

線形化可能写像の初期値空間

竹縄知之 (Tomoyuki Takenawa)¹, 江口光昭 (Mitsuaki Eguchi)¹,
 Basile Grammaticos², 太田泰広 (Yasuhiro Ohta)³,
 Alfred Ramani⁴, 薩摩順吉 (Junkichi Satsuma)¹

1: 東大・数理科学 (Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo)

2: GMPiB, Université Paris VII, France

3: 広大・工 (Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Hiroshima University)

4: CPT, Ecole Polytechnique, France

概要

初期値空間および解析的安定性の方法を線形化可能だが特異点が閉じ込められない力学系に応用する。初期値空間を構成するには無限回のブローアップが必要になるが、それにも関わらず次数の厳密な計算や、力学系を標準化することが出来る事が分かる。

1 はじめに

双有理力学系に対する、特異点閉じ込め判定法という便利な可積分性の判定法が提唱 [1] されて以来、離散可積分に対して多くの研究がされて来た。特に離散 Painlevé 方程式 [2] はこの分野の最も重要な方程式系である。Hietarinta と Viallet は特異点閉じ込め判定法に対する反例を発見し、初期値に対する次数の増大度によって定義される代数的エントロピーによる判定法を提唱した [3]。

一方、坂井は離散 Painlevé 方程式に対応する有理曲面の分類を用いて、離散 Painlevé 方程式の分類を行なった [4]。対応する有理曲面の族は初期値空間と呼ばれる。これは岡本 [5] による (連続の) Painlevé 方程式に対する初期値空間の類似である。

初期値空間の応用として筆者の 1 人は、Hietarinta と Viallet の反例に対しても初期値空間が構成できるがその対称性は不定形の Wyel 群となることを示し [6, 7]、また初期値空間を持つ双有理力学系に対して初期値に対する次数の厳密な計算法を与え、特に離散 Painlevé 方程式の次数の増大度が 2 次以下であることを示した [8]。

初期値に対する次数の増大度に関する同様の研究は複素力学系の立場からもされており、Diller と Favre は次数の増大度により、Kähler 曲面上の自励的雙有理力学系を分類した [9]。ちなみに離散 Painlevé 方程式は時刻によって写像が変わるので自励的ではないが、彼らの議論も用いれば離散 Painlevé 方程式の次数の増大度が丁度 2 次であることも示せる。

本稿では初期値空間の方法および [9] でも用いられている解析的安定性の方法を、線形化可能系という離散可積分系に応用する。線形化可能系は [10, 11] などの中で提唱された非自励的力学系であり、線形化できるという意味で可積分であるが、閉じ込められない特異点パターンを持つ。また、離散 Painlevé 方程式の退化極限として現れることもある。線形化可能系としては有限回で射影変換になるものと Riccati 系と呼ばれるものが提唱されているが、本稿では特に Riccati 系について論じる。Riccati 系は閉じ込められない特異点パターンを持つので、対応する初期値空間は作れないが、それにもかかわらず次数の厳密な計算は可能であり、線形化するための変換を自動的に見つけることが出来ることも分かる。

なお、本稿の内容は筆者等の論文 [12] に基づいている。

2 Riccati 系

この節では Riccati 系の定義を述べる。

次のような簡単な非自励的離散力学系を考える。

$$x_{n+1} = \left(-\frac{x_n}{x_{n-1}} + a_n\right)x_n \quad (1)$$

この写像は $w_n = x_{n+1}/x_n$ と置くことにより、

$$w_n = -w_{n-1} + a_n, \quad x_{n+1} = x_n w_n$$

と線形化される。ここで左の式は線形であり、右の式も x_n に関して線形である。

$\pi: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を 1 番目の要素への射影とする。一般に双有理写像の列が次のような系に変換されるとき、Riccati 系と呼ぶ: 1) 写像は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の双有理写像であり、2) 射影 π を保つ。このとき、各写像は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の局所座標を用いて、

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{a_n x_n + b_n}{c_n x_n + d_n}, \frac{a'_n(x_n) y_n + b'_n(x_n)}{c'_n(x_n) y_n + d'_n(x_n)} \right), \quad (2)$$

と書ける。ここで a_n, b_n, c_n, d_n は n の関数であり、 a'_n, b'_n, c'_n, d'_n は n, x_n の関数かつ x_n に関して是有理的とする。この系により初期値に対する次数の増大度が n に関して高々 1 次であることはすぐに分かる。

この定義は $\pi: X = C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ という形の (滑らかな) 線織曲面 (ruled surface) に一般化できる。ここで C はコンパクトで滑らかな曲線である。この場合、局所座標では

$$(x_n, y_n) = \left(f_n(x_n), \frac{a'_n(x_n) y_n + b'_n(x_n)}{c'_n(x_n) y_n + d'_n(x_n)} \right)$$

と表される。ここで $f_n, a'_n, b'_n, c'_n, d'_n$ は n の関数かつ、 x_n の有理関数である。 Πf_n の次数は有限なのでこの座標における力学系の次数は $O(n)$ である。 X が有理曲面なら C は $\mathbb{P}^1$ であることに注意する (Prop. III.20 または III.21 [14] 参照)。

注意 C をコンパクトで滑らかな曲線, $\pi: X \rightarrow C$ を線織曲面で, その一般的なファイバーは $\mathbb{P}^1$ であるとする. もし, 双有理力学系 $\{\varphi_n\}$ が π を保つなら, 局所座標を考えることにより, $\{\varphi_n\}$ は双有理変換によって $\pi': C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ という形の線織曲面上の Riccati 系に変換することが出来る.

3 初期値空間と解析的安定性

この節では本稿で用いる用語を整理し, 基本的な性質をまとめる. 初期値空間による方法と解析的安定性による方法の比較のため, 双有理写像ではなく一般の有理写像に対して議論する. 特に断らなければ X, X_i, Y, Y_i, Z, Z_i は滑らかな射影曲面を表すことにする.

