価が成り立つ。

$$|D_k u_m(x)| \leq C'_m d(x)^{-(s_m+1)}, \quad m \geq M, k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

ここで C'_m は正定数である。したがって, $m \geq M+1$ に対して

$$s_m = \max \left[\{s_{m_1} + 1; 1 \leq m_1 \leq m-1\} \cup \left\{ \sum_{j'=1}^j (s_{m_{j'}} + 1); 2 \leq j \leq m, m_{j'} \geq 1 (1 \leq j' \leq j), \sum_{j'=1}^j m_{j'} \leq m \right\} \right]. \quad (11)$$

ここで $s_m = -1$ ($1 \leq m \leq M-1$) と置く。こういうテクニカルな置き方をするのは, 例外的な場合, すなわち $m = 1, \dots, M-1$ を扱うためである。これらの場合は u_m は正則であり, u_m とその導関数は有界であるから, (10) のような評価はいらない。実際+1という項は u_m ($m \geq M$) が特異だから必要になったのだった。 $s_{m_1} + 1$ という量は G_2 の項のうちで $u_1, \dots, u_{m-1}, D_1 u_1, \dots, D_n u_1, \dots, D_1 u_{m-1}, \dots, D_n u_{m-1}$ について1次の項から来ている。また, $\sum_{j'=1}^j (s_{m_{j'}} + 1)$ は G_2 の項のうちで $u_1, \dots, u_{m-1}, D_1 u_1, \dots, D_n u_1, \dots, D_1 u_{m-1}, \dots, D_n u_{m-1}$ に関して j 次の項から来ている。

(11) を多少簡単にできる。 $s_m \geq s_{m-1} + 1$ ($m \geq M+1$) が (11) からすぐに従うので, $s_m \geq s_{m-1}$ ($m \geq 2$) が成り立つ。したがって

$$s_m = \max \left[\{s_{m-1} + 1\} \cup \left\{ \sum_{j'=1}^j (s_{m_{j'}} + 1); 2 \leq j \leq m, m_{j'} \geq 1 (1 \leq j' \leq j), \sum_{j'=1}^j m_{j'} = m \right\} \right]$$

となる。さらに

$$\{s_{m-1} + 1\} \subset \{(s_{m_1} + 1) + (s_{m_2} + 1); m_1 \geq 1, m_2 \geq 1, m_1 + m_2 = m\}$$

を用いると次が分かる:

$$s_m = \max_{j=2, \dots, m} \left\{ \sum_{j'=1}^j (s_{m_{j'}} + 1); m_1 \geq 1, \dots, m_j \geq 1, \sum_{j'=1}^j m_{j'} = m \right\}. \quad (12)$$

さて $M \geq g+2$ の場合を m に関する帰納法で証明しよう。示すべき式は明らかに $m \leq M$ のときには成り立つ。 $m \geq M+1$ として, 示すべき式が $s_1, \dots, s_{m-1}$ に対して成り立つと仮定しよう。このとき

$$s_{m-1} + 1 = \{(m-1) + g - M\} + 1 = m + g - M.$$

$s_{m-1} + 1$ が (12) の右辺における最大値を与えることを示せば証明が終わる。それには次の不等式を使う：

$$\sum_{j'=1}^j (s_{m_{j'}} + 1) \leq \sum_{j' \in A} m_{j'} + (\text{card} A)(g - M + 1), \quad (13)$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{j'; m_{j'} \geq M\} \subset \{1, \dots, j\}.$$

もし $A = \emptyset$ ならば, $\sum_{j'=1}^j (s_{m_{j'}} + 1) = 0 \leq m + g - M$ である。ここで最後の不等式は $m \geq M + 1$ という仮定から出る。

次にもし $\text{card} A = 1$ ならば, $m_{j'} \geq 1$ が各 $m_{j'}$ に対して成り立つから,

$$\sum_{j' \in A} m_{j'} \leq m - \text{card} A^c = m - j + 1$$

となる。ここで, $A^c = \{1, 2, \dots, j\} \setminus A$ という記号を用いた。よって (13) と $j \geq 2$ より,

$$\begin{aligned} \sum_{j'=1}^j (s_{m_{j'}} + 1) &\leq m - j + 1 + (g - M + 1) \\ &= m + g - M - j + 2 \\ &\leq m + g - M. \end{aligned}$$

