

正規・過圧密粘性土のダイラテンシー特性と 応力—ひずみ関係

清水 正 喜

CHARACTERISTICS OF DILATANCY AND STRESS-STRAIN BEHAVIOUR OF A CLAY IN N.C. OR O.C. STATE

By Masayoshi SHIMIZU

Synopsis

Volume change behaviour under spherical or shearing stress condition and the relation between stress ratio and strain increment ratio, of a remoulded-reconsolidated clay in N.C. or O.C. states, have been studied experimentally and their characteristics are clarified with mathematical formulations in this paper.

The swelling and recompression characteristics under spherical stress state can be evaluated from the results already obtained. The mathematical expressions for the positive dilatant behaviour in O.C. state are given. It is clarified that the relation between stress ratio and strain increment ratio, under p -const. conventional triaxial condition, should have the different forms dependent on the values of O.C.R., and these relations have been used to determine the plastic potential function for p -const. condition. Another plastic potential function, for η -const. condition, is also determined.

Finally, a mathematical plasticity model is given, and some calculated stress-strain relations are compared with test results along fundamental stress paths.

1. 序 論

本研究は、過圧密状態にある粘性土のダイラテンシーに注目し、実験的考察に基づいてそれを定量的に表現する試みを行い、弾塑性増分理論の立場から平衡状態の力学特性を解明しようとするものである。

過圧密状態は、過去に必らず存在していた正規圧密状態から、圧密圧力の減少という応力履歴を受けて現在に至ったものである。したがって、正規および過圧密両状態の力学挙動の差異は、応力の履歴を反映したものである。そのような応力の履歴を考慮する方法として、弾塑性論は有用である。

弾塑性理論に立脚した研究は多いが、いわゆる過圧密領域において塑性ひずみが発生するという実験的事実を考慮した研究が現れたのは比較的最近のことである。Roscoe & Burland¹⁾が Original Cam Clay モデル²⁾を修正したもののもそのためであるが、修正された理論においても、塑性的な体積ひずみは過圧密領域（状態境界面内部）において発生しないと仮定されている。しかし実験事実によれば、過圧密状態にある土もダイラテンシーとしての塑性体積ひずみは発生する³⁾⁻⁶⁾。

過圧密粘土のダイラテンシーに関する実験的研究は少ないが、著者³⁾⁻⁵⁾や大槌⁶⁾らの実験事実をみれば、それを無視することは出来ない。Pender⁷⁾は、非排水有効応力径路を近似した関係式に基づいて過圧密状態の応力ひずみ関係に関して理論を立てているが、彼の研究成果をダイラテンシーという側面から捉えれば、結果的にその発生を考慮していることになる。

さて、多くの弾塑性理論は、等方応力状態で除荷されたときの膨潤曲線は弾性的であると仮定している。しかし、膨潤曲線と再圧縮曲線が一致しないことは実験的に明らかである。Cam clay モデル²⁾や修正 Cam

clay モデル¹⁾、太田の理論⁸⁾等において仮定されている弾性壁 (clastic wall) の存在は、実験的に否定されてしまうし、ダイラテンシーの存在は認めても状態境界面内の圧密・膨潤を κ (膨潤指数) という定数で規定しようとする多くの研究も同様である。

本論では、議論は複雑になるという欠点を避けて、状態境界面内部の塑性体積ひずみの存在はもちろん、等方応力状態においてさえ塑性的体積ひずみが発生する事実に基いて、塑性体積ひずみを評価する立場をとる。

塑性論の基本的立場に基づいて存在を仮定されている塑性ポテンシャルは、実験的には塑性ひずみ増分比を応力の関数として表現することにより決定される。塑性論に立脚しているか否かは別として、砂も含めて土の力学挙動を支配する法則として応力比 $\sim$ ひずみ増分比関係が重大な役割を果たすことは、周知の通りである。たとえば、Cam Clay²⁾、修正 Cam Clay モデル¹⁾におけるエネルギー式、Rowe⁹⁾ のストレス・ダイラテンシー式、松岡¹⁰⁾ のモービライズド面上の関係式など多くの研究に於て用いられている。ところが、対象を粘性土に限った場合、従来の研究は正規圧密領域や軽く過圧密された領域に関して議論が行われており、過圧密比の広い範囲に対してその関係の特性を調べた例は無い。本論では、平均有効主応力一定条件下において、その関係を実験的に調べ、結果を塑性理論構成に適用している。

西ら¹¹⁾ は砂を対象にして弾塑性理論を適用するに際して、せん断と圧密の両概念を区別し、それぞれの作用において独自の塑性的挙動を仮定している。考え方としては土質力学の基本的立場であるが、弾塑性理論を進展させる上で有効であると思われる。本論においても結果として西らの方法同様、圧密作用に関する塑性挙動とせん断作用に対するそれを区別し、両作用下の挙動は、それぞれの作用により発生したひずみ増分の和で与える。これは、平均主応力一定の条件下で求められた応力比とひずみ増分比の関係が、本質的に、他の条件には適用できないという直感と、両作用の力学的意味が異なると考えるからである。

以下、まず等方圧密・膨潤特性と、平均有効主応力一定試験の結果について考察し、それに基づいて塑性増分理論により応力 $\sim$ ひずみ挙動について考察する。

応力はすべて有効応力の意味であり、応力条件は軸対称三軸圧縮に限っている。応力の変数として、 $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ 、 $q = \sigma_1 - \sigma_3$ (または $\eta = q/p$) をとり、対応するひずみ増分の変数として、 $dv = d\epsilon_1 + 2d\epsilon_3$ 、 $d\epsilon = d\epsilon_1 - dv/3$ を用いる。 dv 、 $d\epsilon$ をそれぞれ、体積ひずみ増分、せん断ひずみ増分と呼ぶ。

2. 体積変化特性

2.1 実験概要

試料および装置は前報³⁾と同じ種類であるので省略する。

供試体は、直径 3.56 cm、高さ 8.0 cm の円柱形で、側面には、排水促進用の口紙をすだれ状に切って巻き、上下端面からの排水は許さない半径方向排水条件とした。

せん断に先立ち、所定の過圧密比 (O. C. R.) n と平均有効主応力 p の値に応じて等方圧密履歴を与えた。その後、 p が一定となるように軸圧 σ_1 および側圧 σ_3 を変化させながら応力制御により排水せん断した。応力比 $\eta (=q/p)$ の増分 $d\eta = 0.1$ を約 24 時間毎に増加させて破壊に至るまでせん断した。

最大圧密圧力 p_{cmax} は 6 kg f/cm² とし、O. C. R. は、1, 1.5, 2, 4, 8, 20 とし、各 O. C. R. について、実験は原則として 2 回以上行っている。

2.2 等方応力下の体積変化特性

等方応力下の体積変化特性を間隙比 $e \sim$ 圧密圧力の対数 $\ln p$ の関係において考察する (Fig. 1)。

正規圧密状態の処女圧縮曲線の勾配 $\lambda (= -de/d \ln p)$ は、圧密圧力の大きさに拘らず一定値をとり、正規圧密状態における $e \sim \ln p$ 関係として、(1)、(2) 式を得る：

$$e - e_a = -\lambda \cdot \ln p \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$de = -\lambda \cdot dp/p \quad \dots\dots\dots (2)$$

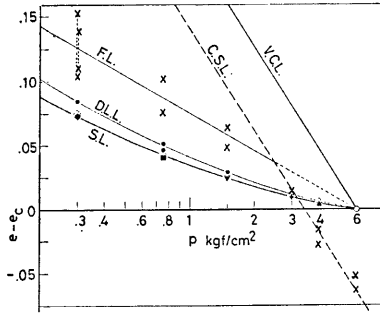


Fig. 1. Results of p -const. drained triaxial compression tests, with varying O.C.R. values 1-20, on e -log p plane.

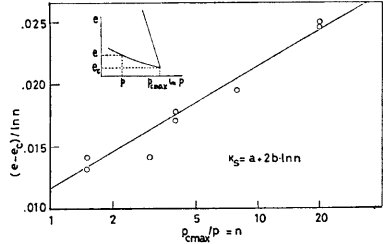


Fig. 2. $(e - e_c) / \ln n \sim \log n$ relation for spherical swelling.

ここに、 e_a は $p = 1 \text{ kgf/cm}^2$ のときの空隙比、 λ は正規圧縮指数とともに定数である。

膨潤指数 κ_s は、圧密圧力に依存し一定とならず、O. C. R. n の関数として (3) 式で表わされ、(3) 式を積分した関係式 (4) により定数 a, b が O. C. R. および最大圧密圧力に依らないことをすでに実験的に検証した^{(4),(5)}。

$$\kappa_s \equiv -de/d\ln p = a + 2b \cdot \ln n \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$e - e_c = (a + b \cdot \ln n) \cdot \ln n \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 e_c は $p = p_{\text{max}}$ のときの空隙比、 a, b は定数である。Fig. 2 は、(4) 式の関係を検証したものであり、等方膨潤時の空隙比の変化は、(3) または (4) 式で十分評価できることがわかる。Fig. 1 に示した膨潤線 (S.L. と記す) は、Fig. 2 から決定された a, b の値 (Table. 1 参照) を用いて計算したものである。式 (3) より、定数 a は $n \rightarrow 1$ のときの κ_s を表わしていることがわかる。

再圧縮指数 κ_{rc} ⁽⁵⁾ については、(5), (6) 式から評価できる (今回は再圧縮特性に関する実験は行っていない)：

$$\kappa_{rc} \equiv -de/d\ln p = -(\bar{k}\lambda - a) \cdot \ln n / \ln N + \bar{k}\lambda \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(e - e_0) / \ln(p/p_0) = (\bar{k}\lambda - a) \cdot \ln n / 2 \ln N - (\bar{k}\lambda + a) / 2 \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 a は (3) 式中の a と同じ定数、 N は最大過圧密比であり、再圧縮開始時の p を p_0 において、 $N = p_{\text{cmax}}/p_0$ で与えられる。 $\bar{k}$ は、再圧縮過程において、過圧密領域から正規圧密領域へ入る点での κ_{rc} を $\bar{k}\lambda$ とした場合の係数であり、 N に依存する (Table. 1 参照)。

等方応力下の体積変化特性を記述するための定数の値は、Table. 1 にまとめて示した。同表中、 $\bar{k}$ については、前報⁽⁵⁾ の実験から決定された関係： $\bar{k} = 0.0866 \ln N + 0.137$ より計算したものである。

Table 1. Characteristic constants describing the volume change behaviour under spherical stress state.