特異点パターン

$\{\varphi_i: X_i \rightarrow X_{i+1}\}$ を有理写像の列とする. これらの写像によって有効因子が現れたり消えたりするが, この列のことを位相的特異点パターンと呼ぶ. 位相的特異点パターンは次のように分類できる (EF は有効因子を意味する).

- i) $\cdots \rightarrow \text{EF} \rightarrow \text{EF} \rightarrow \text{point} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{point} \rightarrow \text{EF} \rightarrow \text{EF} \rightarrow \cdots$: (狭義に, または弱い意味で) 閉じ込められている,
- ii) $\cdots \rightarrow \text{point} \rightarrow \text{point} \rightarrow \text{EF} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{EF} \rightarrow \text{point} \rightarrow \text{point} \rightarrow \cdots$: 広義に (または弱い意味で) 閉じ込められている,
- iii) その他: 閉じ込められていない.

通常 Laurent 展開による特異点パターン [1] も同様に分類する. 位相的特異点パターンは写像の位相的な対応しか見ていないので, 2つの特異点閉じ込めの概念は異なる. 例えば, 特異性が通常の意味で狭義に閉じ込められているとき, 位相的にも狭義に閉じ込められているが, 逆は成り立たない.

定義 (有理変換の次数)

- i) $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の場合. $\mathbb{P}^2$ 上の有理変換 $\varphi: (x:y:z) \in \mathbb{P}^2 \mapsto (\bar{x}:\bar{y}:\bar{z}) = (f(x,y,z):g(x,y,z):h(x,y,z)) \in \mathbb{P}^2$, ここで f, g, h は x, y, z の斉次多項式で共通因子は定数のみ, に対して次数は多項式の次数で定義する.
- ii) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の場合. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数で, 局所座標では既約な有理式 $P(x,y) = f(x,y)/g(x,y)$ と書かれるものに対して次数を

$$\deg(P) = \max\{\deg_x f(x,y) + \deg_y f(x,y), \deg_x g(x,y) + \deg_y g(x,y)\}$$

と定義する. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理変換 $\varphi: (x,y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mapsto (P(x,y), Q(x,y)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ここで $P(x,y), Q(x,y)$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数, に対しては次数を

$$\deg(\varphi) = \max\{\deg P(x,y), \deg Q(x,y)\}$$

と定義する.

ブローアップ

p を X 内の点とする. 滑らかな射影曲面 Z と射 $\pi : Z \rightarrow X$ の組が, $p = (x_0, y_0)$ とする X 局所座標を用いて,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x, y; \zeta_1 : \zeta_2) &\in \{(x, y; \zeta_1 : \zeta_2) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x - x_0 : y - y_0 = \zeta_1 : \zeta_2\} \\ &\mapsto (x, y) \in \mathbb{C}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

と書かれるとき, π をブローダウンと呼び, π^{-1} をブローアップと呼ぶ. $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1$ であり, $\pi : Z \setminus \pi^{-1}(p) \rightarrow X \setminus p$ は双正則である. 記号の節約のため (3) を

$$(u, v) = (x - x_0, \frac{y - y_0}{x - x_0}) \cup (u', v') = (\frac{x - x_0}{y - y_0}, y - y_0) \mapsto (x, y) \quad (4)$$

と書く.

X', Y' をブローアップの繰り返し $\pi_X^{-1} : X \rightarrow X', \pi_Y^{-1} : Y \rightarrow Y'$ で得られる曲面とする. 有理写像 $\varphi' : X' \rightarrow Y'$ は $\pi_Y \circ \varphi'(x') = \varphi \circ \pi_X(x')$ が $\varphi'(x')$ と $\varphi \circ \pi_X(x')$ が定義されている任意の x' に対して成り立つとき, $\varphi : X \rightarrow Y$ の持ち上げであるという.

定義 (不確定点集合と臨界点集合) $\varphi : X \rightarrow Y$ をドミナントな有理写像とする.

$$\mathcal{I}(\varphi) := \{x \in X; \varphi \text{ は } X \text{ で不確定}\} \quad (5)$$

を不確定点集合と呼ぶ.

$\pi^{-1} : X \rightarrow X'$ を φ の不確定性を解消するブローアップとし, φ' を φ の持ち上げ (従って π と φ' は正則) とする.

$$\mathcal{C}(\varphi) := \{y \in Y; \dim(\pi(\varphi'^{-1}(y))) \geq 1\}, \quad (6)$$

を臨界点集合という. 但し φ^{-1} は集合の対応として考える.

注意

- i) 臨界点集合 $\mathcal{C}(\varphi)$ は X' の選び方によらない.
- ii) φ が双有理なら $\mathcal{C}(\varphi) = \mathcal{I}(\varphi^{-1})$.

定義 (初期値空間) $\{\varphi_i : Y_i \rightarrow Y_{i+1}\}$ をドミナントな (つまり正則点の像全体の閉包が行き先の多様体全体になる) 有理写像の列とする. 曲面の列 $\{X_i\}$ に対して φ_i が $\varphi'_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ ただし, $\mathcal{I}(\varphi_i) = \mathcal{C}(\varphi_i) = \emptyset$ (φ_i が双有理のときは双正則写像) に持ち上がるとき, $\{X_i\}$ (または X_i 自身) を φ_i の初期値空間と呼ぶ.

X の因子全体の成す加法群を $\text{Div}(X)$ と書く. X 上の可逆層の同型類全体を Picard 群と呼び $\text{Pic}(X)$ と書く. これは因子の線形同値類全体と同一視できる.

定義 (正則射による因子の引き戻しと押し出し) $\varphi: X \rightarrow Y$ を全射正則写像とする. 因子の引き戻し $\varphi^*: \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$ を Cartier 因子の引き戻し, つまり定義関数の引き戻し, で定める.

C を X 上の既約曲線 (特異点を持っても良い) とする. 因子の押し出し $\varphi_*: \text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(Y)$ を

$$\varphi_*(C) := \begin{cases} 0 & (f(C) \text{ が点のとき}) \\ \lambda\gamma & (\gamma = f(C) \text{ は } Y \text{ 上の既約曲線}), \end{cases} \quad (7)$$

但し λ は被覆 $\varphi|_C: C \rightarrow \gamma$ の次数, とその線形結合によって定める.