最後にもし $\text{card} A \geq 2$ ならば, $g - M \leq -2$ より

$$\begin{aligned} \sum_{j' \in A} m_{j'} + (\text{card} A)(g - M + 1) &\leq m + 2(g - M + 1) \\ &\leq m + g - M. \end{aligned}$$

これで $M \geq g + 2$ の場合の証明が出来た。

次に $M < g + 2$ の場合を証明しよう。まず $\ell = 1$ と仮定する。 $k = 0$ の場合は明らかに成り立つ。容易に分かるように $s_m = s_{m-1} + 1$, $M + 1 \leq m \leq 2M - 1$ 。よって $\ell = 1$ の場合が示された。

さて, 示したい式が $s_1, s_2, \dots, s_{\ell M + k - 1}$ ($\ell \geq 2, 0 \leq k \leq M - 1$) に関して成り立つと仮定しよう。そうすると

$$\begin{aligned} (s_{(\ell-1)M} + 1) + (s_{M+k} + 1) &= \{(\ell-1)(g+2) - 1\} + \{(g+2) + k - 1\} \\ &= \ell(g+2) + k - 2. \end{aligned}$$

これが (12) の右辺の最大値を与えることを証明しよう。もし $\ell_1 + \dots + \ell_j = \ell - \ell'$, $k_1 + \dots + k_j = M\ell' + k$ ならば,

$$\begin{aligned} (s_{\ell_1 M + k_1} + 1) + \dots + (s_{\ell_j M + k_j} + 1) &= \sum_{j' \in A} \{\ell_{j'}(g+2) + k_{j'} - 1\} \\ &= (g+2) \sum_{j' \in A} \ell_{j'} + \sum_{j' \in A} k_{j'} - \text{card} A \end{aligned}$$

である。ただし $A = \{j'; \ell_{j'} \geq 1\} \subset \{1, 2, \dots, j\}$ と置いた。ここで $\sum_{j' \in A} \ell_{j'} = \sum_{j'=1}^j \ell_{j'} = \ell - \ell'$ であることと $\ell_{j'} = 0$ から $k_{j'} \geq 1$ が従うことに注意しよう。もし $A = \emptyset$ ならば、右辺は $0 \leq \ell(g+2) + k - 2$ に等しく、主張は正しい。

次にもし $A \neq \emptyset$ ならば、

$$\begin{aligned} & (s_{\ell_1 M + k_1} + 1) + \dots + (s_{\ell_j M + k_j} + 1) \\ &= (\ell - \ell')(g+2) + \sum_{j' \in A} k_{j'} - \text{card} A \end{aligned} \quad (14)$$

である。

右辺第2項を評価しよう。もし $j' \notin A$ ならば $\ell_{j'} = 0$ かつ $k_{j'} \geq 1$ である。よって

$$\begin{aligned} \sum_{j' \in A} k_{j'} &= (M\ell' + k) - \sum_{j' \notin A} k_{j'} \\ &\leq (M\ell' + k) - \text{card} A^c \\ &= (M\ell' + k) - (j - \text{card} A) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。(14) と (15) を組み合わせて、

$$\begin{aligned} & (s_{\ell_1 M + k_1} + 1) + \dots + (s_{\ell_j M + k_j} + 1) \\ &\leq (\ell - \ell')(g+2) + (M\ell' + k) - j \\ &= \ell(g+2) + \ell'\{-(g+2) + M\} + k - j \\ &\leq \ell(g+2) + k - j \\ &\leq \ell(g+2) + k - 2. \end{aligned}$$

こうして、 $s_{\ell M + k} = \ell(g+2) + k - 2$ が示された。□

後で次の補題を使う：

補題 1 Ω を $\mathbb{C}_x^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, の領域とし、 Ω の正則関数 $u(x)$ が 次の評価を満たすとする：

$$|u(x)| \leq \frac{C(r)}{r^a}, \quad a \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

ここで $r = \text{dist}(x; \partial\Omega)$ は点 x から Ω の境界 $\partial\Omega$ までの距離であり、 $C(r)$ は r の高々 a 次の多項式で、係数は非負とする。このとき

$$|D_i u(x)| \leq \frac{e(a+1)C(r)}{r^{a+1}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

