

$K_m(E \times F)$ ($p = 18$) に付随する Jacobian fibrations について

東大理 小木曾啓示

§0. 序.

以下, 本稿の終りまで, すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。
序では, 以下必要となる定理を中心に, $K3$ 曲面と Abel 曲面, 楕円曲面の Mordell-Weil 群について知られていることを簡単にふり返ってみることにする。記述を簡単にするため, 曲面はすべて連結コンパクト非特異代数曲面とする。

Pjateckii-Šapiro と Šafarevič [11] により, $K3$ 曲面に対する Torelli の定理が証明されて以来, $K3$ 曲面は様々な立場から研究されている。また, 彼らの証明を完全にする目的から, 塩田先生 [5] により, 次の形の Abel 曲面の Torelli の定理が示された。

(0.1) A, B を Abel 曲面とする。このとき,

(1). $\varphi: H^2(B, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Z})$ なる Hodge isometry (即ち, Hodge 構造と交点形式を保つ同型) があるならば,

$A \cong B$ 又は $A \cong \text{Pic}^0(B)$ となる。

(2) $\varphi: H^2(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Z})$ が Hodge isometry かつ $\det \varphi = 1$ をみたすならば, ある $f \in \text{Aut}(A)$ があって, $\varphi = f^*$ 又は $\varphi = -f^*$ となる。 $\square$

Abel 曲面を, (-1) 倍写像でわった商多様体の最小非特異化として得られる曲面 $Km A$ を, Kummer 曲面という。よく知られている様に, Kummer 曲面は, K3 曲面となる。Abel 曲面 A と Kummer 曲面 $Km A$ には密接な関係があるが, Torelli の定理の立場からは, 自然な有理写像 $\pi_A: A \dashrightarrow Km A$ により, 超越格子 (即ち, Néron-Severi 群の整係数 2 次元 $\mathbb{Q}$ ホモロジ一群内での直交補格子) $T_A, T_{Km A}$ の間に次の関係があることが重要である。

(0.2). $\pi = \pi_{A*}: T_A \rightarrow T_{Km A}$ は, $\pi x \cdot \pi y = 2x \cdot y$ をみたし, 更に Hodge 構造を保つ $\mathbb{Z}$ -加群の同型になる。 $\square$

また, 構成から, Kummer 曲面は, その上に 16 本の互いに交わらない非特異有理曲線をもつが, Nikulin [1] は, 逆に, K3 曲面 γ 上に, 互いに交わらない 16 本の非特異有理曲線があれば, γ は Kummer 曲面になることを示した。

(0.3). γ を K3 曲面とし, $d_1, \dots, d_{16}$ を γ 上の互いに交わらない非特異有理曲線とする。このとき,

(1). $\mathcal{O}_\gamma(d_1 + \dots + d_{16}) \in 2\text{-Pic}(\gamma)$ ならば, $16 = 0, 8, 16$.

(2). $16 = 16$ のとき, $\mathcal{O}_\gamma(d_1 + \dots + d_{16}) \in 2\text{-Pic}(\gamma)$ であり,

$d_1 + \dots + d_{16}$ で分岐する γ の 2 重被覆 $\hat{\gamma}$ の極小モデル $(d_1, \dots, d_{16}$

の逆像を contract してえらる) A は Abel 曲面となり, Covering involution を (-1) 倍写像として, $\gamma = kmA$ となる。 $\square$

他示, 正則切断をもつ楕円曲面 (特異ファイバーを少なくとも 1 つもつ) $\varphi: Z \rightarrow \Delta$ を Jacobian fibration と呼ぶことにする。 $Z^\#$ で φ が smooth になる点全体, Z_Δ で $\Delta \in \Delta$ 上のファイバー, $\Sigma \subset \Delta$ で Z_Δ が特異ファイバーとなる点全体を表すことにする。ファイバー (楕円曲線) の群構造により, 正則切断全体は, 1 つの切断を O -切断として, 有限生成 Abel 群をなす。いわゆる Mordell-Weil 群である。Mordell-Weil 群 (以下 $M_\varphi(Z)$ と書く) の階数については, 塩田先生 [4] により, 次の結果が示されている。

(0.4). (1) Z の Néron-Severi 群 $NS(Z)$ は, 正則切断の類とファイバーの既約成分の類全体で生成される。

$$(2). \quad \text{rank } M_\varphi(Z) = \text{rank } NS(Z) - 2 - \sum_{\Delta \in \Sigma} (m(Z_\Delta) - 1)$$

ここで, $m(Z_\Delta)$ は, $(Z_\Delta)_{\text{red}}$ の既約成分の数である。 $\square$

Mordell-Weil 群 $M_\varphi(Z)$ のねじれ部分群については, 群 $Z_\Delta^\# = Z_\Delta \cap Z^\#$ のねじれ部分群への単射があることはよく知られている。Cox と Zucker は, [7] で, ねじれ部分群を調べる強力な手法を開発した。

(0.5) Mordell-Weil 群 $M_\varphi(Z)$ には, 有理数値半正定値対称双一次形式 $\langle, \rangle$ が入る。この双一次形式に関して次の 2 つは同値となる。(i) $\sigma \in M_\varphi(Z)$ はねじれ元 (ii) $\langle \sigma, \sigma \rangle = 0$

ここで, $\langle, \rangle$ は次の様に計算 (定義) される。

σ_0 を 0-切断とし, σ, σ' を切断とする。 $\sigma_0, \sigma, \sigma'$ で定まる Σ 上の因子を, それぞれ $\underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}, \underline{\sigma}'$ で表す。

$$\langle \sigma, \sigma' \rangle = -(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0) \cdot (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}_0) - \sum_{\Delta \in \Sigma} \underline{\sigma} \cdot D_\Delta(\sigma')$$