Eq. (1)	Eq. (1)	Eq. (3) or Eq. (4)		Eq. (5) or Eq. (6)				
e_a	λ	a	b	$\bar{k}$				
0.915	0.115	1.17×10^{-2}	4.22×10^{-3}	N=32 0.437	N=16 0.377	N=8 0.317	N=4 0.257	N=2 0.197

2.3 ダイレタンシー特性

(1) 正のダイレタンシー

(a) ダイレタンシー限界以下のダイレタンシー

過圧密粘土をせん断すると、ある応力比以下ではダイレタンシーがほとんど発生しないが、その応力力比を越えると急に発生量が大きくなるという実験事実があり、足立ら¹²⁾にならい、その限界をダイレタンシー限界と呼び、 p 一定試験結果を $q/p_e \sim p/p_e$ 関係で表わしたときにせん断の初期に現れる直線関係が終る点として定義している⁴⁾⁵⁾。ここに、 p_e は Hvorslev の等価圧密圧力¹³⁾であり、ある間隙比 e に対して次式で表わされる：

$$p_e = \exp\{(e_n - e)/\lambda\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ダイレタンシー限界に至るまで (8) 式が成り立ち、それを間隙比の変化量で表わせば (9) 式を、微分形で (10) 式をそれぞれ得ることができる：

$$q/p_e = D^* \{p/p_e - (p/p_e)_0\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$e - e_0 = -\lambda \cdot \ln(1 - \eta/D^*) \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$de = \frac{\lambda/D^*}{1 - \eta/D^*} \cdot d\eta \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 D^* は $q/p_e \sim p/p_e$ 関係の直線部の勾配、すなわち $D^* = d(q/p_e)/d(p/p_e)$ 、添字の 0 は、今後とも、 $q=0$ の等方応力状態を表わす。

Fig. 3 は、今回行った p 一定せん断試験結果を $q/p_e \sim p/p_e$ 関係で整理したものである。同図において、ダイレタンシー限界に相当する応力比を η_{DL} として示した。この図から、正規圧密試料 (O. C. R. 1) を除いて、 η_{DL} 以下では先に述べた直線関係が成立しており、 $(p/p_e)_0$ が小、したがって O. C. R. が大きいものほど η_{DL} が大きいことがわかる。また、正規圧密供試体はせん断の初期から p/p_e が減少する方向、すなわち p_e が増加するような負のダイレタンシー (圧縮) を示していて、正規圧密に近い極く過圧密されたもの (O. C. R. : 1.5, 2) は η_{DL} まで直線的に p/p_e が増加 (正のダイレタンシー：膨張側) しているが、その後 p/p_e が減少している。一方、強く過圧密されたもの (O. C. R. : 4, 8, 20) は、 η_{DL} 以後も p/p_e が増加、すなわち正のダイレタンシーがより顕著になっていることがわかる。

Fig. 4 は、**Fig. 3** の直線部の勾配 D^* の逆数 $1/D^*$ と $p/p_{emax}(=1/n)$ の関係を示したものであり、 p/p_{emax} が増加すると $1/D^*$ が直線的に減少していることがわかり、その関係を (11) 式で表わすことができる：

$$1/D^* = m^* \cdot (1/n - 1/n^*) \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 n^* , m^* は **Fig. 4** から決定される定数であり (**Table 2** 参照)、 n^* は $1/D^* \rightarrow 0$ の点の O. C. R. を表わしている。 $n \leq n^*$ の供試体について p 一定試験を行うと $q/p_e \sim p/p_e$ 関係の直線部の勾配 D^* が無限大になる、すなわち、ダイレタンシー限界以下でダイレタンシーの発生がないということを意味している。

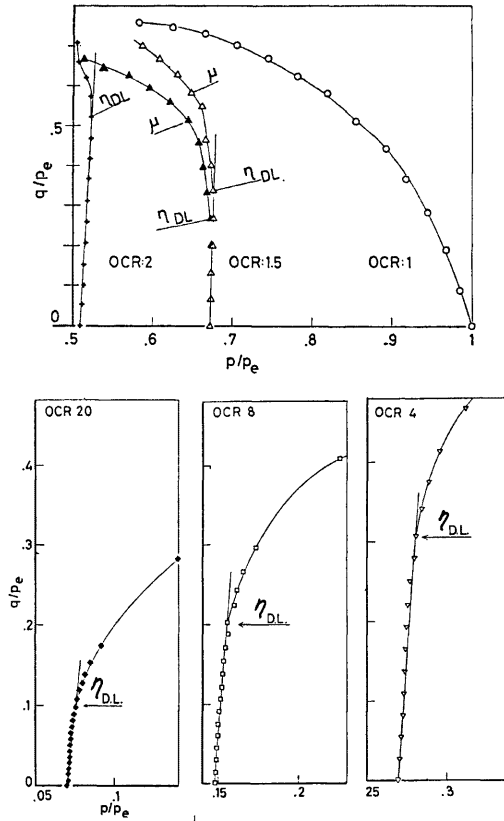
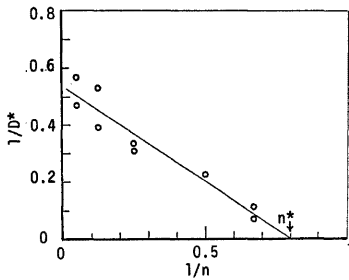
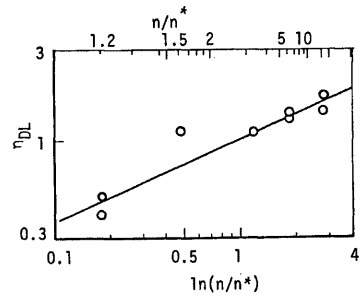
ダイレタンシー限界応力比 η_{DL} は、O. C. R. が大きくなると大きくなる傾向があることは先に指摘したが、**Fig. 5** に η_{DL} と O. C. R. の関係を示した。同図は、後述の応力比 $\sim$ ひずみ増分比関係による考察と矛盾しないように、 $n \rightarrow n^*$ のとき $D^* \rightarrow \infty$ となると同時に $\eta_{DL} \rightarrow 0$ となることを仮定して、 η_{DL} と $\ln(n/n^*)$ との関係を両対数紙上にプロットしたものである。両者の直線関係から、次式が得られる：

$$\eta_{DL} = M_{DL} \{\ln(n/n^*)\}^{m_{DL}} \quad (n > n^*) \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 M_{DL} , m_{DL} は **Fig. 5** から決定される定数 (**Table 2** 参照)。 $n < n^*$ であれば、 $n=1$ の正規圧密試料の挙動との類推から、せん断の初期から負のダイレタンシーが発生し、 $\eta_{DL}=0$ であると考えられる。

(b) ダイレタンシー限界以上のダイレタンシー

Fig. 3 において、ダイレタンシー限界を越えた後も破壊するまで正のダイレタンシーを示すもの (これを

Fig. 3. p -const. drained triaxial compression test results on $q/p_e \sim p/p_e$ plane.Fig. 4. $1/D^* \sim 1/n$ relation: the dependency of the values of D^* on O.C.R.: n .Fig. 5. $\eta_{DL} \sim \ln(n/n^*)$ relation on log-log plane.

Dry 側にあるといい、O. C. R. 4, 8, 20 がこれに相当) について、ダイレタンシー限界以後の傾向として q/p_e は p/p_e のべき関数的に変化している様子がうかがえる。Fig. 6 に $q/p_e \sim (q/p_e)_{DL}$ と $p/p_e \sim (p/p_e)_{DL}$ との関係を保対数上にプロットしたが、両者は過圧密比に対応して1本の直線上にプロットされることがわかる。その関係を次式で与えることができる：

$$\begin{aligned} q/p_e - (q/p_e)_{DL} &= A \cdot \{p/p_e \\ &\quad - (p/p_e)_{DL}\}^m \quad \dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに添字の DL はダイレタンシー限界に相当する量であることを表わし、 A , m は Fig. 6 から決定される定数で O. C. R. が大きくなると大きくなる (Table 2, Fig. 7)。式(13)の両辺の対数を取り、 p , $(q/p_e)_{DL}$, $(p/p_e)_{DL}$ などが定数であるとして微分すれば、 p 一定時の間隙比の変化として (14) 式を得る：

$$\begin{aligned} de = -\lambda \cdot d\eta \left/ \left[\eta \cdot \left\{ 1 - m \frac{1 - (q/p_e)_{DL} / (q/p_e)}{1 - (p/p_e)_{DL} / (p/p_e)} \right\} \right] \right. \\ \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

結局、(8) または (10) 式と (13) または (14) 式により、Dry 側の過圧密状態のダイレタンシーを記述することができるが、これらの関係式はピーク応力比までの関係であって、ピーク以後のダイレタンシーは、今後の問題として残されている。

Fig. 8 に正のダイレタンシーの計算値と実測値との比較を示した。計算値は実測値をよく表現している。同図でせん断の初期に現れている直線的部分は、 $\eta < \eta_{DL}$ に対応しているが、式 (10) において $1 \gg \eta/D^*$ となるためであると考えられる。

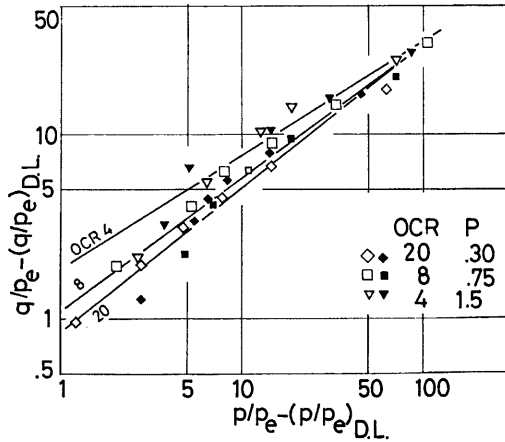


Fig. 6. Relationships of $(q/p_e - (q/p_e)_{DL})$ and $(p/p_e - (p/p_e)_{DL})$ on log-log plane, corresponding to the dilatant behaviour beyond the "Limit of Dilatancy."