引き戻しや押し出しによって主因子は保たれるので, 引き戻し押し出しは Picard 群に対しても定義される. (例えば [14] の Chap.1 や [15] の Prop.1.4 を参照).

定義 (有理写像による因子の引き戻しと押し出し) $\varphi: X \rightarrow Y$ をドミナントな有理写像とする. $\pi^{-1}: X \rightarrow X'$ をブローアップによる φ の不確定点解消とし, $\varphi': X' \rightarrow Y$ を φ の持ち上げとする. 引き戻し $\varphi^*: \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$ を

$$\varphi^* := \pi_* \circ \varphi'^*: \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$$

で定め, 押し戻し φ_* (φ が双有理のときは $(\varphi^{-1})^*$ と一致) を

$$\varphi_* := \varphi'_* \circ \pi^*: \text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(Y)$$

で定める.

注意

- 1) 上の定義は X' の取り方によらない.
- 2) 引き戻し, 押し出しは加法群としての演算を保つ.

命題 3.1 $f: X \rightarrow Y$ および $g: Y \rightarrow Z$ をドミナントな有理写像とする. 任意の Z 上の有効因子 D に対して

$$(g \circ f)^*(D) \leq f^* \circ g^*(D)$$

が成り立つ. ここで等号が成り立つことと $\mathcal{C}(f) \cap \mathcal{I}(g) = \emptyset$ となることは同値である.

証明は [9] または [12] を参照.

定義 (解析的安定性 [13]) $\{\varphi_i: X_i \rightarrow X_{i+1}\}_{i=0,1,2,\dots}$ をドミナントな有理写像の列とする. 部分集合 $S \subset X_i$ に対して $\varphi_i(S \setminus \mathcal{I}(\varphi_i))$ を $\varphi_i(S)$ と書く. 任意の整数 n および $k \geq 0$ と任意の X_n 上の既約曲線 C に対して

$$\varphi_{n+k-1} \circ \varphi_{n+k-2} \circ \cdots \circ \varphi_n(C) \not\subset \mathcal{I}(\varphi_{n+k})$$

が成り立つとき、列 $\{\varphi_i\}$ は解析的に安定であると言う。これは任意の整数 n および $k \geq 0$ に対して

$$\varphi_{n+k-1} \circ \varphi_{n+k-2} \circ \cdots \circ \varphi_{n+1}(\mathcal{C}(\varphi_n)) \cap \mathcal{I}(\varphi_{n+k}) = \emptyset$$

が成り立つことと同値である。

要するに $\{\varphi_i\}$ が解析的に安定とは $[\text{EF} \rightarrow \text{point} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{point} \rightarrow \text{EF}]$ という特異点パターンを持たないということである。

次の命題は命題 3.1 より従う。

命題 3.2 $\{\varphi_i : X_i \rightarrow X_{i+1}\}_{i=0,1,2,\dots}$ が解析的に安定のとき、

$$(\varphi_{n+k-1} \circ \varphi_{n+k-2} \circ \cdots \circ \varphi_n)^*(D) = \varphi_n^* \circ \varphi_{n+1}^* \circ \cdots \circ \varphi_{n+k-1}^*(D)$$

が X_{n+k} 上の任意の因子 D に対して成立する。

全変換像と固有変換像

$\pi^{-1} : X \rightarrow Y$ を点 p での X のブローアップ、 D を X 上の因子とする。 Y 上の因子 $\pi^*(D)$ を D の全変換像と呼ぶ。 V を X の解析的部分多様体とする Y 内での $\pi^{-1}(V \setminus p)$ の閉包は V の固有変換像と呼ぶ。 また、例外因子 $\pi^{-1}(p)$ を点 p の全変換像と呼ぶ。

初期値空間の作り方

$F(= Y_{0,i}, i$ によらない) を極小曲面とし、 $\varphi_i : Y_{0,i} \rightarrow Y_{0,i+1}$ を有理写像とする。 始めに $\mathcal{I}(\varphi_i) \cup \mathcal{C}(\varphi_{i-1})$ の点で $Y_{0,i}$ をブローアップし、得られた曲面 $Y_{1,i}$ が、1) φ_i は $Y_{1,i}$ から $Y_{0,i+1}$ への正則射に持ち上げられ、2) φ_{i-1} は $Y_{0,i-1}$ から $Y_{1,i}$ への有理写像であって $\mathcal{C}(\varphi_{i-1}) = \emptyset$ となるものに持ち上げられる、という2つの条件を満たすようにする。 φ_i は同時に $Y_{1,i}$ から $Y_{1,i+1}$ への有理写像にも持ち上げられる。 $Y_{1,i}$ に対しても $Y_{0,i}$ と同様のことを繰り返す。 このようにな操作を n 回繰り返して、もし任意の i に対して $Y_{n,i} = Y_{n+1,i}$ となれば、各 φ_i は $\mathcal{I}(\varphi_i) = \mathcal{C}(\varphi_i) = \emptyset$ を満たし、従って $X_i := Y_{n,i}$ は初期値空間である。 もちろんこのような操作は有限回で終わるとは限らないし、ときには途中でブローダウンを用いるとうまく行くこともある。

解析的に安定な写像の列の作り方

$F(= Y_{0,i})$ と $\varphi_i : Y_{0,i} \rightarrow Y_{0,i+1}$ は上と同様とする。 始めに

$$\bigcup_{j=-\infty}^{i-1} \varphi_{i-1} \circ \varphi_{i-2} \circ \cdots \circ \varphi_{j+1}(\mathcal{C}(\varphi_j)) \cap \mathcal{I}(\varphi_i), \quad (8)$$

の点で $Y_{0,i}$ をブローアップし、得られた曲面 $Y_{1,i}$ が、 $\{\varphi_i\}$ が (8) = $\emptyset$ を満たす有理写像の列 $\{\cdots \rightarrow Y_{0,i-1} \rightarrow Y_{1,i} \rightarrow Y_{0,i+1}\}$ に持ち上げられるようにする。 φ_i は同時に $Y_{1,i}$ から $Y_{1,i+1}$ への有理写像にも持ち上げられるので、 $Y_{1,i}$ に対しても $Y_{0,i}$ と同様のことを繰り返す。 このようにな操作を n 回繰り返して、もし任意の i に対して

$Y_{n,i} = Y_{n+1,i}$ となれば, $\{\varphi_i\}$ は解析的に安定な有理写像の列 $\{\varphi_i : Y_{n,i} \rightarrow Y_{n,i+1}\}$ に持ち上がる.