ここで, $D_\Delta(\sigma') = \sum_i a_i^\Delta C_i^\Delta$ (C_i^Δ は $\oplus_\Delta$ の既約成分, a_i^Δ は有理数) は, 次により一意に定まる Σ 上の $\mathbb{Q}$ -因子である。

$$(\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}_0 - \sum_{\Delta \in \Sigma} D_\Delta(\sigma')) \cdot (\forall \text{ fiber の既約成分}) = 0, D_\Delta(\sigma') \cdot \underline{\sigma}_0 = 0 \quad \square$$

K3 曲面の場合に話をもてよう。K3 曲面 Y の elliptic fibration は, 次の様にして与えられることが知られている。(容易にわかる。)

(0.6). $\varphi = \pi|_{\oplus 1} : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\oplus$ は楕円曲面の非重複特異ファイバーと同じ型の Y 上の因子。 $\square$

$\varphi = \pi|_{\oplus 1}$ が Jacobian fibration となるのは, $\oplus \cdot C = 1$ となる Y 上の非特異有理曲線 C がある場合である。 Y 上の Jacobian fibrations 全体を $\mathcal{J}_Y$ と書くことにする。 $\mathcal{J}_Y$ には, Y の自己同型群 $\text{Aut}(Y)$ が, $\pi|_{\oplus 1} \mapsto \pi|_{f(\oplus 1)}$ ($f \in \text{Aut}(Y)$) により自然に作用する。 Y 上の 2 つの Jacobian fibrations $\pi|_{\oplus i}$ ($i=1,2$)

が同型になるのは, $f(\mathbb{O}_1) \in |\mathbb{O}_2|$ となる γ の自己同型 f がある場合である。さて, φ が γ の Jacobian fibration のとき, Mordell-Weil 群 $M_\varphi(\gamma)$ は, γ の自己同型 ("各ファイバー" の平行移動) を与えるが, $M_\varphi(\gamma)$ は, 明らかに, γ の正則 2 型式全体の空間 $H^0(\gamma, K_\gamma) \cong \mathbb{C}$ と自明に作用する。このように, K3 曲面 (すは, Abel 曲面) の自己同型で, 正則 2 型式全体の空間に自明に作用する自己同型を, 向井先生に倣って, N -自己同型と呼ぶことにする。(γ の N -自己同型全体の作る群を $\text{Aut}_N(\gamma)$ と書く。) Nikulin [2] と向井先生 [12] により, K3 曲面の有限 N -自己同型(部分)群は完全に調べられている。出発点は, Nikulin による次の定理である。

(0.7). γ を K3 曲面, $f \neq \text{id}$. を γ の有限 N -自己同型とする。このとき, f は γ に有限個の固定点しか持たない。

(f の位数, f の固定点数) は, 次のどれかになる。

(2, 8), (3, 6), (4, 4), (5, 2), (6, 2), (7, 3), (8, 2) $\square$

この (0.7) と (0.5) により, $M_\varphi(\gamma)$ の正しい部分群はかなりよく調べられる。

拙著 [10] では, 以上の一般論の応用として, 互いに同種でない楕円曲線の直積 Abel 曲面 $E \times F$ の Kummer 曲面 $X = \text{Km}(E \times F)$ に, Jacobian fibrations の構造が, 同型を除いて

とだけ入るか、又、各同型類に対して、Mordell-Weil 群がどうなるかを完全に調べた。(§1. 定理 1, 2 参照) (0.6) によれば、 $\mathcal{O}_X / \text{Aut}(X)$ を調べるためには、 X 上の非特異有理曲線の交わり方の様子と、自己同型で移り合う様子を調べることが重要になる。(§2. 補題 1, 2, 3, 4 参照) (0.1), (0.2), (0.3) により、こゝろがよくわかることが調べられる理由である。

この報告では、[10] の証明の概略を、序で述べた一般論がどのように応用されるか、即ち、Picard 数 $\rho(X) = 18$ (E と F が同種でないことと同値) という特殊性がどう利用されているかを中心に述べたいと思います。(詳しい証明に興味のある方は、[10], をみて下さい。)

目次

§1. 記号と主結果

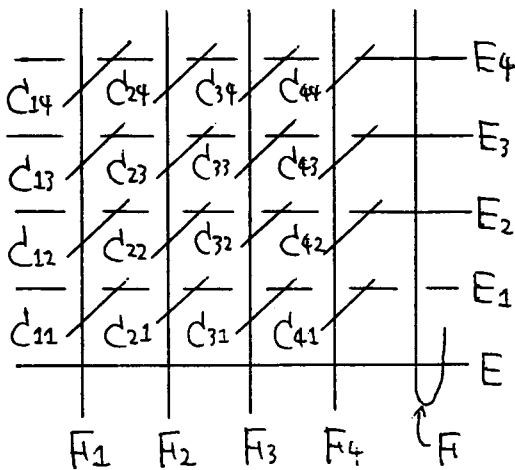
§2. 補題

§3. 定理 1 の証明のアイディア

§4. 定理 2 の証明のアイディア

§1. 記号と主結果

記号. 以下, E と F は互いに同種でない楕円曲線とし, $X = k_m(E \times F)$ とする。 E, F , 及び X は任意に固定する。構成により, X 上には, 次の図に示す24本の非特異有理曲線が, a priori に存在し, 図の様に交わる。ここで, p_i, q_i ($i=1, \dots, 4$) を各 E, F の2分点とするとき, F_i, E_i は各, $p_i \times F, E \times q_i$ ($\subset E \times F$) の像として得られる非特異有理曲線で, C_{ij} は, $E \times F$ の2分点 $p_i \times q_j$ に対応して出てくる非特異有理曲線である。更に, 図中 E, F は楕円曲線で, それぞれ, $E \times (\text{非2分点}), (\text{非2分点}) \times F \subset E \times F$ の像として得られる。