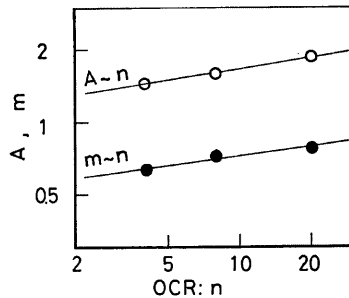


Fig. 7. Dependencies of coefficients A and m in Eq. (13) on O.C.R. (log-log scale).

Table 2. Constants describing positive volume change behaviour for p -constant drained condition.

Eq. (11)		Eq. (12)		Eq. (13)	
m^*	n^*	M_{DL}	m_{DL}	A	m
-0.0669	1.25	0.996	0.463	$n=4$	1.44
				$n=8$	1.58
				$n=20$	1.85
					0.628
					0.720
					0.781

(2) 負のダイレタンシー

負のダイレタンシーは、正規圧密および軽く過圧密された状態において見られる現象である。Fig. 9 に正規および O. C. R. 1.5, 2 のダイレタンシーによる間隙比の変化量 ($e - e_0$) と応力比 η との関係を示した。過圧密状態のうち、破壊するまでに一度はダイレタンシーの傾向を負に変えるものを Wet 側にあるといい、Fig. 9 の O. C. R. 1.5, 2 の状態がこれに相当する。

Fig. 9 において、正規圧密されたものはせん断の初期から圧縮側のダイレタンシーを示し、ある応力比 μ_0 (Fig. 9 では 0.3~0.4) を境にしてダイレタンシーはさらに増加する傾向が見られる。一方、過圧密されたものについては、 $\eta = \eta_{DL}$ までは膨張側のダイレタンシーが発生しており既に述べた通りであるが、 η_{DL} においてダイレタンシーの傾向は負に転じ、 $\eta = \mu$ と記したあたりでその傾向はさらに大きくなっている。

同図において、過圧密に対して、 $\eta_{DL} < \eta < \mu$ および $\mu < \eta$ の範囲でひいた 2 本の直線は、正規圧密の $0 < \eta < \mu_0$ および $\eta \geq \mu_0$ にひいた直線とそれぞれ平行にひかれたものであり、これにより、過圧密されていても、ダイレタンシーの傾向が負になる応力比レベルにおいては、ダイレタンシー挙動が正規のそれに似ていることを示唆している。このようなことから、Wet 側にある過圧密のダイレタンシーから類推することにし、4 で塑性論の立場から決定される。 μ_0 , μ の意味については、次節で検討する。

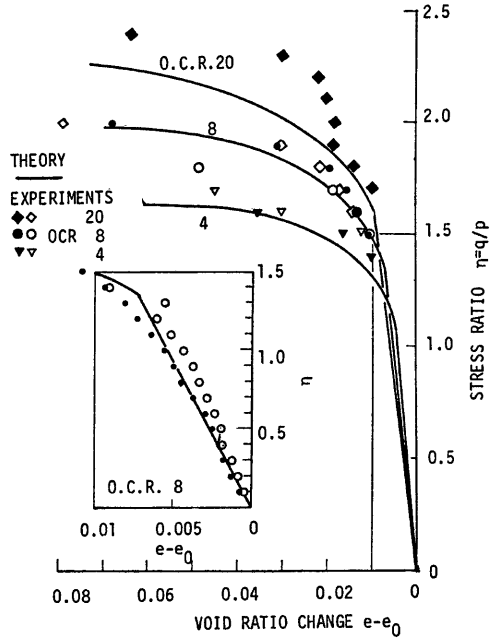


Fig. 8. Positive dilatant behaviour. Calculated and experimentally obtained results of the relations between stress ratio and void ratio change.

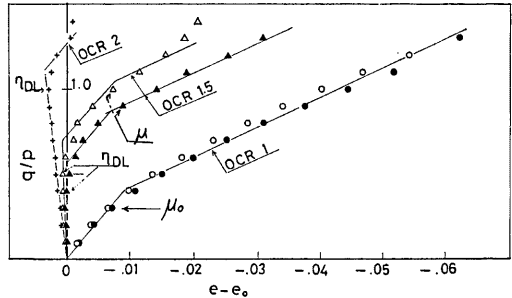


Fig. 9. Experimentally obtained results of positive and/or negative dilatancy for normally consolidated or "Wet-side" overconsolidated state.

3. 応力比～ひずみ増分関係

3.1 実験の結果

Fig. 10 は、今回行った p 一定試験から得られた q/p と $(-dv/d\varepsilon)$ との関係を示したものである (同じ O. C. R. に対して異なるプロットの記号を用いているのは供試体が異っていることを示す)。ここに、 $dv, d\varepsilon$ はともに各応力比段階の初期の供試体の高さ、体積をもとに計算された体積およびせん断ひずみ増分であり、応力比増分が微小であれば、自然ひずみに対応した増分である。

Fig. 10 より、正規圧密供試体は図中に μ_0 と記した点以降応力比の増加とともに式 (15) で表わされる直線上にプロットされていることがわかる：

$$q/p = -dv/d\varepsilon + M \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 M は $-dv/d\varepsilon = 0$ のときの応力比であり、かつ破壊時の応力比でもあり、Cambridge theory の Critical State の応力比に相当すると考えられる。

O. C. R. 1.5 および 2 の供試体は、はじめ $-dv/d\varepsilon > 0$ の側 (体積膨張) から出発し、その後ある応力比

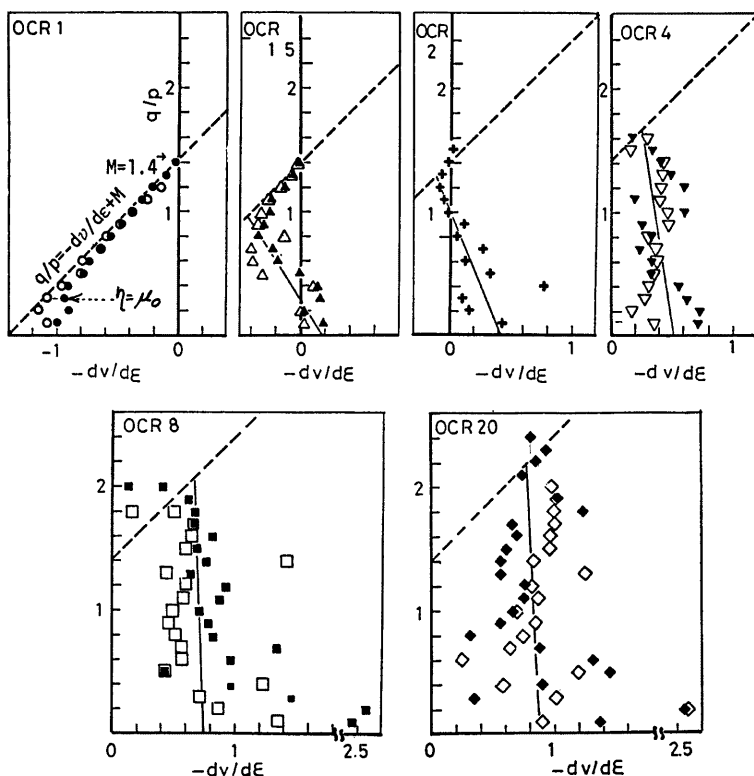


Fig. 10. The dependency of $-dv/d\varepsilon \sim q/p$ relationship on O.C.R. under p -const. drained triaxial compression condition.

(この応力比を η_0 と記す) において $-dv/d\varepsilon < 0$ の領域に入り, $\eta = \mu$ において (15) 式の直線上にのり, 以後 $\eta = M$ まで同直線上を移動し破壊している。

O. C. R. 4, 8 および 20 のものでは, つねに $-dv/d\varepsilon > 0$ の領域にあるが, 破壊時の応力比において (15) 式の直線上に至っている。なお, O. C. R. 8 の場合に, ひとつの試験に対して同じ応力比で 2 点プロットされているのは, 応力制御によるせん断であるために破壊の点のひずみ増分を決定するのが困難であり, 変形が無限に進み始める点と, 試験を続行するのが不可能になった点についてプロットしたものである。

3.2 結果の考察

Fig. 10 は, p 一定試験中のひずみ増分比～応力比関係が過圧密比によって変化することを示している。Fig. 11 に, 正規および過圧密 (O. C. R. 1.5) の粘土について松岡ら¹⁴⁾ が行った p 一定試験結果を示す。ここでは, 正規に対しては $\eta = 0.6$, 過圧密に対しては $\eta = 1.0$ 以降に 1 本の直線上にプロットされているが, それ以下の応力比に対しては, 図には明瞭ではないが, 正規・過圧密で異った関係で表わされることが予想される。

Cam clay モデルや, 修正 Cam clay モデルにおいては, 応力 (p, q) および間隙比で表わされる状態が, 状態境界面内部に存在する間は, ダイレタンスは生じないとし, 状態境界面に達して, 塑性体積ひずみとしてのダイレタンスが生ずる。そのときの塑性体積ひずみ増分・塑性せん断ひずみ増分比と応力比の関係が, エネルギー式としてそれぞれのモデルで仮定されている。仮定された応力比～ひずみ増分比関係は, Cam clay モデルでは (15) 式と同じ形であることは, 非常に興味深い。

本論では, 正規・過圧密を問わず, せん断の初期から塑性せん断ひずみが生じるという立場をとっている。塑性せん断ひずみは土粒子 (あるいは, 変形単位としての土粒子の集合体) の相対的な変形の結果であり, 相対的な変形の間に粒子のインターロッキング作用としてのダイレタンスも生じると考えられる。従って, (15) 式で表わされる関係が状態境界面上の変形を規定するとは考えられても, そこに至るまでも, (15) 式と別の形の関係式が存在しなければならず, それが過圧密比の関数であるとも考えることも自然であろう。