注意 この操作は一般には有限回の操作で終わるとは限らないが, $\{\varphi_i\}$ が自励的 (つまり i によらない) で双有理であればかならず終わる [9].

ブローアップと因子類

$\pi^{-1} : X \rightarrow Y$ を p での X のブローアップとし, C を X 上の曲線とする. C の全変換像の因子類を $(\pi^{-1})^*[C]$, または単に $[C]$ と書く. C の固有変換像の因子類は $[C] - m[p]$ となる. ここで m は C の p での多重度である.

有理曲面の Picard 群

X を $\mathbb{P}^2$ から L 回のブローアップで得られた曲面とする. X のピカル群 $\text{Pic}(X)$ は

$$\mathbb{Z}E + \sum_{l=1}^L \mathbb{Z}E_l$$

という $\mathbb{Z}$ 加群になる. ここで E は $\mathbb{P}^2$ 内の直線の全変換像の因子類を, E_l は l 回目のブローアップの点の全変換像の因子類を表す.

X を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ から L 回のブローアップで得られた曲面とする. $\text{Pic}(X)$ は

$$\mathbb{Z}H_0 + \mathbb{Z}H_1 + \sum_{l=1}^L \mathbb{Z}E_l$$

という $\mathbb{Z}$ 加群になる. ここで H_0 (または H_1) は直線 $x = \text{constant}$ (resp. $y = \text{constant}$) の全変換像の因子類を表す.

交点数

X を $\mathbb{P}^2$ を何度かブローアップして得られた曲面とする. X 上の因子の交点数は公式

$$E \cdot E = 1, E \cdot E_l = 0, E_l \cdot E_m = -\delta_{l,m}, \quad (9)$$

とその線形和で与えられる. ここで $\delta_{l,m}$ は $l = m$ のとき 1, $l \neq m$ のとき 0 とする.

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合, 交点数は

$$H_i \cdot H_j = 1 - \delta_{i,j}, E_l \cdot E_m = -\delta_{l,m}, H_i \cdot E_l = 0 \quad (10)$$

で与えられる.

補題 3.3 [12] X, Y を $\mathbb{P}^2$, または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, を何度かブローアップして得られた曲面とする. 有理写像 $\varphi : X \rightarrow Y$ の次数に関して次の公式が成り立つ. $\mathbb{P}^2$ の場合には

$$\deg(\varphi) = (\varphi)^*(E) \cdot E$$

が成り立ち, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合には

$$\begin{aligned}\deg_x(P) &= (\varphi)^*(H_0) \cdot H_1 & \deg_y(P) &= (\varphi)^*(H_0) \cdot H_0 \\ \deg_x(Q) &= (\varphi)^*(H_1) \cdot H_1 & \deg_y(Q) &= (\varphi)^*(H_1) \cdot H_0\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し φ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の局所座標で $\varphi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ と書かれているものとする.

次の命題は命題 3.2 および補題 3.3 より従う.

命題 3.4 X_i を $\mathbb{P}^2$, または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, を何度かブローアップして得られた曲面とする. 解析的に安定な有理写像の列 $\{\varphi_i : X_i \rightarrow X_{i+1}\}$ の次数に関して次の公式が成り立つ. $\mathbb{P}^2$ の場合は

$$\begin{aligned}\deg(\varphi^n) &= (\varphi^n)^*(E) \cdot E = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i^*(E) \cdot E \\ & (= \deg(\varphi^{-n}) = (\varphi^n)_*(E) \cdot E, \varphi_i \text{ が双有理のとき})\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し $(\varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ \varphi_0)$ を φ^n と略記した. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合は

$$\begin{aligned}\deg_x P^n(x, y) &= (\varphi^n)^*(H_0) \cdot H_1 = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i^*(H_0) \cdot H_1 = (\varphi^n)_*(H_1) \cdot H_0 \\ \deg_y P^n(x, y) &= (\varphi^n)^*(H_0) \cdot H_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i^*(H_0) \cdot H_0 = (\varphi^n)_*(H_0) \cdot H_0 \\ \deg_x Q^n(x, y) &= (\varphi^n)^*(H_1) \cdot H_1 = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i^*(H_1) \cdot H_1 = (\varphi^n)_*(H_1) \cdot H_1 \\ \deg_y Q^n(x, y) &= (\varphi^n)^*(H_1) \cdot H_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i^*(H_1) \cdot H_0 = (\varphi^n)_*(H_0) \cdot H_1\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の局所座標で $\varphi^n(x, y) = (P^n(x, y), Q^n(x, y))$ と書かれているものとし, 一番右側の等号は φ_i が双有理のときに成り立つ.

この節の最後に, Diller と Favre によって示された, Riccati 系の自励的な場合に当てはまる定理を述べておく.

命題 3.5 [9] X を Kähler 曲面, φ を X の双有理自己同型で次数が 1 次で増加するとする. このときある線織曲面 Y が存在して, i) φ_i はある Y の双有理自己同型に双有理共役で,

ii) $\text{Pic}(Y)$ の元で φ_i^* によって保たれる元 L がただ 1 つ存在する. また, $L \cdot L = 0$ であり, L は φ_i によって保たれるファイバー構造の一般ファイバーの因子類である.