交点数

$$C_{ij} \cdot C_{kl} = -2\delta_{ik}\delta_{jl}, E^2 = F^2 = 0$$

$$E_j \cdot E_l = -2\delta_{jl}, E \cdot F = 2$$

$$F_i \cdot F_k = -2\delta_{ik}, E \cdot E_l = F \cdot F_k = 0$$

$$C_{ij} \cdot E_l = \delta_{jl}, E \cdot F_k = F \cdot E_l = 1$$

$$C_{ij} \cdot F_k = \delta_{ik}, F \cdot C_{ij} = 0$$

(δ_{ij} は Kronecker の δ)

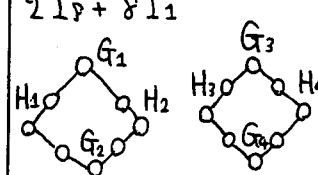
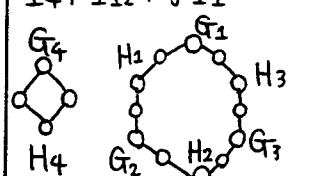
F_i, E_i ($i=1, 2, 3, 4$) を special nodal curve と呼ぶ, $B = \bigcup_{i=1}^4 (E_i \cup F_i)$ とおく。その他の非特異有理曲線 (X 上には無数の非特異有理曲線があることが後にわかる) を ordinary nodal curve と呼ぶ。 $K_{nat} = \bigcup_{i,j=1}^4 E_i \cup F_j \cup C_{ij}$ とおき, X の natural

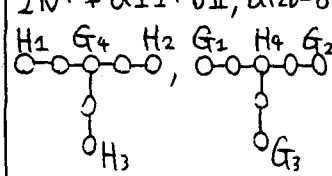
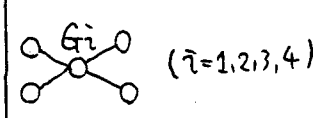
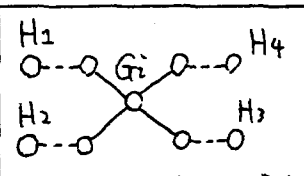
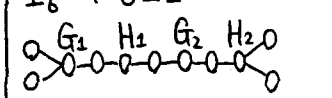
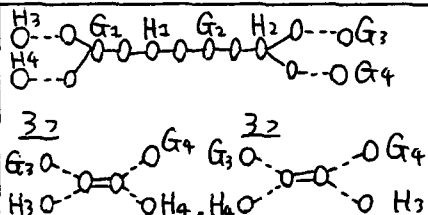
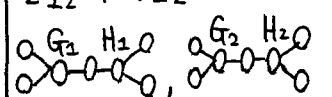
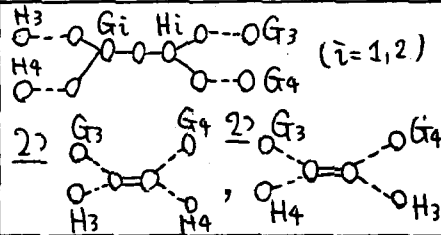
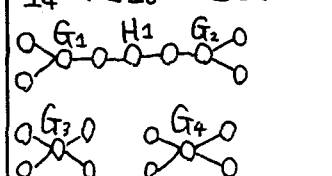
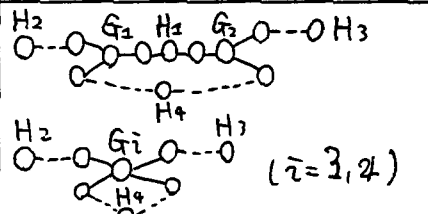
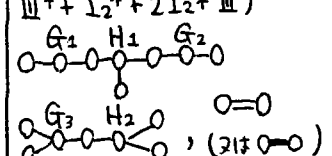
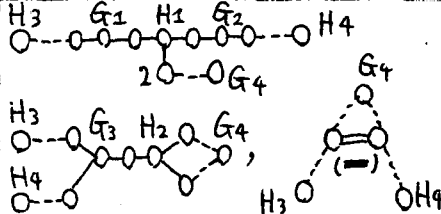
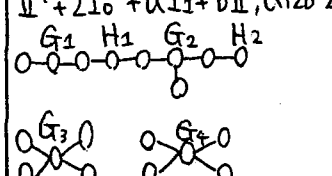
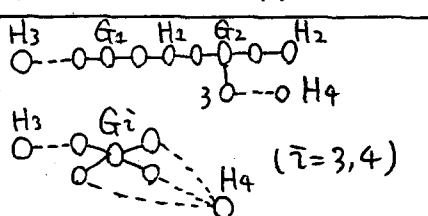
double kummer pencil divisor と呼ぶ。また, X_{nat} と同じ"交わり"を有する 24本の非特異有理曲線の和を, double kummer pencil divisor と呼ぶ。 $\{G_i\}_{i=1,\dots,4}, \{H_i\}_{i=1,\dots,4}$ と $\{F_i\}_{i=1,\dots,4}, \{E_i\}_{i=1,\dots,4}$ を表す。ただし, 表し方は, 例えは, $G_1 = E_3$ ならば, $\{G_i\} = \{E_i\}, \{H_i\} = \{F_i\}$ というようにする。更に, $\{G_i\}, \{H_i\}$ を定めたとき, C^{ij} で G_j, H_i と交わる $\{C_{ij}\}_{i,j=1,\dots,4}$ の元を表す。(例えは, $G_1 = E_3, H_2 = F_4$ ならば, $C^{21} = C_{43}$ である。)

主結果.