さて, Fig. 10 において, O. C. R. 1.5, 2, 4 および 8 に対して図中に示した実線の直線は, 概その傾向としてひいたものであり, 今, その勾配を $1/\alpha$ として, $-\alpha$ と O. C. R. の関係を両対数紙上で調べると, Fig. 12 のようになる。同図からわかるように, 1 本の直線で表わされ, 次式の関係仮定することができる:

$$1/\alpha = (1/\alpha_N) \cdot n^{m_n} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに, α_N, m_n は, Fig. 12 から決定される定数 (Table 3), $1/\alpha_N$ は (16) 式からわかるように, $n = 1$ のときの $1/\alpha$ の値であり, 正規圧密状態で (15) 式の直線に至るまで ($\eta < \mu_0$) の $q/p \sim -dv/d\varepsilon$ 直線の勾配である。

いま, 勾配 $1/\alpha$ の直線と (15) 式の直線との交点の応力比を μ とすれば, 勾配 $1/\alpha$ の直線は, (15) 式を包含した形で (17) 式のように書くことができる:

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\alpha} \left\{ -\frac{dv}{d\varepsilon} - (\mu - M) \right\} + \mu, \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ for } \eta \geq \mu \\ \alpha \neq 1 \text{ for } \eta < \mu \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

Fig. 10 から μ は O. C. R. の関数として変化することが予想されるが, 実際, Fig. 13 に示すように μ と

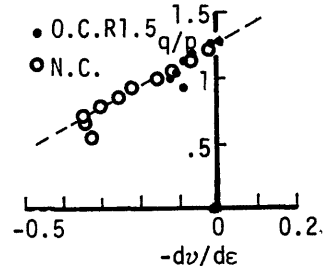


Fig. 11. The dependency of $-dv/d\varepsilon \sim q/p$ relationships on O.C.R., after Matsuoka & Isoda (1971)¹⁴⁾.

O. C. R. の関係として (18) 式を仮定することができる：

$$\mu - \mu_0 = (M_\mu - \mu_0) \cdot (\ln n)^{m_\mu} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに M_μ , m_μ , は Fig. 13 から決定される定数 (Table 3 参照), μ_0 は $n = 1$ のときの μ の値で 0.3 ~ 0.4 の値をとる。 M_μ は $\ln n = 1$, すなわち $n = e$ (= 自然対数の底) のときの μ の値であり, Fig. 13 の最小 2 乗法による直線から求めると 1.37 という値が得られた。ここで興味深いことは, この M_μ の値が先に述べた M の値 (1.3 ~ 1.4) と極めて近いことである。Cam clay モデルにおいては, Wet と Dry の境界の過圧密比 (e) の場合に $\eta = M$ で状態境界面に達することを考慮して, ここでは $M_\mu = M$ と考えることにする。したがって, 式 (18) は書きかえて (18') 式となる：

$$\mu - \mu_0 = (M - \mu_0) \cdot (\ln n)^{m_\mu} \quad \dots\dots\dots (18')$$

式 (16) および (18') により α , μ の値をそれぞれ計算し, それを用いて (17) 式の関係 O. C. R. をパラメータにして示すと Fig. 14 が得られる。 $n = e$ のとき, $\eta = M$ で (15) 式の直線と交わるので, $n > e$ の場合には, つねに $-dv/d\varepsilon > 0$ の領域にあり, 破壊するまでダイレタンシーは正であることを意味している。従って, $n > e$ を Dry 側, $n < e$ を Wet 側と定義することができる。参考までに Pender⁷⁾ のモデルから計算された関係も同図に示した。

Fig. 14 において, × および ● で示した点は, ダイレタンシー限界の応力比に対する点で, それぞれ (12) 式による計算値と Fig. 3 から得られた実験値である。これらの点のプロットに際しては, $-dv/d\varepsilon$ の実験値は加味されていない。ダイレタンシー限界の定義から, 少なくとも同限界まではダイレタンシーは正でなければならないので, Fig. 14 において × 印が $-dv/d\varepsilon < 0$ の領域にあることは定義に反している。たとえば, O. C. R. 1.5 に対する × 印は $-dv/d\varepsilon \geq 0$ の領域にプロットされるべきであろう。しかし, Fig. 14 を作成するための係数 α , μ と O. C. R. の関係が実験式であることを考慮すると, この程度の矛盾は仕方が無いと考えたい。

つぎに, Fig. 14 に示した η_{DL} 曲線と $-dv/d\varepsilon = 0$ 軸との交点を通る (17) 式の直線の O. C. R. $\bar{n}$ を求める。 $n = \bar{n}$ は, $\eta_0 \leq \eta_{DL}$ であるような O. C. R. の最大値を与える。(17) 式から $-dv/d\varepsilon = 0$ となるような応力比 η_0 は (19) 式で表わされる：

$$\eta_0 = (q/p) - dv/d\varepsilon = 0 = \mu \{ 1 - (1/\alpha) \} + M/\alpha \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式の α , μ は式 (16) および (18') によりそれぞれ O. C. R. の関数として計算されるので, η_0 を O. C. R. の関数として計算することができ, η_0 と O. C. R. の関係を Fig. 15 に示した。同図には, 式 (12)

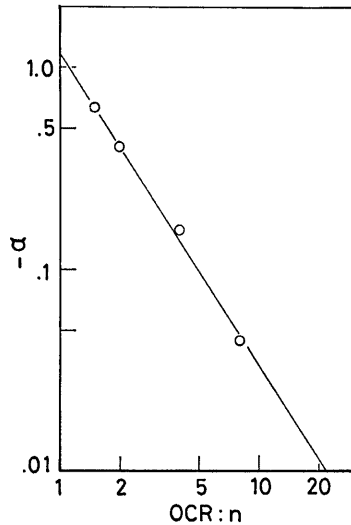


Fig. 12. Relation between $(-\alpha)$ and O.C.R.: n on log-log scale.

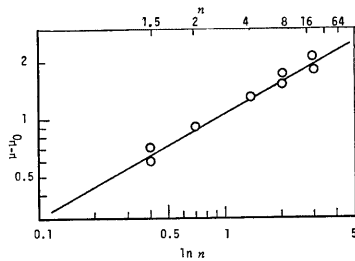


Fig. 13. $\mu - \mu_0 \sim \ln n$ relation on log-log scale.

に基づいた η_{DL} と O. C. R. の関係も併せて示した。同図より、 $\bar{n}=2$ と決定される。

$n < \bar{n}$ の場合には、 $\eta = \eta_0$ 以後ダイレタンシーの傾向は正から負に転じ、 $\bar{n} < n$ では、 $\eta_0 > \eta_{DL}$ だから、まず η_{DL} まで正のダイレタンシーを示し、その後 η_0 までやはり正のダイレタンシーを示すが、 $\eta \geq \eta_0$ においてその傾向を負にかえる。したがって、ダイレタンシー限界を Fig. 14 に示せば、 $n > \bar{n}$ では実験または式 (12) による曲線で、 $n < \bar{n}$ では $-dv/d\varepsilon = 0$ 軸で表わされる。前者の場合その応力比を η_{DL} 、後者の場合 η_0 と書いて区別するが、意味することは、どちらも、その応力比まではダイレタンシーが正で、 $q/p \sim p/p_0$ 関係は直線的であり、その勾配 D^* は式 (11) で与えられるとする。

さらに、 $\eta_0 = 0$ となる O. C. R. を計算により求めると約 1.19 となる。 $n^* (= 1.25) > 1.19$ であるから、 $n^* > n > 1.19$ の間では、せん断の初期には、 $-dv/d\varepsilon > 0$ にも拘らず $D^* \rightarrow \infty$ で $dv = 0$ となってしまう。これは (19) 式により η_0 を計算する際に用いた α, μ の近似式 (16), (18') に誤差が入っているためであり、以後、 $n^* > n > 1.19$ の場合は、 $0 < \eta < \eta_0$ において計算上、正のダイレタンシーの発生は無いと考える。

応力比～ひずみ増分関係 (17) 式を記述するための諸定数を Table 3 に、ダイレタンシーの傾向の正負に対する過圧密比や応力比の影響について Table 4 にそれぞれ表わした。なお Table 4 には、後に述べる負のダイレタンシーに関しても整理してある。

4. 塑性増分理論に基づく応力～ひずみ関係

4.1 概説

応力の変化による力学作用をせん断と圧密の作用に分けて考える。現在の応力状態 (p, η) から微小応力増分を受けて他の状態 ($p + dp, \eta + d\eta$) に移行

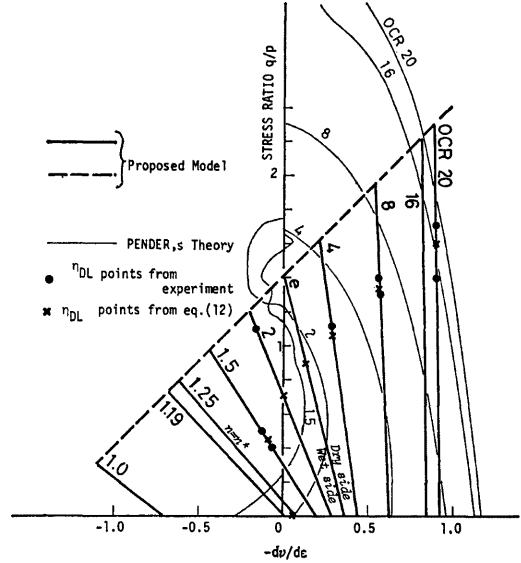


Fig. 14. The relationships of $q/p \sim -dv/d\varepsilon$, calculated from the proposed model, and the comparison with one by Pender (1978).

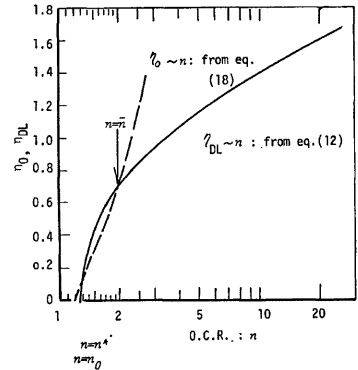


Fig. 15. The limits of stress ratios: η_0 calculated from $q/p \sim dv/d\varepsilon$ relationship model and η_{DL} calculated from experimentally obtained function.