4 Riccati系の幾何

この節と次の節では Riccati 系の初期値空間, 解析的に安定な系への変換, 初期値に対する次数, 標準形への変換について考える. Riccati 系は一般に初期値空間を持たず, 初期値空間を構成しようとするとは無限回のブローアップが必要になる. しかし無限回のブローアップという仮想的な概念を導入することは, 力学系の性質を調べる上で便利なのが分かる. 同時に解析的に安定な系への持ち上げも考察するが, どちらの方法もそれぞれに利点がある. 例えば初期値空間の方法では交点数や曲面上の曲線の位相が保たれるので Picard 群への作用が簡単に計算できるし, 解析的安定性の方法ではブローアップが有限回で済むので Picard 群の階数が有限になる.

再び2節の式(1)を考える. 式(1)を $\varphi_n : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の写像と考えて

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = (-\frac{y}{x} + a_n)y \end{cases} \quad (11)$$

と書き換える. φ_n および φ_{n-1}^{-1} の不確定点は $(x, y) = (0, 0), (\infty, \infty)$ である.

4.1 初期値空間

まず $(x, y) = (0, 0)$ でのブローアップ $(x, y) \leftarrow (x, y/x) \cup (x/y, y)$ により曲面 Y'_n を得る. φ_n は Y'_n から $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への射に持ち上がる. 例えば φ_n の作用は Y'_n の座標を用いて

$$\begin{aligned} (u_A, v_A) &:= (x, y/x) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = (u_A v_A, -u_A v_A (v_A - a_n)) \\ (u'_A, v'_A) &:= (x/y, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = (v'_A, -(1 - a_n u'_A) v'_A / u'_A) \end{aligned}$$

と表される. 例外曲線は $u_A = 0$ (または $v'_A = 0$) と表され, その上の $(u'_A, v'_A) = (0, 0)$ という点で φ_n はまだ不確定である.

3節で述べたように初期値空間を構成してゆくと, 無限回のブローアップによって図1で表される「有理曲面」 X_n を得る. 但し, 図1で実戦は既約曲線を, 実戦の交わりは交点を, 矢印は曲線の押し出しを表す. ここで曲面 X_n 上のブローアップの点の全変換像は

$$\begin{aligned} A &: (x, y) = (0, 0) \\ B &: (1/x, 1/y) := (0, 0) \\ C_i &: (u_A, v_A) := (x, y/x) = (0, \sum_{k=1}^i a_{n-i-1}) \\ D_i &: (u_B, v_B) := (y/x, 1/y) = (-\sum_{k=0}^{i-1} a_{n+i}, 0) \\ E_1 &: (u'_A, v'_A) := (x/y, y) = (0, 0) \\ E_2 &: (u_{E_1}, v_{E_1}) := (u'_A, v'_A / u'_A) = (0, 0) \end{aligned}$$

$(\prod_{k=0}^{m-1} \varphi_{n+k})(x, y) = (P^m, Q^m)$, $(m \geq 1)$ の次数は

$$\prod_{k=0}^{m-1} (\varphi_{n+k})_*(H_0) = (m+1)H_0 + m(H_1 + A + B) - \sum_{i=1}^m C_i - \sum_{i=1}^m F_i$$

$$(\varphi_{n+k})_*(H_1) = H_0$$

より, $\deg_x P^m = m-1$, $\deg_y P^m = m$, $\deg_x Q^m = m$, $\deg_y Q^m = m+1$ と求まる.

4.2 解析的に安定な系

3節の方法に従って $\{\varphi_n\}$ を解析的に安定な列に持ち上げる. X を点 A, B でプロアップして得られる曲面とすると, $\{\varphi_n : X \rightarrow X\}$ は解析的に安定である (図2). 今の場合, X は n によらないが, 5.2節で見るようにこれには一般には成り立たないことに注意する.

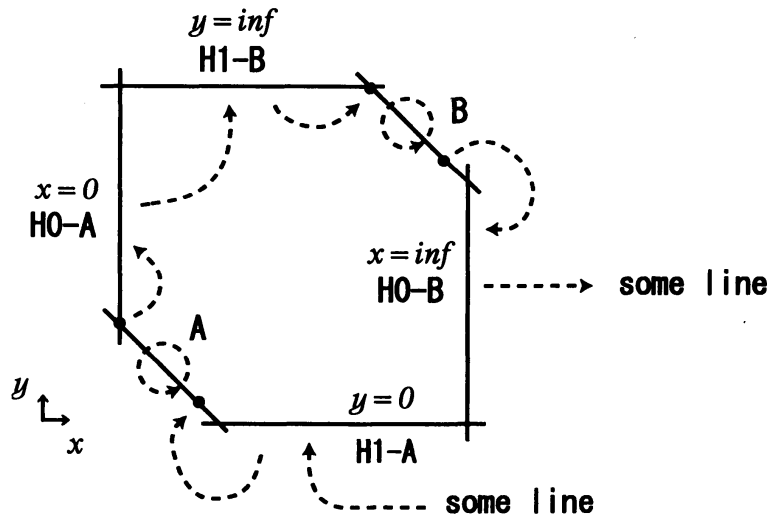


図 2: 4.2 節

Picard 群への作用 $(\varphi_n)_* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ は,

$$H_0 \mapsto 2H_0 + H_1 - A - B$$

$$H_1 \mapsto H_0$$

$$A \mapsto H_0$$

$$B \mapsto H_0$$

となる. これは初期値空間の場合の結果において, 単に X では点になる因子を 0 としても求まる.

4.3 線形化

$\text{Pic}(X)$ の元で φ_n によって不変な元として

$$H_0 + H_1 - A - B \quad (12)$$

が取れる. 固有変換像がこの因子類に属する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の曲線は

$$c_1x + c_2y = 0$$

但し $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ は同時に 0 でない定数, という 1 パラメーター直線族になる. 実際, これらの直線は 2 点 $(x, y) = (0, 0), (\infty, \infty)$ をそれぞれ重複度 1 で通る. ここで $\{(c_1 : c_2)\} \simeq \mathbb{P}^1$ と直線 $c_1x + c_2y = 0$ はそれぞれ底空間とファイバーとみなすことが出来る. よって X は φ_n によって保たれるファイバー構造を持つことが分かった.