定理1. X の Jacobian fibrations の集合 $\mathcal{J}_X$ は, 特異ファイバー達の型により, 次の $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{12}$ の 12 の型に分かれる。更に, 各 $\mathcal{J}_i$ に対して, 切断, Mordell-Weil 群, 切断達と特異ファイバーの交わり方は次の表1の通りとなる。

表1.

型	X 上の特異ファイバー (I型とII型の図は略)	X 上の切断	Mordell-Weil 群	切断達と特異ファイバー達の交わり方
$\mathcal{J}_1$	$2I_8 + 8I_1$ 	infinite	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	略
$\mathcal{J}_2$	$I_4 + I_{12} + 8I_1$ 	infinite	$\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	略

$\mathcal{I}_3$	$2\mathcal{I}_0^* + a\mathcal{I}_1 + b\mathcal{I}_2, a+b=8$ 	infinite	$\mathbb{Z}^4$	田畧
$\mathcal{I}_4$	$4\mathcal{I}_0^*$  $(\bar{i}=1,2,3,4)$	H_1, H_2 H_3, H_4	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	 $(\bar{i}=1,2,3,4)$
$\mathcal{I}_5$	$\mathcal{I}_6^* + 6\mathcal{I}_2$  $O=O (6\text{个})$	G_3, G_4 H_3, H_4	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
$\mathcal{I}_6$	$2\mathcal{I}_2^* + 4\mathcal{I}_2$  $O=O (4\text{个})$	G_3, G_4 H_3, H_4	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
$\mathcal{I}_7$	$\mathcal{I}_4^* + 2\mathcal{I}_0^* + 2\mathcal{I}_1$ 	H_2, H_3 $(H_4 \text{ is } (2\mathbb{Z} - \text{trivial}))$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	 $(\bar{i}=3,4)$
$\mathcal{I}_8$	$\mathcal{I}_4^* + \mathcal{I}_2^* + 3\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_1 (2\text{个}, \mathcal{I}_4^* + \mathcal{I}_2^* + 2\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_1)$  $O=O (2\text{个}, (2\text{个} O=O))$	H_3, H_4 $(G_4 \text{ is } (2\mathbb{Z} - \text{trivial}))$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	
$\mathcal{I}_9$	$\mathcal{I}_2^* + 2\mathcal{I}_0^* + a\mathcal{I}_1 + b\mathcal{I}_2, a+b=2$ 	H_3 $(H_4 \text{ is } (3\mathbb{Z} - \text{trivial}))$	{id.}	 $(\bar{i}=3,4)$

J_{10}	$I_8^* + I_6^* + aI_1 + bII, a+2b=4$ 	H_3 (H_4 は 3重切断)	$\{id.\}$	
J_{11}	$2I_4^* + aI_1 + bII, a+2b=4$ 	H_3 (H_4 は 3重切断)	$\{id.\}$	

ここで、例えは、 $2I_8 + 8I_1$ は、 I_8 型特異ファイバーが 2 個、 I_1 型特異ファイバーが 8 個あることを表す。(【】も参照) また、 G_i, H_i, O は、それぞれ、非特異有理曲線 G_i, H_i 及び

ordinary nodal curve を表す。また、表中、例えは、

は、切断 H_3, H_4 はそれぞれ、 I_2^* 型特

異ファイバーと D_1, D_2 の非特異有理曲線で交わり、2重切断 G_4 は、 D_3, D_4 の非特異有理曲線で交わることを示している。□

定理 2 を述べるために、 X を次の 4 つの型に分けておく。

ここで、 $E_3 := \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in$ 上半平面 $/SL_2(\mathbb{Z})$ である。

(i) $K_m(E\sqrt{-1} \times E\omega)$

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $K_m(E\sqrt{-1} \times E\rho_2)$

$$\rho_2 \neq \omega$$

(ii) $K_m(E\rho_1 \times E\omega)$

$$\rho_1 \neq \sqrt{-1}$$

(iv) $K_m(E\rho_3 \times E\rho_4)$

$$\rho_3, \rho_4 \notin \{\sqrt{-1}, \omega\}$$

定理2. $\#(\mathcal{I}_m/\text{Aut}(X))$ ($m=1, \dots, 11$) は次の通りとなる。

型	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$	$\mathcal{I}_4$	$\mathcal{I}_5$	$\mathcal{I}_6$	$\mathcal{I}_7$	$\mathcal{I}_8$	$\mathcal{I}_9$	$\mathcal{I}_{10}$	$\mathcal{I}_{11}$	計
(i)	2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	16
(ii)	3	2	1	2	3	3	2	2	1	2	3	23
(iii)	6	3	1	2	6	6	3	3	1	3	6	38
(iv)	9	6	1	2	9	9	6	6	1	6	9	59

更に, $\#(\mathcal{I}_m/\text{Aut}_N(X)) = (\text{iv})$ の $\#(\mathcal{I}_m/\text{Aut}(X))$ となる。 $\square$

注意.