証明 一般性を失うことなく、 $i = 1$ と仮定できる。グルサの公式より、

$$D_1 u(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{\Gamma} \frac{u(y, x_2, \dots, x_n)}{(x_1 - y)^2} dy.$$

ここで $\Gamma = \{|y - x_1| = \frac{1}{a+1}r\} \subset C_y$ である。

$$y \in \Gamma \text{ のとき } \operatorname{dist}((y, x_2, \dots, x_n); \partial\Omega) \geq r - \frac{r}{a+1} = \frac{a}{a+1}r$$

だから, $C(r) = \sum_{j=0}^a C_j r^j$ と書くと,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \Gamma} |u(y, x_2, \dots, x_n)| &\leq \sum_{j=0}^a C_j \left(\frac{a}{a+1}r\right)^{j-a} \\ &\leq \left(\frac{a}{a+1}\right)^{-a} \sum_{j=0}^a C_j r^{j-a} \leq e \frac{C(r)}{r^a}. \end{aligned}$$

こうして次の評価を得る：

$$\begin{aligned} |D_1 u(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \frac{r}{a+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a+1}r\right)^2} \cdot e \frac{C(r)}{r^a} \\ &= \frac{e(a+1)C(r)}{r^{a+1}}. \end{aligned}$$

□

主定理の証明に戻る。

原点の十分近くで, 次の評価が成り立つと仮定してよい：

$$\begin{aligned} |ju_j(x)| &\leq A, \quad |D_i u_j(x)| \leq A, \quad (j = 1, \dots, M-1, i = 1, \dots, n), \\ |u_M(x)| &\leq A d(x)^{-g}, \quad |D_i u_M(x)| \leq A d(x)^{-(g+1)}, \quad (i = 1, \dots, n), \\ \frac{s_m + 1}{Nm} &\leq 1 \quad (m \geq M), \quad |m - \rho(x)| \geq N\sigma m \quad (m \geq M+1), \\ |a_{pq\alpha}(x)| &\leq A_{pq\alpha}. \end{aligned}$$

ここで A, N, σ と $A_{pq\alpha}$ は正定数で, $\sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} A_{pq\alpha} t^p z^q X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ は収束巾級数である。

次の解析的方程式を考える ($d > 0$ はパラメータ)：

$$\begin{aligned} \sigma Y &= \sigma(At + At^2 + \dots + At^{M-1} + \frac{A}{d^{g+1}} t^M) \\ &\quad + \frac{1}{d} \sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} A_{pq\alpha} t^p Y^q Y^{\alpha_0} (eY)^{\alpha_1} \dots (eY)^{\alpha_n} \\ &\quad - \frac{1}{d} \sum_{m=2}^M B_m t^m. \end{aligned}$$

ここで B_m は次の恒等式に現れる係数である：

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} B_m t^m &= \sum_{p+q+|\alpha| \geq 2} A_{pq\alpha} e^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} t^p (At + At^2 + \dots + At^{M-1})^{q+|\alpha|}, \\ &\quad |\alpha| = \alpha_0 + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n). \end{aligned}$$

陰関数定理により上記の方程式は

$$Y = \sum_{m \geq 1} Y_m(d) t^m$$

の形の正則解 Y をただ一つ持つ。ここで $Y_m(d)$ は次のように求められる：

$$Y_1 = \dots = Y_{M-1} = A, \quad Y_M = \frac{A}{d^{g+1}}.$$

$m \geq M+1$ については,

$$\sigma Y_m = \frac{1}{d} F_m(Y_1, \dots, Y_{m-1}; eY_1, \dots, eY_{m-1}; \{A_{pq\alpha}\}_{p+q+|\alpha| \leq m}).$$