Table 3. Contants to characterize $q/p \sim -dv/d\varepsilon$ relationship for p -const. drained condition

Eq. (16)		Eq. (18)	
α_N	m_a	$M_\mu=M$	m_μ
-1.22	1.56	1.37	0.547

Table 4. Volume change behaviour of normally consolidated or overconsolidated specimen under p -const. triaxial compression condition.

		O.C.R.	Dilatancy D		
N.C.		$n=1$	Negative	$0<\eta<\mu_0 \quad D_{N1}(\eta)$ $\mu_0<\eta<M \quad D_{N2}(\eta)$	
O.C.	Wet	$1<n<n^*$	Negative	$0<\eta<\mu \quad D_{N1}(\eta)$ $\mu<\eta<M \quad D_{N2}(\eta)$	
		$n^*<n<e$	$n^*<n<\bar{n}$	Positive	$0<\eta<\eta_0 \quad D_1(\eta, e)$
			$\bar{n}<n<e$	Negative	$\eta_0<\eta<\mu \quad D_{N1}(\eta-\eta_0)$ $\mu<\eta<M \quad D_{N2}(\eta-\eta_0)$
				Positive	$0<\eta<\eta_{DL} \quad D_1(\eta, e)$ $\eta_{DL}<\eta<\eta_0 \quad D_2(\eta, e)$
				Negative	$\eta_0<\eta<\mu \quad D_{N1}(\eta-\eta_0)$ $\mu<\eta<M \quad D_{N2}(\eta-\eta_0)$
	Dry	$e<n$	Positive	$0<\eta<\eta_{DL} \quad D_1(\eta, e)$ $\eta_{DL}<\eta<\mu \quad D_2(\eta, e)$	

NOTE: $dv_s^P=Dd\eta$; $D_{N1}(\eta)$: Eq. (58'); $D_{N2}(\eta)$: Eq. (58')
 $D_1(\eta,e)$: Eq. (65); $D_2(\eta,e)$: Eq. (66)

したとき、 p の変化による作用を圧密、 η の変化によるそれをせん断と呼び、そのとき発生する塑性ひずみ増分 dv^P 、 $d\varepsilon^P$ は、それぞれ、せん断による成分 (添字 s を付す) : dv_s^P 、 $d\varepsilon_s^P$ と圧密による成分 (添字 c) : dv_c^P 、 $d\varepsilon_c^P$ に分けられ両作用下のひずみ増分はそれらの線形和で与える :

$dv^P = dv_s^P + dv_c^P, \quad d\varepsilon^P = d\varepsilon_s^P + d\varepsilon_c^P$

平均有効主応力 p の履歴により、正規・過圧密を定義する。過去に受けた p の最大値に比べ、現在の p が小さいときこの土は過圧密状態にあるといい、その他の場合を正規圧密状態にあるという。

塑性論の基本的仮定によれば、塑性ひずみ増分テンソルの成分は、塑性ポテンシャル関数 g により (20) 式で与えられる :

$d\varepsilon_{ij}^P = \Lambda \cdot \partial g / \partial \sigma_{ij}, \quad \dots\dots\dots (20)$

g は、一般には、応力、ひずみ、変形の履歴等の関数である。材料の等方性を仮定すれば、 g は応力に関しではその不変量の関数となる。本論では応力状態は軸対称三軸圧縮に限って、いま、不変量として I_1 、 $\sqrt{3}J_2$ の2つを考える。ここに I_1 は応力テンソルの第1次不変量、 J_2 は偏差応力テンソル s_{ij} の2次不

変量, $I_1 = \sigma_{kk}/3$, $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)。このとき,

$$g = g(I_1, \sqrt{3J_2}) \quad \dots\dots\dots(21)$$

(20) 式に基づいて, 塑性体積ひずみ増分 dv^P と 塑性偏差ひずみ増分 de_{ij}^P は, (22), (23) 式で与えられる:

$$dv^P = d\varepsilon_{kk}^P = A \cdot \partial g / \partial I_1 \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\partial e_{ij}^P = d\varepsilon_{ij}^P - d\varepsilon_{kk}^P \delta_{ij} / 3 = A (\partial g / \partial \sqrt{3J_2}) \cdot (3s_{ij} / 2\sqrt{3J_2}) \quad \dots\dots\dots(23)$$

軸対称三軸圧縮応力条件下 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$) では, $I_1 = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3 = p$, $\sqrt{3J_2} = \sigma_1 - \sigma_3 = q$ で, 塑性体積ひずみ増分 dv^P , 塑性せん断ひずみ増分 $d\varepsilon^P$ は, それぞれ (24), (25) 式で与えられる:

$$dv^P = A \partial g / \partial p \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$d\varepsilon^P = A \partial g / \partial q \quad \dots\dots\dots(25)$$

(24), (25) 式より, 両ひずみ増分の比は,

$$-dv^P / d\varepsilon^P = -(\partial g / \partial p) / (\partial g / \partial q) \quad \dots\dots\dots(26)$$

となる。ここに, $(\partial g / \partial p, \partial g / \partial q)$ は, (p, q) 応力面上に描いた等ポテンシャル曲線 $g=k$ (または $G=g-k=0$, ここに k は応力に関しては定数) の点 (p, q) における法線方向ベクトルの成分 $(\partial G / \partial p, \partial G / \partial q)$ に等しい。一方, その点における $G=0$ の接線方向ベクトルの成分は $(1, dq/dp)$ で与えられるから,

$$(dq/dp)_{G=0} = -(\partial g / \partial p) / (\partial g / \partial q) \quad \dots\dots\dots(27)$$

の関係が成り立つ。(26), (27) 式より

$$(dq/dp)_{G=0} = -dv^P / d\varepsilon^P \quad \dots\dots\dots(28)$$

上式は何らかの方法で $-dv^P / d\varepsilon^P$ を応力 (p, q) の関数として与えることができれば, $G=0$ の曲線の方程式を決められることを示す。

Associated flow rule が適用できる材料の場合は, 降伏条件式 $F=f-k=0$ は塑性ポテンシャル曲線 $G=g-k=0$ と同じになる。

さて, 本章では, 前章までに得られた実験的事実を塑性論的に解釈・整理し, せん断・圧密それぞれの作用下での応力～ひずみ関係を導く。得られた関係を特定の応力経路下で実験値と対比し, 基礎的な特性を考察する。この場合, p一定試験により生じたひずみは塑性的と見なせる^{4),5)}, という立場をとる。

4.2 圧密に関する塑性ポテンシャルと降伏条件

(1) 圧密に関する塑性ポテンシャル

圧密に関する塑性ポテンシャル関数を g_c とすれば, 圧密時に発生する塑性ひずみ増分は, 次式で与えられる:

$$dv_c^P = A_c \cdot \partial g_c / \partial p, \quad d\varepsilon_c^P = A_c \cdot \partial g_c / \partial q \quad \dots\dots\dots(29)$$

等方または異方応力下で平衡状態にある土に応力比を変えずに p の増分を与えたときに, 塑性せん断ひずみ増分の発生は無いと仮定すると, $\partial g_c / \partial q = 0$ 。この場合, 等塑性ポテンシャルの曲線を表わす微分方程式は

$$dp/dq = -(\partial g_c / \partial q) / (\partial g_c / \partial p) = 0 \quad \dots\dots\dots(30)$$

で与えられ, 現在の応力点 $(p=p_a, q=q_a)$ を通る等塑性ポテンシャル曲線は

$$G_c = g_c - k_c = 0, \quad g_c = p, \quad k_c = p_a \quad \dots\dots\dots(31)$$

これより,

$$\partial g_c / \partial p = 1 \quad \dots\dots\dots(32)$$

圧密に関しても Associated flow rule が適用できる材料と考えると降伏条件式は, (p, q) 応力面上で $G_c=0$ と同じ形で与えられ,

$$F_c = f_c - k_c = 0, \quad f_c = p, \quad k_c = p_a \quad \dots\dots\dots(33)$$

(2) 圧密時の体積変化特性

2.1 において等方応力下の体積変化特性を明らかにしたが、異方応力下においてもその結果が適用できると仮定する。2.1 で得られた結果のうち、最も特徴的な点は、正規圧密状態から膨潤・再圧縮を行う場合、 (e, p) 面上で同一の経路をたどらないことである。このことは、たとえ過圧密状態であっても、つねに塑性体積ひずみが生じており、云い方をかえれば、圧密に関して土はつねに塑性降伏状態にあることを意味する。

さて、Fig. 16 を参考にして、 $d\ln p = dp/p$ の応力増分に対して生じる体積ひずみの弾性・塑性成分を明らかにする。はじめに過圧密状態にある場合を考える：

$$\left. \begin{aligned} dp \geq 0 \text{ のとき} \quad & dv_e = \kappa_{rc} \cdot d\ln p / (1+e), \quad dv_e^H = \kappa_s \cdot d\ln p / (1+e), \\ & dv_e^P = (\kappa_{rc} - \kappa_s) \cdot d\ln p / (1+e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

$$\left. \begin{aligned} dp \leq 0 \text{ のとき,} \quad & dv_e = \kappa_s \cdot d\ln p / (1+e), \quad dv_e^H = \kappa_{rc} \cdot d\ln p / (1+e), \\ & dv_e^P = (\kappa_s - \kappa_{rc}) \cdot d\ln p / (1+e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

正規圧密状態において $dp \geq 0$ で正規圧密状態が継続される場合は、

$$dv_e = \lambda \cdot d\ln p / (1+e), \quad dv_e^H = \kappa_s \cdot d\ln p / (1+e), \quad dv_e^P = (\lambda - \kappa_s) \cdot d\ln p / (1+e) \quad \dots\dots\dots(36)$$