$u = -c_1/c_2 = y/x, v = x$ と置くと φ_n は

$$\begin{cases} \bar{u} = u + a_n \\ \bar{v} = uv \end{cases} \quad (13)$$

のように底空間とファイバー上の双有理写像に分解されて, Riccati 系の標準形 (2) になる.

線形化の方法

ϕ_n は標準形とは限らない Riccati 系で X_n 上で解析的に安定 (または X_n は初期値空間) とする. 因子の線形同値類 α で線形系の次元が 1 となるものが存在する. $|\alpha|$ に属する曲線はファイバーであり, $\mathbb{P}^1$ と双有理同値である. 曲線族 $|\alpha|$ のパラメーター空間が底空間になる. このとき局所座標を標準形 (2) に取れる.

注意

- i) Diller と Favre によって自励系の場合は十分大きい n に対して $f^n(\mathcal{C}(f^{-1}))$ の因子類が α を与えることが示されている. この証明は非自励系の場合も有効である.
- ii) 既約曲線が $\mathbb{P}^1$ と双有理同値であることは曲線の種数が 0 であることと同値である. よって与えられた系が Riccati 系であるかどうかは上のような α が存在するかどうかによって判定できる.

5 より複雑な Riccati 系の例

この節では

$$1 = \frac{f_{n-1} + f_{n+1} + k}{x_n} - \frac{f_{n-1} + f_n + k}{x_n + x_{n-1}} - \frac{f_n + f_{n+1} + k}{x_n + x_{n+1}} \quad (14)$$

という力学系を考える. ここで f_n は n の関数であり, $k \in \mathbb{C}$ は定数である (よって $k = 0$ としても一般性を失わない). この系は離散 Painlevé IV 型方程式からの退化

によって得られ [11], 次数の増加は 1 次である. 式 (14) は $\varphi_n : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$:

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = -\frac{y(xy + y^2 - (f_{n-1} - f_n)x + 2f_n y)}{xy + y^2 - (f_{n-1} + f_{n+1})x + (f_n - f_{n+1})y} \end{cases} \quad (15)$$

という写像に書き換えられ, φ_n および φ_n^{-1} の不確定点は $(x, y) = (0, 0), (\infty, \infty)$ である.

5.1 初期値空間

一般的な $\{f_n\}$ に対する φ の「初期値空間」 X_n は図 3 のようになる. ここで曲面 X_n 上のブローアップの点の全変換像は

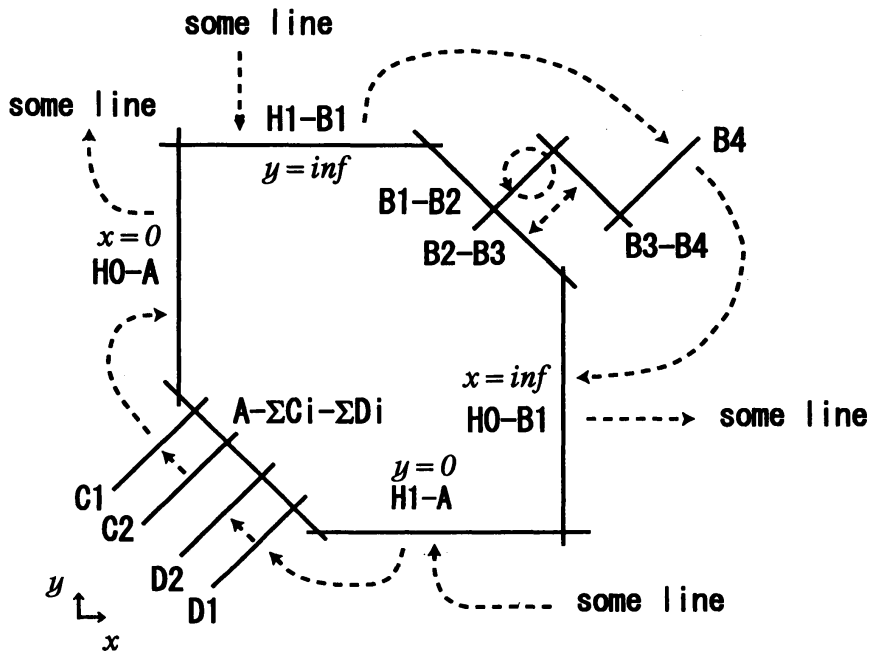


図 3: 5.1 節

$$A : (x, y) = (0, 0)$$

$$B_1 : (1/x, 1/y) := (0, 0)$$

$$B_2 : (u_{B_1}, v_{B_1}) := (1/x, x/y) = (0, -1)$$

$$B_3 : (u_{B_2}, v_{B_2}) := (u_{B_1}, \frac{v_{B_1} + 1}{u_{B_1}}) = (0, f_{n-1} + f_n)$$

$$B_4 : (u_{B_3}, v_{B_3}) := (u_{B_2}, \frac{v_{B_2} - (f_{n-1} + f_n)}{u_{B_2}}) = (0, -(f_{n-1} + f_n)2f_{n-1})$$

$$C_1 : (u_A, v_A) := (x, y/x) = (0, \frac{f_{n-1} + f_{n+1}}{f_n - f_{n+1}}) =: c_{1,n}$$

$$\begin{aligned}
C_i : (u_A, v_A) &= (0, \frac{(f_{n-1} - f_n) + (f_{n-1} + f_{n+1})c_{i-1,n+1}}{2f_n + (f_n - f_{n+1})c_{i-1,n+1}} =: c_{i,n}) \quad (i \geq 2) \\
D_1 : (u_A, v_A) &= (0, \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{f_n + f_{n-2}} =: d_{1,n}) \\
D_i : (u_A, v_A) &= (0, \frac{(f_{n-1} - f_{n-2}) + (2f_{n-1})d_{i-1,n-1}}{(f_{n-2} + f_n) + (f_n - f_{n-1})d_{i-1,n-1}} =: d_{i,n}) \quad (i \geq 2)
\end{aligned}$$

である.