ここで F_m は正係数の多項式である。

容易に分かるように $Y_m(d)$ は

$$Y_m(d) = \frac{C_m(d)}{d^{t_m}}$$

の形である。ここで C_m は高々 t_m 次の多項式で係数は非負である。また $t_m = 0$ ($1 \leq m \leq M-1$), $t_m = g+1$ ($m \geq M+1$) であり,

$$t_m = 1 + \max \left[\{t_{m_1}; 1 \leq m_1 \leq m-1\} \cup \left\{ \sum_{j'=1}^j t_{m_{j'}}; 2 \leq j \leq m, m_{j'} \geq 1 (1 \leq j' \leq j), \sum_{j'=1}^j m_{j'} \leq m \right\} \right]. \quad (16)$$

明らかに $t_m = s_m + 1$ ($m \geq 1$)。よって

$$\begin{aligned} M \geq g+2 \text{ のとき } t_m &= m + g - M + 1 \quad (m \geq M) \\ M < g+2 \text{ のとき } t_{\ell M+k} &= \ell(g+2) + k - 1 \quad (\ell \geq 1, 0 \leq k \leq M-1). \end{aligned}$$

$d = d(x)$ ならば Y が u の優級数であることを示そう。より詳しくいうと, $m \geq 1$ に対して

$$|u_m(x)| \leq |mu_m(x)| \leq Y_m(d), \quad (17)$$

$$|D_i u_m(x)| \leq eY_m(d), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

を示そう。

$m = 1, 2, \dots, M$ の場合は明らかに正しい。

残りは m に関する帰納法で示す。 $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ については上記の不等式が成り立つと仮定する。そうすると

$$\begin{aligned} & |u_m(x)| \\ & \leq \frac{1}{|m - \rho(x)|} f_m(|u_1|, 2|u_2|, \dots, (m-1)|u_{m-1}|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{m-1}|, \\ & \quad |D_1 u_1|, \dots, |D_n u_1|, \dots, |D_1 u_{m-1}|, \dots, |D_n u_{m-1}|; \{a_{pq\alpha}\}_{p+q+|\alpha| \leq m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{N\sigma m} f_m(|u_1|, 2|u_2|, \dots, (m-1)|u_{m-1}|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{m-1}|, \\
&\quad |D_1 u_1|, \dots, |D_n u_1|, \dots, |D_1 u_{m-1}|, \dots, |D_n u_{m-1}|; \{|a_{pq\alpha}|\}_{p+q+\alpha \leq m}) \\
&\leq \frac{1}{N\sigma m} f_m(Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}, \\
&\quad eY_1, \dots, eY_1, \dots, eY_{m-1}, \dots, eY_{m-1}; \{A_{pq\alpha}\}_{p+q+\alpha \leq m}) \\
&= \frac{1}{N\sigma m} F_m(Y_1, \dots, Y_{m-1}, eY_1, \dots, eY_{m-1}; \{A_{pq\alpha}\}_{p+q+\alpha \leq m}) \\
&= \frac{1}{N\sigma m} \cdot \sigma d Y_m(d) = \frac{d}{Nm} Y_m(d)
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$|mu_m(x)| \leq \frac{d}{N} Y_m(d) \leq Y_m(d)$$

となる。ここで、 x は原点が中心で半径 $< N$ の球の中にあるとしている。(そうすれば $0 < d < N$ が成り立つ。) さらに

$$|u_m(x)| \leq \frac{1}{Nm} d Y_m(d) = \frac{1}{Nm} \frac{C_m(d)}{d^{t_m-1}}$$

だから、補題を用いて、

$$|D_i u_m(x)| \leq \frac{t_m}{Nm} e \frac{C_m(d)}{d^{t_m}} \leq e \frac{C_m(d)}{d^{t_m}} = e Y_m(d)$$

が分かる。こうして帰納法が進み、 $u \ll Y$ が証明された。

次は $Y = \sum_{m \geq 1} Y_m(d) t^m$ と $u(t, x) = \sum_{m \geq 1} u_m(x) t^m$ の収束について調べる。

十分小さい $d_0 > 0$ を一つ選んで固定する。そうすると、ある $T > 0$ に対して級数 $\sum_{m \geq 1} Y_m(d_0) T^m$ が収束することが陰関数定理より分かる。

$M \geq g+2$ の場合について調べよう。このとき $t_m = m + g - M + 1$ ($m \geq M$) であり、

$$\infty > \sum_{m \geq M} Y_m(d_0) T^m = \sum_{m \geq M} \frac{C_m(d_0)}{d_0^{m+g-M+1}} T^m = \frac{1}{d_0^{g-M+1}} \sum_{m \geq M} C_m(d_0) \left(\frac{T}{d_0}\right)^m$$