正規状態において $dp < 0$ で過圧密状態に移る場合は、過圧密の $dp < 0$ の場合の (35) 式と同じである。

以上の関係式をまとめると、塑性体積ひずみ増分は：

$$dv_e^P = \frac{\chi(\kappa - \kappa_s)}{(1+e)} \frac{dp}{p} \quad \left(\begin{array}{l} \kappa = \kappa_{rc} \text{ for O.C.; } \kappa = \lambda \text{ for N.C.} \\ \chi = 1 \text{ for } dp \geq 0; \chi = -1 \text{ for } dp \leq 0 \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots(37)$$

以上の式中、 λ は定数； κ_s 、 κ_{rc} はそれぞれ (3) 、(5) 式で与えられていて、O. C. R. の関数である。また、Cambridge theory 等に見られるように、 $\kappa_s = \kappa_{rc}$ と仮定すれば、O. C. に対して $dv_e^P = 0$ となり圧密時に生じる体積変化はつねに弾性的となる。

ちなみに、式 (34) 、(35) で表わされる関係を用いて、膨潤・再圧縮の経路を計算してみると Fig. 17 が得られた。 κ_s 、 κ_{rc} に含まれる定数は、Table 1 のものを用いた。

(3) 硬化パラメータ k_c について

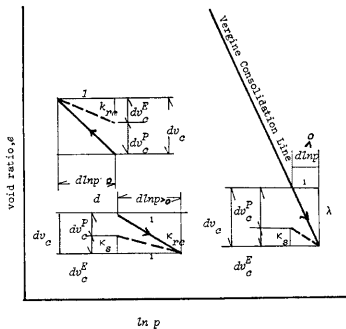


Fig. 16. Schematic representation of elastic and plastic components of volumetric strain increment occurring by "Consolidation."

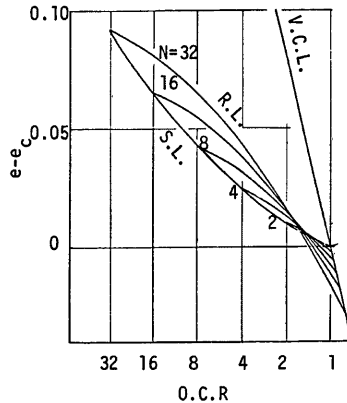


Fig. 17. Calculated consolidation-, rebound-, and recompression-curves under spherical stress condition.

圧密に関してつねに塑性的であることは、式 (33) からわかるように硬化パラメータ k_e は、現在の p の値 p_a そのものであることを意味し、 p の増減が無い (せん断) 場合には、硬化パラメータは変化せず、従って、 k_e は、 v_e^p の関数でなく v_e^p のみの関数となる：

$$k_e = k_e(v_e^p), \quad dk_e/dv_e^p = dp/dv_e^p = (1+e) \cdot p / \{\chi(\kappa - \kappa_e)\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

4.3 せん断に関する塑性ポテンシャルと降伏関数

(1) せん断に関する塑性ポテンシャル

せん断により発生する塑性ひずみ増分は、せん断に関する塑性ポテンシャル関数を q_s と書けば、次式で与えられる：

$$dv_e^p = A_s \cdot (\partial g_s / \partial p), \quad d\varepsilon_s^p = A_s \cdot (\partial g_s / \partial q) \quad \dots\dots\dots (39)$$

3. で求めた応力比 $\sim$ ひずみ増分比関係より、等ポテンシャル曲線： $G_s = g_s - k_s = 0$ の微分方程式として

$$dq/dp = \alpha(q/p - \mu) + \mu - M, \quad (\alpha \neq 1 \text{ for } \eta < \mu; \alpha = 1 \text{ for } \eta \geq \mu) \quad \dots\dots\dots (40)$$

α , μ は過圧密比、したがって現在の p の値 p_a の関数である。 α , μ を一定として積分し、 $\eta < \mu$ のときは $q=0$ において $p=p_0$, $\eta \geq \mu$ のときは $q/p=\mu$ において $p=p_B$ とおくと、 $\eta < \mu$, $\eta \geq \mu$ に対応してそれぞれ (41), (42) 式が得られる：

$$\ln p + \{1/(1-\alpha)\} \cdot \ln\{(1-\alpha)(\eta - \mu) + M\} = \ln p_0 \quad (\eta < \mu) \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$\ln p_B + (1/M) \cdot (q/p - \mu) = \ln p_B \quad (\eta \geq \mu) \quad \dots\dots\dots (42)$$

積分の過程から明らかなように、曲線 (41) は、直線 $p=p_a$ (積分の間に一定にされた α , μ の値に対応) との交点においてのみ、塑性ポテンシャルとしての意味をもつ。仮に、(41) 式で表わされる曲線上を応力点が移動しても p の変化に対応して O. C. R. が変化し、 α , μ の値も変り、塑性ポテンシャル曲線はもはや異った形をとるからである。ただし、正規圧密状態においては、つねに O. C. R. が 1 であり、 α , μ の値は一定値 α_N , μ_0 をとるため、式 (41) はその曲線上のどの点においても、塑性ポテンシャルとしての意味をもつ。また $\eta \geq \mu$ の場合式 (40) したがって式 (42) には、 α , μ を含まず p の変化による曲線形状の変化は無い。

以上の意味を考慮しても、(41) 式や (42) 式の左辺を偏微分して得られる $\partial g_s / \partial p$, $\partial g_s / \partial q$ は、ひずみ増分比を決定することができる：

$$\left. \begin{aligned} \partial g_{s1} / \partial p &= (1/p) \cdot \{(1-\alpha)(q/p - \mu) + M - q/p\} / \{(1-\alpha)(q/p - \mu) + M\} \\ \partial g_{s1} / \partial q &= (1/p) / \{(1-\alpha)(q/p - \mu) + M\} \\ \partial g_{s2} / \partial p &= (1/p) \cdot \{(1 - q/p - M)\} \\ \partial g_{s2} / \partial q &= (1/p) \cdot (1/M) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (43)$$

ここに、添字の 1 は $\eta < \mu$ に、添字の 2 は $\eta \geq \mu$ に対応している。以後同じ約束で添字 1, 2 を付す。

(2) せん断に関する降伏条件

Associated flow rule が適用できる材料を仮定すれば、降伏条件式： $F_{si} = f_{si} - k_{si} = 0$ は、次のように求まる：

$\eta < \mu$ のとき、

$$\left. \begin{aligned} F_{s1} &= f_{s1} - k_{s1} = 0, \\ f_{s1} &= \ln p + \{1/(1-\alpha)\} \ln[\{(1-\alpha)(\eta - \mu) + M\} / \{(1-\alpha)(-\mu) + M\}], \\ k_{s1} &= \ln p_0; \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

$\eta \geq \mu$ のとき、

$$\left. \begin{aligned} F_{s2} &= f_{s2} - k_{s2} = 0, \\ f_{s2} &= \ln p + (\eta - \mu)/M, \\ k_{s2} &= \ln p_B \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

上式においては、 q/p のかわりに η を陽に出したが、圧密 (η 一定)、せん断 (p 一定) の概念を用いてい

るためである。すなわち、 $f_{s1}=f_{s1}(p, \eta, \alpha, \mu)$ 、 $f_{s2}=f_{s2}(p, \eta)$ 。また硬化パラメータの p_0 や p_B は、 $F_{s1}=0$ 、 $F_{s2}=0$ 曲線が、 $q=0$ 軸、 $\eta=\mu$ 直線とそれぞれ交わる点の p の値である。

(3) 硬化法則と塑性降伏継続の条件

降伏条件式は、 $F_{s1}=f_{s1}(p, \eta, \alpha, \mu)-k_{s1}=0$ または $F_{s2}=f_{s2}(p, \eta)-k_{s2}=0$ で与えられる。 α 、 μ は O. C. R. n の関数であり、 $n=p_{cmax}/p_a$ だから、 p_a の関数である。また k_{si} は、せん断と圧密の現象により、土の構造的变化の様子が異なると考え、 v_s^P 、 v_s^E の2つの独立した変数の関数と考える。以上の点を考慮して Pragar の与えた塑性降伏継続の条件式¹⁵⁾は、次のように書ける：

$$\left. \begin{aligned} F_{si} &= f_{si} - k_{si} = 0 \\ dF_{si} &= df_{si} - dk_{si} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=1 \text{ for } \eta < \mu; i=2 \text{ for } \eta \geq \mu) \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$\left. \begin{aligned} df_{s1} &= \left\{ \frac{\partial f_{s1}}{\partial p} + \left(\frac{\partial f_{s1}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \frac{\partial f_{s1}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial n} \right) \frac{\partial n}{\partial p} \right\} dp + \frac{\partial f_{s1}}{\partial \eta} d\eta \\ df_{s2} &= \frac{\partial f_{s2}}{\partial p} dp + \frac{\partial f_{s2}}{\partial \eta} d\eta \\ dk_{si} &= \frac{\partial k_{si}}{\partial v_s^E} dv_s^E + \frac{\partial k_{si}}{\partial v_s^P} dv_s^P \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46')$$

たとえば、 $F_{s1}=0$ の状態から、 $d\eta < 0$ 、 $dp=0$ という応力経路をとった場合を考えれば、その間に発生する dv_s^E および dv_s^P はゼロであるので、 k_{s1} に変化はない、すなわち $dk_{s1}=0$ 、一方、 $df_{s1}=(\partial f_{s1}/\partial \eta)d\eta \neq 0$ 。よって $dF_{s1}=0$ の条件は満足されず、せん断に関して塑性降伏は継続されない。

さて、(46) 式に、(29)、(39) 式により与えられる dv_s^E 、 dv_s^P を代入すれば、

$$A_{si} = \left(df_{si} - \frac{\partial k_{si}}{\partial v_s^E} A_c \frac{\partial g_c}{\partial p} \right) / \left(\frac{\partial k_{si}}{\partial v_s^P} \cdot \frac{\partial g_{si}}{\partial p} \right) \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (47)$$

A_{si} 、 A_c が既知であれば、 $\partial k_{si}/\partial v_s^E$ または $\partial k_{si}/\partial v_s^P$ は次のように決定することができる。せん断時にせん断に関する塑性降伏が継続されるためには、(46) 式により、

$$(\partial f_{si})_{dp=0} - (\partial k_{si}/\partial v_s^E) A_{si} \cdot (\partial g_{si}/\partial p) = 0 \quad \dots\dots\dots (48)$$