- (1) 定理1の表中の a, b の値は調べていない。
- (2) 定理2では, よりくわしく $\mathcal{I}_m/\text{Aut}(X)$ の完全代表系も記述できている。([10] を参照)
- (3) 定理1より, X 上には無数の非特異有理曲線, Jacobian fibrations があることがわかる。(実際, $\mathcal{I}_1$ の元の Mordell-Weil 群が無数であることから, 非特異有理曲線(特に, $\mathcal{I}_1$ の元の切断になっているもの)が無数にある。これらの切断を用いて, I_2^* 型特異ファイバーをもつ Jacobian fibrations が無数にできることもわかる。)
- (4) X には切断を有しない elliptic fibration もある。(§3 参照)
- (5) Picard 数が19以上の時には, 定理1にはあてはまらない

Jacobian fibrations もある。

例1. 特異K3曲面 (即ち Picard 数 20 の K3 曲面) Y

($K_m(E \times F)$ では, E と F が同種でしかも虚数乗法をもつ場合)

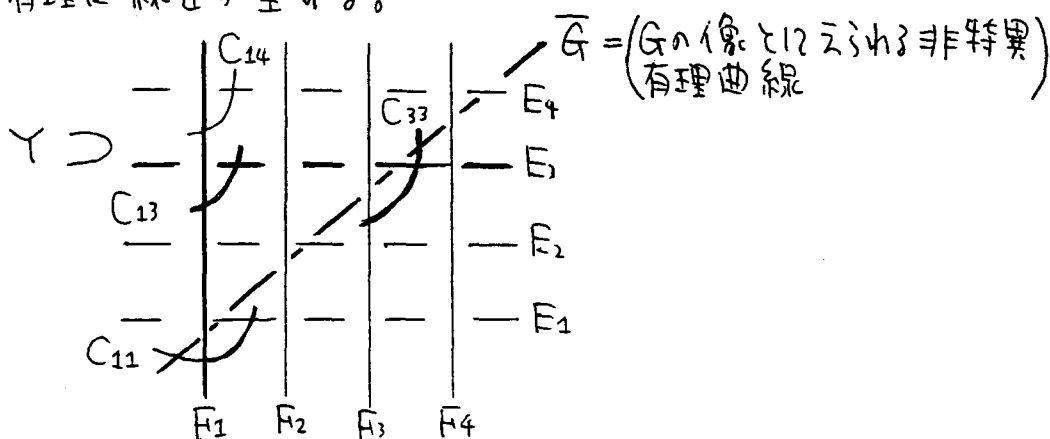
特異ファイバーに, II^* 型を 2 つ含む Jacobian fibration が必ずある。

(格子の理論により, $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}) \oplus E_8 \oplus E_8 \hookrightarrow NS(Y)$ なる原始埋入の存在がわかる。このより従う。幾何的な証明は, [6] 参照)

例2. $Y = K_m(A \times A)$ (A は楕円曲線) (このとき, Y の

Picard 数は 19 または 20)

$A \cong G = \Delta \subset A \times A$ とする。このとき, Y 上には次の非特異有理曲線達が生ずる。



このとき, $H = C_{11} + F_1 + C_{13} + E_3 + C_{33} + G$ で定まる Y 上の因子は, I_6 型特異ファイバーと同じ型で, $H \cdot C_{14} = 1$ だから, $|H|$ は Jacobian fibration となる。(定理 1 の表中には I_6 型特異ファイバーはあらわしてない。)

□

§2. 補題

この節では、定理 1, 2 を証明するのに必要な補題を 4 つ準備する。すなわち、 $X = K_m(E \times F)$, $\rho = 18$ に特有の補題である。

補題 1. (1) 任意の $f \in \text{Aut}(X)$ に対して、 $f(B) = B$ が成り立つ。ここで $B = \bigcup_{i=1}^4 (E_i \cup F_i)$ 。
 (2) X の非特異有理曲線達は、次の様になる。

	$E_j (j=1,2,3,4)$	$F_i (i=1,2,3,4)$	その他
$E_j (j=1,2,3,4)$	$E_j \cdot E_l = -2\delta_{jl}$	$E_j \cdot F_i = 0$	各 D に $\bar{x}+12 \exists 1 j$ s.t. $D \cdot E_j = 1, D \cdot E_l = 0 (l \neq j)$
$F_i (i=1,2,3,4)$		$F_i \cdot F_k = -2\delta_{ik}$	各 D に $\bar{x}+12 \exists 1 i$ s.t. $D \cdot F_i = 1, D \cdot F_k = 0 (k \neq i)$
その他 $D, D', \dots$			$D \cdot D' \equiv 0 \pmod{2}$

□

以下の補題をのべるために少し準備をしておく。

γ を $K3$ 曲面又は Abel 曲面とし、 ω_γ を γ の至るところ 0 でない正則 2 形式とする。このとき、 $\text{Aut}(\gamma)$ の一次表現 α が $\text{Aut}(\gamma) \ni f \mapsto \alpha(f) \in \mathbb{C}^\times$, ここで $f^* \omega_\gamma = \alpha(f) \omega_\gamma$ で定まる。 $\Gamma = \text{Im } \alpha$ とおくと次の完全列ができる。

$$1 \rightarrow \text{Aut}_N(\gamma) \rightarrow \text{Aut}(\gamma) \rightarrow \Gamma \rightarrow 1.$$

補題2. $\text{Aut}_N(X)$ は $\{X$ 上の double Kummer pencil divisors $\}$ 上, 推移的に作用する。 $\square$