である。もし $|t/d| < |T/d_0|$, $0 < d \leq d_0$ ならば、

$$\begin{aligned}
u &\ll Y = \sum_{m \geq 1} Y_m(d) t^m \\
&= \sum_{1 \leq m \leq M-1} Y_m(d) t^m + \sum_{m \geq M} \frac{C_m(d)}{d^{m+g-M+1}} t^m \\
&= \sum_{1 \leq m \leq M-1} Y_m(d) t^m + \frac{1}{d^{g-M+1}} \sum_{m \geq M} C_m(d) \left(\frac{t}{d}\right)^m \\
|u| &\leq \sum_{1 \leq m \leq M-1} Y_m(d) |t|^m + \frac{1}{d^{g-M+1}} \sum_{m \geq M} C_m(d_0) \left(\frac{T}{d_0}\right)^m < \infty.
\end{aligned}$$

よって、原点に十分近い x に対して、正定数 C が存在して $u(t, x)$ は $|t| < Cd(x)$ で正則となる。($C = |T/d_0|$ と取ればよい。)

次に $M < g+2$ の場合を調べる。このとき $t_{\ell M+k} = \ell(g+2)+k-1$ ($\ell \geq 1, 0 \leq k \leq M-1$) であり、

$$\begin{aligned} \infty > \sum_{m \geq M} Y_m(d_0) T^m &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{C_{\ell M+k}(d_0)}{d_0^{\ell(g+2)+k-1}} T^{\ell M+k} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \frac{T^k}{d_0^{k-1}} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell M+k}(d_0) \left(\frac{T^M}{d_0^{g+2}} \right)^{\ell}. \end{aligned}$$

よってもし $|t^M/d^{g+2}| < |T^M/d_0^{g+2}|$, $0 < d \leq d_0$ ならば、

$$\begin{aligned} u &\ll Y \\ &= \sum_{m \geq 1} Y_m(d) t^m \\ &= \sum_{1 \leq m \leq M-1} Y_m(d) t^m + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{t^k}{d^{k-1}} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell M+k}(d) \left(\frac{t^M}{d^{g+2}} \right)^{\ell}. \\ |u| &\leq \sum_{1 \leq m \leq M-1} Y_m(d) |t|^m + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{|t|^k}{d^{k-1}} \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell M+k}(d_0) \left(\frac{T^M}{d_0^{g+2}} \right)^{\ell} < \infty. \end{aligned}$$

よって原点に十分近い x に対して正定数 C が存在して $u(t, x)$ は $|t^M| < Cd(x)^{g+2}$ で正則となる。

これで主定理の証明が終わった。

§3. 付録 1

イントロダクションの評価 (6) の、大阿久俊則による証明を与える。大阿久先生、どうもありがとうございました。

命題 2 $\mathbb{C}_x^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, の原点の近傍 Ω で定義された正則関数 $f(x)$ を考える。原点において $f(x)$ はちょうど g 位のゼロを持つとする ($g \in \mathbb{N}^*$)。 $V = \{x \in \Omega; f(x) = 0\}$ と置き、 $d(x)$ で点 $x \in \Omega$ から V までの距離を表わす。

このとき、原点の近傍 $\Omega' \subset \Omega$ と正定数 $C > 0$ が存在して、

$$|f(x)| \geq Cd(x)^g, \quad x \in \Omega'.$$

証明 $f(x)$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{|\alpha| \geq g} f_{\alpha} x^{\alpha}$ とする。 $f_g(x) = \sum_{|\alpha|=g} f_{\alpha} x^{\alpha}$ と置くと、これは 0 でない斉次多項式である。必要なら適当な線型座標変換を行って、 $f_{(g,0,\dots,0)} \neq 0$ と仮定してよい。Weierstrass の予備定理により、 $f(x)$ は次の形に書ける：

$$f(x) = c(x)(x_1^g + a_1(x')x_1^{g-1} + \dots + a_g(x')), \quad c(0) \neq 0, a_1(0') = \dots = a_g(0') = 0.$$