Picard 群の押し出し $(\varphi_n)_* : \text{Pic}(X_n) \rightarrow \text{Pic}(X_{n+1})$ は

$$\begin{aligned}
H_0 &\mapsto 3H_0 + H_1 - A - B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - D_1 \\
H_1 &\mapsto H_0 \\
A &\mapsto H_0 - D_1 \\
B_1 &\mapsto H_0 - B_4 \\
B_2 &\mapsto H_0 - B_3 \\
B_3 &\mapsto H_0 - B_2 \\
B_4 &\mapsto H_0 - B_1 \\
C_1 &\mapsto H_0 - A \\
C_i &\mapsto C_{i-1} \quad (i \geq 2) \\
D_i &\mapsto D_{i+1} \quad (i \geq 1)
\end{aligned} \tag{16}$$

となり, $(\prod_{k=0}^{m-1} \varphi_{n+k})(x, y) = (P^m, Q^m)$, $(m \geq 1)$, の次数は

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{m-1} (\varphi_{n+k})_*(H_0) &= (2m+1)H_0 + (2m-1)(H_1 - A) - m \sum_{l=1}^4 B_l - 2 \sum_{l=1}^{m-1} D_l - D_m \\
(\varphi_{n+k})_*(H_1) &= H_0
\end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\deg_x P &= 0, \quad \deg_x P^m = 2m - 3 \quad (m \geq 2), \\
\deg_y P^m &= 2m - 1, \quad \deg_x Q^m = 2m - 1, \quad \deg_y Q^m = 2m + 1 \quad (m \geq 1)
\end{aligned}$$

と求まる.

5.2 解析的に安定な系

X_n を点 A と点 $\mu_{B_l} (l = 1, 2, 3, 4)$ でブローアップして得られた曲面とするとき, $\{\varphi_n : X_n \rightarrow X_{n+1}\}$ は解析的に安定になる (図 4).

Picard 群の押し出し $(\varphi_n)_* : \text{Pic}(X_n) \rightarrow \text{Pic}(X_{n+1})$ は

$$H_0 \mapsto 3H_0 + H_1 - A - B_1 - B_2 - B_3 - B_4$$

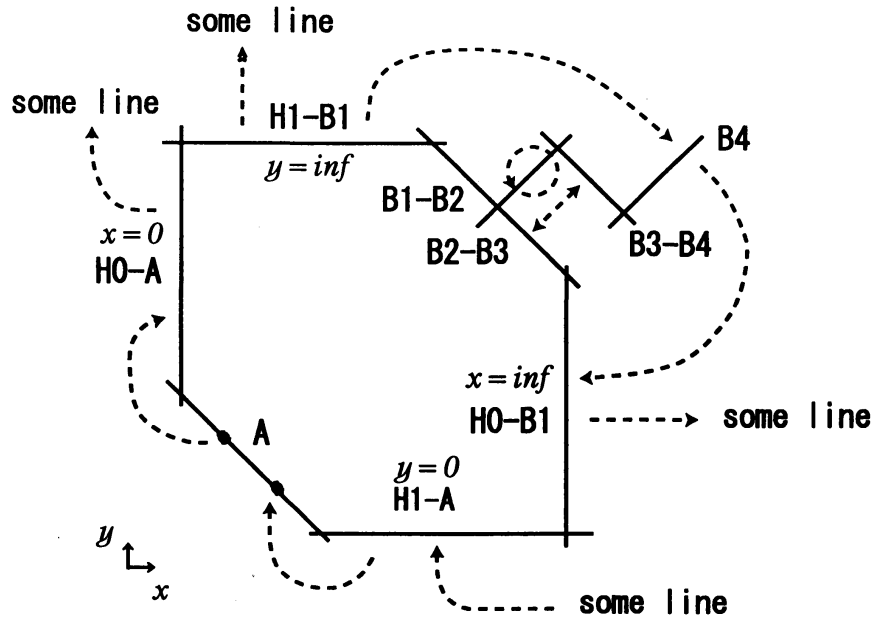


図 4: 5.2 節

$$\begin{aligned}
 H_1 &\mapsto H_0 \\
 A &\mapsto H_0 \\
 B_1 &\mapsto H_0 - B_4 \\
 B_2 &\mapsto H_0 - B_3 \\
 B_3 &\mapsto H_0 - B_2 \\
 B_4 &\mapsto H_0 - B_1
 \end{aligned}$$

となる.

$\text{Pic}(X_n) \simeq \text{Pic}(X_{n+1})$ の不変な有効因子類は

$$2H_0 + 2H_1 - 2A - B_1 - B_2 - B_3 - B_4$$

であり, 固有変換像がこの因子類に属する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の曲線は

$$c_1(x+y)^2 + c_2y(x^2 - f_ny + xy + f_{n-1}(2x+y)) = 0 \quad (17)$$

となる. 但し $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ は同時に 0 でない定数とする. ここで $\{(c_1 : c_2)\} \simeq \mathbb{P}^1$ と曲線族 (17) はそれぞれ底空間とファイバーとみなせる. よって X_n は φ_n によって保たれるファイバー構造をもつ. ここで曲線 (17) は特異点 $(0,0)$ を持ち, $\mathbb{P}^1$ と双有理同値である. 実際直線 $sx - y = 0$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内で曲線 (17) と次の 4 点: $(0,0)$ (位数 2), (∞, ∞) および

$$\begin{cases}
 x = -\frac{c(1+s)^2 + s(-f_ns + f_{n-1}(2+s))}{s(1+s)} \\
 y = -\frac{c(1+s)^2 + s(-f_ns + f_{n-1}(2+s))}{(1+s)},
 \end{cases} \quad (18)$$

但し $c = c_1/c_2$ と書く，で交わる．式 (18) は $s \in \mathbb{P}^1$ から曲線 (17) への双有理写像である．

新しい独立変数 c, s を用いると φ は

$$\begin{cases} \bar{c} = \frac{f_{n-1} + f_n}{f_n + f_{n+1}}(c + f_{n-1} - f_n) \\ \bar{s} = -\frac{(c + f_{n-1} - f_n)(s + 1)}{(c + f_{n-1} - f_n)s + c + f_{n-1} + f_{n+1}} \end{cases} \quad (19)$$