同様に圧密時にせん断に関する降伏が継続されるためには、

$$(\partial f_{si})_{d\eta=0} - (\partial k_{si}/\partial v_s^E) A_c \cdot (\partial g_c/\partial p) = 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

よって、

$$\partial k_{si}/\partial v_s^E = (\partial f_{si})_{dp=0} / \{ A_{si} \cdot (\partial g_{si}/\partial p) \} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$\partial k_{si}/\partial v_s^P = (\partial f_{si})_{d\eta=0} / \{ A_c \cdot (\partial g_c/\partial p) \} \quad \dots\dots\dots (51)$$

A_c は既に (37) 式により明らかにされている。 A_{si} が既知の条件は、言い換えれば、(39) 式からわかるように、 dv_s^E と $d\eta$ の関係または dv_s^E と $d\eta$ の関係が既知であれば良い。本論では、正規圧密状態に対しては、 $dv_s^E \sim d\eta$ 関係を、過圧密状態に対しては、 $dv_s^E \sim d\eta$ 関係を実験結果に基づいて規定する。その際、過圧密状態の負のダイレタンシーについては、正規圧密時の関係から導かれる。

なお、(46') 式中に現れる諸偏微分項は、つぎのようになる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{s1}}{\partial p} &= \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial f_{s1}}{\partial \eta} = \frac{1}{(1-\alpha)(\eta-\mu)+M} \\ \frac{\partial f_{s1}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot \left[\ln \frac{(1-\alpha)(\eta-\mu)+M}{(1-\alpha)(-\mu)+M} - \frac{M \cdot \eta}{\{(1-\alpha)(\eta-\mu)+M\} \cdot \{(1-\alpha)(-\mu)+M\}} \right] \\ \frac{\partial f_{s1}}{\partial \mu} &= \frac{(1-\alpha)\eta}{\{(1-\alpha)(\eta-\mu)+M\} \cdot \{(1-\alpha)(-\mu)+M\}} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial n} &= \left(\frac{1}{\alpha_N} \right)^3 \cdot m_a \cdot n^{3m_a-1} \\ \frac{\partial \mu}{\partial n} &= (M-m_\mu) \cdot m_\mu \cdot (\ln n)^{m_\mu-1} \cdot \frac{1}{n} \\ \frac{\partial n}{\partial p} &= -\frac{n}{p} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

4.4 正規圧密状態における応力ひずみ関係

(1) せん断ひずみ～応力比関係

等方正規圧密状態 ($q=0$, $p=p_{\text{max}}$) にある土をせん断 ($dp=0$) したときに発生するせん断ひずみと応力比の関係式として、次の Kondner 型の双曲線関係を仮定する：

$$\eta = \varepsilon / (A_s + B_s \varepsilon) \quad \dots\dots\dots (53)$$

Fig. 18 に、今回行った実験の ε/η と ε の関係を示したが良い直線関係が見られ、(53) 式で $\eta \sim \varepsilon$ 関係が表現できることを示す。定数 A_s , B_s は、 p の値に対して変化しないものと仮定すれば、(53) 式から、塑性せん断ひずみ増分と応力比増分の関係として次式を得る：

$$d\varepsilon_s^P = \{A_s / (1 - B_s \eta)^2\} \cdot d\eta \quad \dots\dots\dots (54)$$

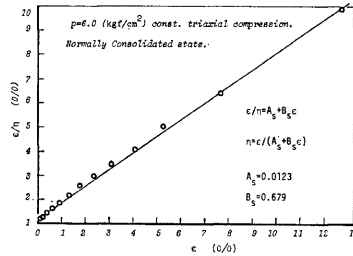


Fig. 18. $\varepsilon \sim \varepsilon \eta$ for p -const. triaxial compression test in normally consolidated state.

(2) 正規圧密状態におけるダイレタンシー

4.3 において与えられたせん断に関する塑性ポテンシャル関数 g_{s1} , g_{s2} を用いて

$$dv_s^P = A_{si} (\partial g_{si} / \partial p), \quad d\varepsilon_s^P = A_{si} (\partial g_{si} / \partial q) \quad \dots\dots\dots (55)$$

(54), および (55) 第 2 式より, A_{si} は

$$A_{si} = A_s d\eta / \{(1 - B_s \eta)^2 \cdot (\partial g_{si} / \partial p)\} \quad \dots\dots\dots (56)$$

したがって (55) 第 1 式により、ダイレタンシーによる塑性体積ひずみ増分 dv_s^P は、

$$dv_s^P = \frac{A_s}{(1 - B_s \eta)^2} d\eta \cdot \frac{(\partial g_{si} / \partial p)}{(\partial g_{si} / \partial q)} \quad \dots\dots\dots (57)$$

(43) 式を用いて、具体的な式を書くと、

$$dv_s^P = D_{Ni}(\eta) \cdot d\eta \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに,} \quad D_{N1} &= \frac{A_s}{(1 - B_s \eta)^2} \cdot \{(1 - \alpha_N) \cdot (\eta - \mu_0) + M - \eta\} & (\eta < \mu_0) \\ D_{N2} &= \frac{A_s}{(1 - B_s \eta)^2} \cdot (M - \eta) & (\eta \geq \mu_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (58')$$

(3) 正規圧密状態の応力ひずみ関係

圧密ひずみ増分とせん断ひずみ増分の線形和により、任意応力経路下のひずみ増分が表わされると仮定したので、

$$dv = D_{Ni} \cdot d\eta + \frac{\kappa}{1 + e} \frac{1}{p} dp \quad (i=1 \text{ for } \eta > \mu_0; i=2 \text{ for } \eta \geq \mu_0) \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$d\varepsilon = \frac{A_s}{(1 - B_s \eta)^2} d\eta \quad \dots\dots\dots (60)$$

ここに、 κ は、せん断に関する降伏曲面（次節で述べる状態境界面）上では $\kappa = \lambda$ となり、内部（すなわ

ち、せん断に関して非塑性降伏状態においては、 $\kappa = \kappa_{rc}$ とする。(5) 式から明らかなように、 κ_{rc} は、最大過圧密比および現在の過圧密比の関数であるが、正規圧密状態における擬最大過圧密比 N_N および擬過圧密比 n_N は次のように決定する。 $e \sim p$ 面上で、現在の (e_a, p_a) 点を通る膨潤線と処女圧縮線の交点を (4) 式から逆算して求め、それを擬最大圧密圧力: p_{cmaxN} として $N_N (= p_{cmaxN}/p_a)$ および $n_N (= p_{cmaxN}/p)$ 、ここに $p_a < p < p_{cmaxN}$ を決める。正規圧密状態にある土をせん断・除荷した後に圧密したときの実際の挙動については、未解明の点が多い。

さて、式 (59), (60) に基いて、 $dp=0$ 時の体積、せん断ひずみを計算し、実験値と比較したのが Fig 19 である。正規圧密状態に対するせん断に関する降伏曲線は、 $\eta \geq \mu_0$ のとき、Cam clay モデルの降伏曲線と同じであるので、比較のため Cam clay モデルによる計算値も示した。提案された式は、せん断ひずみに関しては実験値をよく説明し、ダイレタンシーに関しては、応力比が大きくなれば実験値を過大評価するようであるが、Cam clay モデルよりは改良されている。

(3) 状態境界面について

正規圧密状態にある場合は、応力比 η へひずみ増分比関係 (3) の (17) 式) における係数 α , μ は、 $\eta < \mu$ に対しても一定値 α_N , μ_0 をとるので、それを積分して得られた $F_{s1} = f_{s1} - k_{s1} = 0$ の曲線は、応力面上で形を変えないで、間隙比の減少に伴って拡大 (硬化) していく。 $\alpha = \alpha_N$, $\mu = \mu_0$ において、降伏条件 (46) 式を再録すると、

$$\left. \begin{aligned} F_{s1} &= f_{s1} - k_{s1} = 0, \\ f_{s1} &= \ln p + \frac{1}{(1-\alpha_N)} \ln \frac{(1-\alpha_N)(\eta-\mu_0)+M}{(1-\alpha_N)(-\mu_0)+M}, \\ k_{s1} &= \ln p_0; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{s2} &= f_{s2} - k_{s2} = 0, \\ f_{s2} &= \ln p + (\eta - \mu_0)/M, \\ k_{s2} &= \ln p_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

(p, q, e) 空間内の任意の点 Q を通るせん断に関する降伏曲線式 (61), (62) は、Fig. 20 の ABQM のようになる。点 B ($\eta = \mu_0$) において $F_{s1} = 0$ と $F_{s2} = 0$ とが接して交わり、点 M ($\eta = M$) において p/p_0 軸に平行の接線をもつ。降伏曲線 ABQM は、点 A における初期降伏曲線でもある。点 A は処女圧縮線上にあり、同様に考えて、ABQM 上の点を $e \sim p$ 面に投影した曲線 AB'Q'M' は、処女圧縮曲線上の点 AB'P M' から、現在の応力比までせん断して移動してきたと考えられる。従って、ABQM の投影線 AB'Q'M' は、降伏曲線上の点の応力比までせん断されたときの間隙比の変化から決定される。すなわち、P $\rightarrow$ Q 間の間隙比の変化を de とすれば、 $\partial(de)/\partial\eta = -(1+e)D_{Ni}$ ($\eta \leq \mu_0$ のとき $i=1$, $\eta \geq \mu_0$ のとき $i=2$)。したがって

$$de = \int_0^\eta -(1+e)D_{Ni} d\eta \dots\dots\dots (63)$$

Cam clay の場合は、 $de = \int_0^\eta -(\lambda - \kappa)/M \cdot d\eta = -(\lambda - \kappa) \cdot \frac{\eta}{M}$ 。一方、降伏曲線上の点であることから、

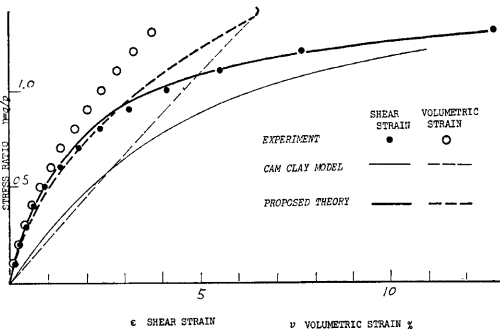


Fig. 19. Stress ratio, $\eta \sim$ strains, ϵ and ν relationships. Comparison of proposed model, Cam Clay model and experimental results.