ここで $c(x)$ は $\mathbf{C}^n$ の原点 0 の近傍の正則関数で、各 $a_i(x')$ ($i = 1, 2, \dots, g$) は $\mathbf{C}_x^{n-1}$, $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ の原点 $0'$ の近傍の正則関数である。よって、関数 $\varphi_1(x'), \dots, \varphi_g(x')$ (正則とは限らない) が存在して

$$f(x) = c(x) \prod_{j=1}^g (x_1 - \varphi_j(x')), \quad \varphi_1(0') = \dots = \varphi_g(0') = 0.$$

が成り立つ。

もし x が原点に十分近ければ

$$\begin{aligned} |f(x)| &\geq \frac{1}{2} |c(0)| \prod_{j=1}^g |x_1 - \varphi_j(x')| \\ &\geq \frac{1}{2} |c(0)| d(x)^g. \end{aligned}$$

□

この種の評価は実解析的カテゴリでは成立しない。反例を与えよう。

$f(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, と置く。 f は $(0, 0)$ で 2 位のゼロを持つ。 $V^{\mathbf{R}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; f(x_1, x_2) = 0\}$ と置く。もし $d > 0$ ならば $V^{\mathbf{R}}$ から点 $(-d, 0)$ までの距離は d である。(これは $(0, 0) \in V$ から $(-d, 0)$ までの距離である。) $f(-d, 0) = d^3$ に注意しよう。

別に矛盾が生じているわけではない。 $V^{\mathbf{C}} = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; f(z_1, z_2) = 0\}$ には $(-d, 0)$ にごく近い点が存在する。そのような点は例えば $V^{\mathbf{C}}$ と $\mathbf{R}_{x_1} \times i\mathbf{R}_{y_2} \subset \mathbf{C}_{(x_1+iy_1, x_2+iy_2)}^2 = \mathbf{C}_{(z_1, z_2)}^2$ の共通部分の上にある。実際、方程式 $f(x_1, iy_2) = -x_1^3 - y_2^2 = 0$ は $\mathbf{R}_{(x_1, y_2)}^2 \ni (-d, 0)$ 内に曲線を定め、もし $d > 0$ が十分小さければ、この曲線は点 $(-d, 0)$ に非常に近い。

実解析関数の下からの評価については [5] を見るとよい。

§4. 付録 2

動機付けを説明するために、一つの例について述べる。 $(t, x) \in \mathbf{C}^2$ において

$$\begin{cases} \{tD_t - (2 - x^g)\}u(t, x) = ta(x) + (D_x u)^2, \\ u(0, x) \equiv 0 \end{cases}$$

について考察する。

$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$ において漸化式を立てる。簡単な計算で、 $m \geq 2$ のとき各 $u_m(x)$ は $x = 0$ に極を持ち、その位数は、 m が偶数のとき $g + \frac{g+2}{2}(m-2) = -2 + \frac{g+2}{2}m$ であること、 m が奇数のとき $-1 - \frac{g+2}{2} + \frac{g+2}{2}m$ であることが分かる。つまり

$$\text{極の位数} \sim \frac{g+2}{2}m$$

である。このことより, $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$ は $|t| < \text{const}|x|^{\frac{q+2}{2}}$ で収束すると予想される。実際これが正しいことが陰関数定理で証明される。

この講究録に書いたもう一つの論説や [7] では線型高階の場合を調べている。これらの問題意識を理解するには上と同じような考察が役立つ。線型の場合, 形式解は表立って用いてはいないが, それは証明の都合であって, 舞台裏では形式解の考察が動機付けとなっている。

参考文献

- [1] Gérard R. and Tahara H., Holomorphic and Singular Solutions of Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26**(1990), 979-1000.
- [2] Gérard R. and Tahara H., *Singular Nonlinear Partial Differential Equations*, Vieweg, 1996.
- [3] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley and Sons, 1976.
- [4] Kimura T., *Ordinary differential equations*, Iwanami Shoten, 1977 (in Japanese).
- [5] Lojasiewicz S., Sur le problème de la division, *Studia Math.*, **18**(1959), 87-136.
- [6] Yamane H., Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33**(5)(1997).
- [7] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, to appear in *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*