補題3. 次の半直積分解がある。 $\text{Aut}(X) = \text{Aut}_N(X) \rtimes \langle \bar{\gamma} \rangle$,
ここで, $\bar{\gamma}$ は, 次の $\text{Aut}(E \times F)$ の元 γ から導かれる $\text{Aut}(X)$ の元である。(i), ..., (iv) については §1 参照)

$E \times F$	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
γ	$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\square$

補題4. $D_R (R=1, \dots, \ell)$ を X 上の ℓ 個の ordinary nodal curves とし, $D = D_1 + \dots + D_\ell$, $d = c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in NS(X)$ とおく。もし, $D \cdot E_i \equiv D \cdot F_i \equiv 0 \pmod{2}$ がすべての $i=1, 2, 3, 4$ に對して成立するならば, 任意の $f \in \text{Aut}_N(X)$ に對して, $f_*(d) + d \in 2NS(X)$ となる。 $\square$

以下, 補題の証明をする。

補題1の証明. (1) θ を $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aut}(E \times F)$ から導かれる X の involution とする。 $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ は E, F, B 及び C の類で生成されることから, $\theta_*|_{NS(X)} = \text{id}$, $\theta_*|_{T_X} = -\text{id}$ --- ① となる。従って, 任意の $f \in \text{Aut}(X)$ は, $H^2(X, \mathbb{Z})$ ($NS(X) \oplus T_X$ が有限指数で入っている) 上 θ と可換になる。よって, $K3$ 曲面の Torelli

の定理により, X 上 $f\theta = \theta f$ となる。他方, θ の固定点集合 X^θ は $X^\theta = B \cdots \textcircled{2}$ となることはすぐわかる。故に, $f(B) = B$ となる。次に(2)を示す。第3段目のみ示せばよい。 D を X 上の ordinary nodal curve とする。①, ② と $h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1$ より, θ は D 上 involution で作用する。従って, 第3段目 $D \cdot D' \equiv 0 \pmod{2}$ を示すには, $\text{mult}_P(D, D') \equiv 0 \pmod{2}$ が $P \in D \cap D' \cap X^\theta$ に對し 2 成立することをいえば十分である。これは, P での blowing up をくり返して, その上での θ の作用をみると出る。最後に第1, 2段を示す。 $D^\theta = \{2 \text{ 点} \}$ より, $D \cdot X^\theta = 2$ が出る。(交わり方が, 横断的であることは, θ の接空間への作用をみるとわかる。) 故に, ②より, 次の4つが起らないことを言えはよい。(1) $D \cdot E_j = 2$ (2) $D \cdot E_j = D \cdot E_k = 1 (j \neq k)$.

$$(3) D \cdot F_i = 2 \quad (4) D \cdot F_i = D \cdot F_k = 1 (i \neq k)$$

例えば(2)が起きたとすると。簡単のため $j=1, k=2$ とする。

D を $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ 内で, $D = \sum a_{ij} C_{ij} + aE + bF$ と書く。

(2)より, D と $E_i, F_i (i=1, \dots, 4)$ の交点数を計算して,

$$\sum_{i=1}^4 a_{i1} + b = 1, \quad \sum_{i=1}^4 a_{i2} + b = 1, \quad \sum_{i=1}^4 a_{ij} + b = 0 (j=3, 4) \cdots \textcircled{3}$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} + a = 0 (i=1, 2, 3, 4) \cdots \textcircled{4} \text{ が出る。}$$

$$\textcircled{3} \text{ の総和} - \textcircled{4} \text{ の総和を作ると, } b - a = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{5} \text{ となる。}$$

他方, $D \cdot C_{ij} = -2a_{ij}$ は, 3段目の結果より偶数だから, a_{ij}

はすべて整数となる。従って, ③, ④より a, b も整数になる。
 これは⑤に矛盾する。よって (2) は起こらない。他の場合も同様に
 して起こらないことがわかる。 $\square$

補題2の証明. K' を double kummer pencil divisor とする。補題
 1より, $K' = B \cup \bigcup_{i,j=1}^4 C_{ij}$ という形になる。(0.3)(2)により,
 $\sum_{i,j=1}^4 C_{ij}$ で分岐する X の2重被覆の極小モデルを A とすると,
 $\pi_A, \pi_{E \times F}$ により, Hodge isometry $\varphi: T_A \xrightarrow{\sim} T_{E \times F}$ ができ
 ます。ともに rank 4 の不定値 unimodular 格子である。格子の
 理論より, φ は, Hodge isometry $\bar{\varphi}: H^2(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(E \times F, \mathbb{Z})$
 に拡張される。故に, (0.1)(1) と $\text{Pic}^0(E \times F) \cong E \times F$ により,
 $A \cong E \times F$ を得る。この同型を与え, かつ原点を保つ写像を
 F とすれば, 補題1と合わせて, F は X の自己同型 f で,
 $f(K') = K_{\text{nat}}$ となるものを導く。補題3は, $g \in \text{Aut}(X)$
 に対し, $g^* \omega_X = \alpha \omega_X$ とおくと, 今度は, (0.1)(2)を用いて,
 $g^* \omega_{E \times F} = \alpha \omega_{E \times F}$ となる $h \in \text{Aut}(E \times F)$ の存在がわかる。
 このことから, 補題3は容易にでる。補題2で作った f は,
 $\bar{\omega}$ の巾乗 (K_{nat} を保っている) で適当に調節すれば, N -自己
 同型にできる。 $\square$