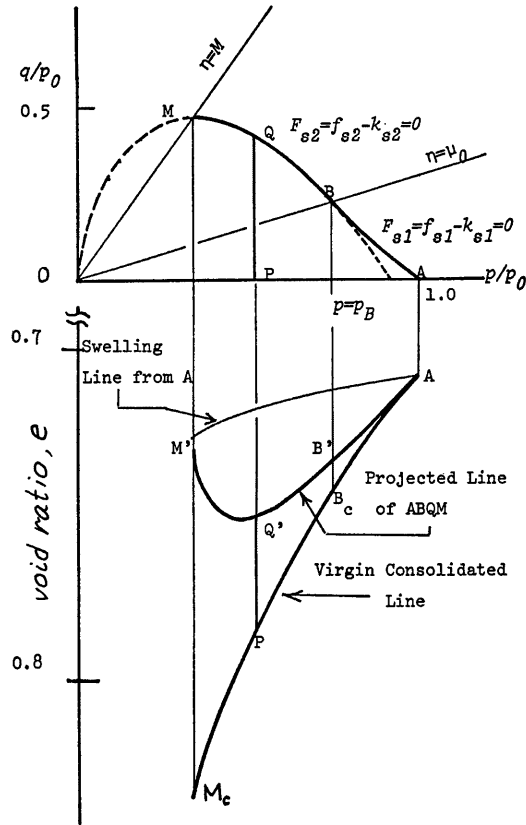


Fig. 20. Projected curve of state boundary surface onto $e \sim p$ plane.

$\eta = M \ln(p_0/p)$ となり,

$$\Delta e = (\lambda - \kappa) \ln(p/p_0) \quad \dots\dots\dots (64)$$

すなわち $p=p_0$ から膨潤指数 κ を一定として等方的に膨潤した曲線に等しく、このことは、状態境界面内部においてダイラテンシーが発生しないという弾性壁 (elastic wall) の存在を仮定することと同義である。

式 (63) の η を $F_{s1}=0$ を用いて p, p_0 で表わせば、状態境界面の式が導かれるが、(63) 式の積分は容易でなく、ここでは、式 (61), (62), (63) により状態境界面を定めておく。

4.6 過圧密状態における応力ひずみ関係

(1) せん断時のひずみ増分～応力増分関係

等方応力下で過圧密状態にある土をせん断したときの体積ひずみ増分と応力比増分の間の関係を、O.C.R. および応力比レベルにより分類して Table 4 に示した。Wet 側の領域の負のダイラテンシーは、2.3 (2) で述べたように、正規圧密状態のダイラテンシーを記述する関数 $D_{N_i}(\eta)$ を用いる。ただし変数の応力比は、

ダイレタンシーの傾向が負になり始めるときを基準にする。たとえば、Fig. 14 において、 $n=2$ の場合に応力比が $\eta=\eta_0$ に達すると $-dv/d\varepsilon$ は正から負へ移り、 $\eta=\eta_0$ 以降のダイレタンシーは、 $\eta_0 < \eta < \mu$ においては、 $D_{N1}(\eta-\eta_0)$ を、 $\mu < \eta < M$ においては $D_{N2}(\eta-\eta_0)$ をそれぞれ用いて表わされる。Table 4 において用いた $D_{N1}(\eta)$ 、 $D_{N2}(\eta)$ は、4. 4(2)で与えた。 $D_1(\eta, e)$ 、 $D_2(\eta, e)$ はそれぞれ (10)、(14) 式の関係から

$$D_1(\eta, e) = -(1+e)\lambda/(D^*-\eta) \quad \dots\dots\dots(65)$$

$$D_2(\eta, e) = -(1+e)\lambda \left[\eta \cdot \left\{ 1-m \cdot \frac{1-(q/p_e)_{NL}/(q/p_e)}{1-(p/p_e)_{NL}/(p/p_e)} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(66)$$

となる。以上の関係をまとめて

$$dv_e^p = D_i(\eta, e)d\eta \quad (\text{for } d\eta \geq 0) \quad \dots\dots\dots(67)$$

$$dv_e^p = 0 \quad (\text{for } d\eta < 0) \quad \dots\dots\dots(67')$$

と書くことができる。これより A_{si} が決定され、従って塑性せん断ひずみ増分は次式のようなになる。

$$d\varepsilon_s^p = D_i(\eta, e)d\eta \cdot (\partial g_{si}/\partial q)/(\partial g_{si}/\partial p) \quad \dots\dots\dots(68)$$

(2) 一般応力径路下の応力-ひずみ関係

式 (67)、(68) で表わされたせん断時のひずみ増分に、圧密によるひずみ増分 (式 (34)、(35)) を加えて、

$$\left. \begin{aligned} dv &= D_i(\eta, e)d\eta + \frac{\kappa}{1+e} \frac{dp}{p} \\ d\varepsilon &= D_i(\eta, e) \cdot (\partial g_{si}/\partial q)/(\partial g_{si}/\partial p) \cdot d\eta \end{aligned} \right\} \text{for } d\eta \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} dv &= \frac{\kappa}{1+e} \frac{dp}{p} \\ d\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } d\eta < 0 \quad \dots\dots\dots(69)$$

ここに、 κ は、 $dp \geq 0$ の場合 $\kappa=\kappa_{rc}$ 、 $dp < 0$ の場合 $\kappa=\kappa_s$ で、それぞれの内容は、(3)、(5) 式に示した通りである。 $(\partial g_{si}/\partial q)/(\partial g_{si}/\partial p)$ は、(43) 式から計算できる。

5. 結 語

等方圧密膨潤試験および平均有効主応力一定試験結果に基づいて、等方およびせん断応力下の体積変化特性を考察した。また、後者の試験において、応力比とひずみ増分比との関係を調べ、塑性論へ適用した。

得られた主な結果をまとめると次のようになる：

- i) 前報で、等方膨潤および再圧縮指数： κ_s 、 κ_{rc} が過圧密比の関数として変化することを確め定式化したのが、今回行った実験でも確認された。
- ii) 正のダイレタンシーは、ダイレタンシー限界の前後で異なる関数により定式化でき、実験値をよく説明できた。
- iii) 平均主応力一定下の応力比～ひずみ増分比関係は、過圧密比により異なり、いずれの過圧密比の場合でも、応力比が大きくなって破壊に近づくにつれ、正規圧密状態に対する関係式 $q/p = -dv/d\varepsilon + M$ に至ることがわかりそこに至るまでの関係は直線で近似できることがわかった。
- iv) 正規圧密粘土の平均主応力一定試験においては、せん断ひずみ～応力比の関係が、Kondner タイプのものでよく表わされることがわかり、それを用いて負のダイレタンシーを評価し、実験値と比較し良好な結果を得た。
- v) 以上の結果に基いて、正規・過圧密両状態に対する応力～ひずみ関係式を導いた。

本論で得られた応力～ひずみモデルを用いて、様々の応力径路下の变形特性を説明できるか検証されなければならない。また、応力比が減少する場合には無条件にせん断ひずみおよびダイレタンシーの増分は発生しないと仮定したが、土の繰り返し応力下の挙動を説明するためには、さらに検討の余地がある。

謝 辞

御指導を賜っている本研究所柴田徹教授，同足立紀尚助教授に心より謝意を表します。また，元本研究所助手（現水産庁水産工学研究所）大槇正紀氏をはじめ研究室の諸兄には，日頃，有益な議論をしていただき感謝致します。

解析には，本研究所防災科学資料センター設置の FACOM 230-25 電子計算機を用いた。

参 考 文 献

- 1) Roscoe, K.H. and Burland, J.B.: On the Generalized Stress-Strain Behaviour of "Wet" clay, Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, 1968, pp. 535-609.
- 2) たとえば, Schofield, A.N. and Wroth, C.P.: "Critical State Soil Mechanics," McGraw-Hill, London, 1968.
- 3) 清水正喜：過圧密粘土の低応力下でのせん断特性，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集，Ⅱ，1977, pp. 119-20.
- 4) 清水正喜：過圧密粘土の低応力下でのダイレタンシー・強度特性，第13回土質工学研究発表会，1978, pp. 329-332.
- 5) 清水正喜：繰り返し過圧密粘性土の低応力下でのダイレタンシー・強度特性，京都大学防災研究所年報第21号B-2，1978, pp. 1-19.
- 6) Ohmaki, S.: Strength and Deformation Characteristics of an O.C. Clay, Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, 1979.
- 7) Pender, M.J.: A Model for the Behaviour of Overconsolidated Soil, Geotechnique 28, No 1, 1978, pp. 1-25.
- 8) Ohta, H.: Analysis of Deformations of Soils based on the Theory of Plasticity and its Application to Settlement of Embankments, Dr. Thesis, Kyoto Univ., 1971.
- 9) Rowe, P.W.: The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol 269, 1962, pp. 500-27.
- 10) 松岡 元：せん断時の土の応力-ひずみ関係について，京都大学防災研究所年報，第15号 B，1972, pp. 1-13.
- 11) 西 好一・江刺靖行：軟質地盤における基礎の支持力と変形（その1）一弾塑性論に基づく砂の応力～ひずみ関係式，電力中央研究所報告，No. 376014, 1977.
- 12) 足立紀尚・西 好一：過圧密粘土の構成式，京都大学防災研究所年報 B-2, 1976, pp. 1-13.
- 13) Hvorslev, M.J.: Physical components of the Shear Strength of Saturated Clays, Proc. Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils, ASCE 1960, pp. 163-273.
- 14) 松岡 元・磯田真一：土の応力比～ひずみ増分比関係について，土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集，1971, pp. Ⅱ-53-56.
- 15) Fung, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc., 1965, p. 148.