と変換される． $d := (f_{n-1} + f_n)c + f_{n-1}^2$ は不変なので最初の式は簡単に積分でき，また 2 番目の式は s についての 1 次元射影変換となっている．

5.3 ある自励的な場合

参考として自励系であって初期値空間が一般的なものと異なる例を挙げる．式 (15) で任意の n に対して $f_n = -1/(2a)$ となる場合:

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = -\frac{y^2(ax + ay - 1)}{axy + ay^2 + x} \end{cases} \quad (20)$$

を考える．式 (20) の「初期値空間」 X_n は図 5 のようになる．ここで曲面 X_n 上のプ

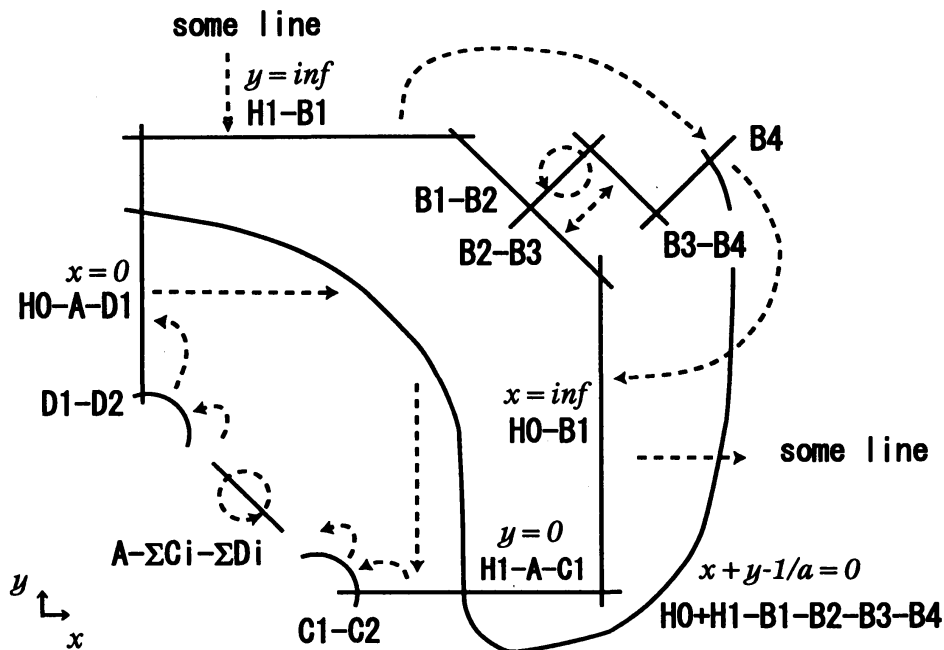


図 5: 5.3 節

ローアップの点の全変換像は

$$A : (x, y) = (0, 0)$$

$$\begin{aligned}
B_1 &: (1/x, 1/y) := (0, 0) \\
B_2 &: (u_{B_1}, v_{B_1}) := (1/x, x/y) = (0, -1) \\
B_3 &: (u_{B_2}, v_{B_2}) := (u_{B_1}, \frac{v_{B_1} + 1}{u_{B_1}}) = (0, -1/a) \\
B_4 &: (u_{B_3}, v_{B_3}) := (u_{B_2}, \frac{v_{B_2} + 1/a}{u_{B_2}}) = (0, -1/a^2) \\
C_i &: (x/y, y^i/x^{i-1}) := (0, 0) \quad (i \geq 1) \\
D_1 &: (x^i/y^{i-1}, y/x) := (0, 0) \quad (i \geq 1)
\end{aligned}$$

である.

曲線の押し出し $(\varphi_n)_*$ は一般の場合と異なるが, Picard 群への作用 $(\varphi_n)_* : \text{Pic}(X_n) \rightarrow \text{Pic}(X_{n+1})$ は (16) と同じになる. よって不変な有効因子類も一般的な場合と同じになる.

参考文献

- [1] Grammaticos B, Ramani A and Papageorgiou V 1991 Do integrable mappings have the Painlevé property? *Phys. Rev. Lett.* **67** 1825–1827
- [2] Ramani A, Grammaticos B and Hietarinta J 1991 Discrete versions of the Painlevé equations *Phys. Rev. Lett.* **67** 1829–1832
- [3] Hietarinta J and Viallet C M 1997 Singularity confinement and chaos in discrete systems *Phys. Rev. Lett.* **81** 325–328
- [4] Sakai H 2001 Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations *Commun. Math. Phys.* **220** 165–229
- [5] Okamoto K 1979 Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé (French) *Japan J. Math.* **5** 1–79
- [6] Takenawa T 2001 A geometric approach to singularity confinement and algebraic entropy *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** L95–L102
- [7] Takenawa T 2001 Discrete dynamical systems associated with root systems of indefinite type *Commun. Math. Phys.* **224** 657–681
- [8] Takenawa T 2001 Algebraic entropy and the space of initial conditions for discrete dynamical systems *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 10533–10545
- [9] Diller J A and Favre C 2001 Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces *Amer. J. Math.* **123** no.6 1135–1169
- [10] Ramani A, Grammaticos B, Lafortune S and Ohta Y 2000 Linearizable mappings and the low-growth criterion *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** L287–L292

- [11] Ramani A, Ohta Y and Grammaticos B 2000 Discrete integrable systems from continuous Painlevé equations through limiting procedures *Nonlinearity* **13** 1073–1085
- [12] Takenawa T, Eguchi M, Grammaticos B, Ohta Y, Ramani A and Satsuma J 2002 Space of initial conditions for linearisable mappings
Preprint nlin.SI/0204070
- [13] Sibony N 1999 *Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$* (*Panor. Synthèses*, 8) 97–185 (Paris: Soc. Math. France)
- [14] Beauville A 1996 *Complex algebraic Surfaces 2nd edn.* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [15] Fulton W 1984 *Intersection theory, vol.2 Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* (Berlin: Springer-verlag)