補題4の証明. $f \in \text{Aut}_N(X)$ より, $f_*|_{T_x^*}/T_x = \text{id}$. (ここで, T_x^*

$= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_X, \mathbb{Z})$ となる。これより、簡単な格子の考察により、
 $f_* |_{NS(X)^* / NS(X)} = \text{id.}$ が得る。ところで、仮定と補題1よ
 り、 $D \cdot (X \text{ 上の非特異有理曲線})$ はいつも偶数。また、Jacobian
 fibration $\pi: E \rightarrow C$ を考えると、(0,4) (1)より、 $NS(X)$ は非特異有理
 曲線の類で生成されることがわかる。これより、 $d/2$ は $NS(X)^*$
 の元となる。よって、 $f_*(d/2) - d/2 \in NS(X)$ となる。補題4はこれ
 より従う。 $\square$

注意 補題1~4 は、 $p \geq 19$ では必ずしも成り立たない。

補題1, 4の反例 §1 注意(5)の例2が反例を与えることが、
 $\bar{G}$ に着目するとわかる。

補題2の反例 $A = E\sqrt{5}$ とし、 $A \times A \times A \supset S (\cong A \times A) = \{(x, y, y)\}$
 とおく。 $C = \text{Im}(A \rightarrow A \times A \times A, x \mapsto (3x, (1+\sqrt{5})x, (1+\sqrt{5})x))$,
 $D = \text{Im}\{A \rightarrow A \times A \times A, x \mapsto ((1-\sqrt{5})x, 3x, 3x)\}$ とおくと、
 $C \not\subset A$ かつ $S = A \times A = C \times D$ となることがわかる。これよ
 り、 $\text{km} S$ 内の2つの double kummer pencil divisors $K_{A \times A}$ と
 $K_{C \times D}$ (それぞれ、 $\text{km}(A \times A)$, $\text{km}(C \times D)$ と思えたときの natural double
 kummer pencil divisor) は、 $\text{Aut}(\text{km} S)$ でうつり合えないことが
 わかる。([8] を参照) $\square$

§3. 定理1の証明のアイデア

まず、次に注意する。

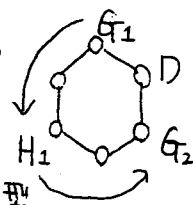
1°) $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を Jacobian fibration とする。このとき、 π の fiber の少くとも1つは reducible になる。

証明) もし π の fiber がすべて irreducible であれば、 $E_i, F_i (i=1, \dots, 4)$ はすべて multi-sections となる。すると、補題1(1)より容易に Mordell-Weil 群 $M_\pi(X)$ は有限群になる。他方、(0.4)(2) によれば、
 $18 = \text{rank } NS(X) = 2 + \text{rk } M_\pi(X) + \sum (m_i - 1)$ より、 $\text{rk } M_\pi(X) = 16$ となる。これは矛盾である。 $\square$

2°) そこで以下、reducible fiber (非特異有理曲線からなる) に目をつけて、 X の Jacobian fibration の特異ファイバー全体を分類する。

その調べ方の idea を例で示す。

注意(5)の例2のものがないこと: 補題1(2)より、もし I_6 型特異ファイバーがあれば、図の様にならざるをえない。
 すると、 D の非特異有理曲線は、補題1(2)をみたさず、矛盾する。これより、 I_* 型は、すべて、 $I_{4b} (b=1, 2, \dots)$ 型でなければならぬ。 $\square$

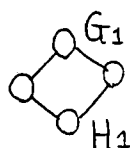


例3. I_{16} 型の特異ファイバーがないこと: もしも、 I_{16} 型特異ファイバー $\odot$ があれば、上と同様の議論で、 $\odot$ が B となる。すると、補題1(2)より、 $\pi \odot$ は section を有しないことになる。(I_{16} 型特異

ファイバーをもつ X の elliptic fibration (section なし) は実在することか。
容易にわかる。) $\square$

例4. 最後に, I_4 型特異ファイバーをもつ X の Jacobian fibration は $\underbrace{g_2}_{\varphi}$ の型になることを示そう。

実際, $\textcircled{1}_1$ を I_4 型特異ファイバーとすると, 補題1 (2) より, 次の形になる。



すると, 補題1 (2) より, $\textcircled{1}_1 \cdot G_i = \textcircled{1}_1 \cdot H_i = 0$ ($i=2,3,4$) だから,

G_i, H_i ($i=2,3,4$) は別の特異ファイバー (達) に入る。特に, φ

の切断は, ordinary nodal curve となる。その1つを C とする。補題1

(2) より, $C \cdot H_2 = 1$, $C \cdot G_2 = 1$, H_2, G_2 以外の任意の非特異有理曲
線に $\textcircled{D}$ 対し, $C \cdot D \equiv 0 \pmod{2}$ となる。これより, $\textcircled{1}_1$ 以外の φ の re-

ducible fiber はただ1つとなる。これを $\textcircled{1}_2$ とすると, 楕円曲面の

特異ファイバーの分類と補題1 (2) より, 容易に $\textcircled{1}_2$ は I_{12} 型とわかる。

残りの特異ファイバーは, I_1 型 (α) と II 型 (β) (しかないが, その

個数を a, b とすると, $24 = \chi_{\text{top}}(X) = \sum \chi(\text{特異ファイバー})$

により, $a + 2b = 8$ がわかる。また, (0.4)(2) により, $\text{rk } M_{\varphi}(X) = 2$

もわかる。(更に, $M_{\varphi}(X)$ のねじれ部分群を調べると,

$M_{\varphi}(X) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $a=8, b=0$ がわかる。§4 でみる。) こう

して, I_4 型特異ファイバーをもつ X の Jacobian fibration は, g_2 の型に

なることがわかる。 $\square$

このように, 補題1 (2) を用いて, $\textcircled{1}_1$ と $\textcircled{1}_2$ とした考察を行うと,

定理1 は証明できる。([10] 参照) $\square$

$\{i, j, k\} = \{i', j', k'\} = \{2, 3, 4\}$ となるのは: $i = i', j = j', k = k'$ となる。

第1段の証明 以下, $D^{ij} (R^{ij})$ は H_i, G_j と交わる ordinary nodal

curve とする。 $\varphi = \sum (\Theta) \in \mathcal{G}_2$ とする。 ①

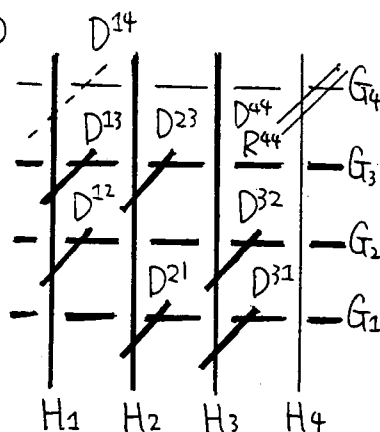
$$\Theta = G_1 + D^{21} + H_2 + D^{23} + G_3 + D^{13} \\ + H_1 + D^{12} + G_2 + D^{32} + H_3 + D^{31}$$

と (25) 11。

また, φ の切断の 1 つを D^{14} と (12) 8 11。

更に, φ の I_4 型の特異ファイバーは。

$$\Theta' = H_4 + G_4 + D^{44} + R^{44} \text{ と書ける。}$$



D^{**} を含む double kummer pencil divisor を作りたい。

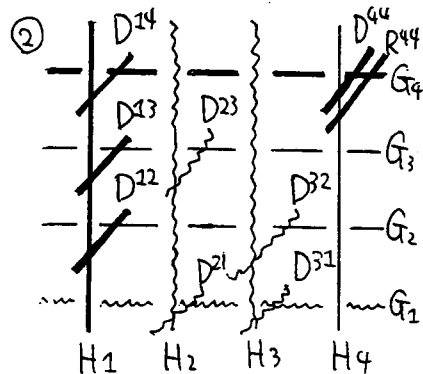
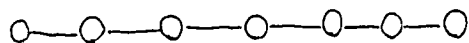
$$L := D^{12} + D^{13} + 2(H_1 + D^{14} + G_4) + D^{44} + R^{44}$$

とし, Θ に L を作ると, G_2, G_3 は切断で,

H_4 は 2重切断となるので, 定理 1 の分類

より, $\Theta \in \mathcal{G}_8$ となる。

$$\text{因子 } D = D^{23} + H_2 + D^{21} + G_1 + D^{31} + H_3 + D^{32}$$



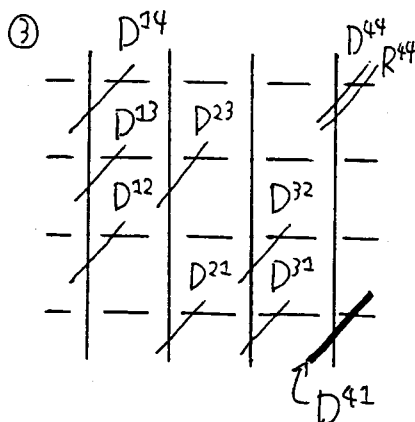
を考えると, 各成分は L と交わらない

ので, 別の特異ファイバーに入るが, 表より

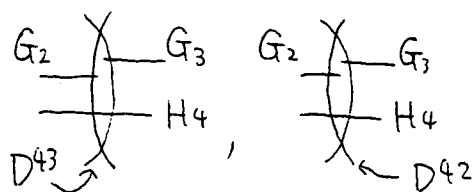
それは III^* 型しかありえない。

従って, ③ 図の D^{41} なる 非特異有理曲線

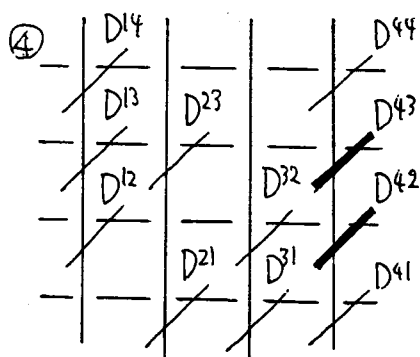
が存在し, すでに出ている D^{**}, R^{44} と交わらない。



他示, 定理1より, 重11には, 更に I_2 型特異ファイバー (χ) が2つあり, 次の様になっている。

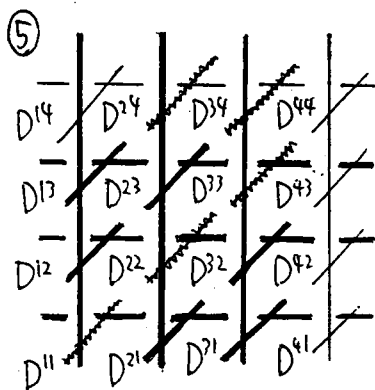


従って, 更に ④ の様に, D^{43}, D^{42} なる 非特異有理曲線が存在し, すでに出ている D^{**} とは交わらない。 (D^{43}) と D^{42} も交わらない。



そこで, $\pi(2H_4 + D^{41} + D^{42} + D^{43} + D^{44}) \in \mathcal{L}_4$ を考えると, 図⑤の様に,

$D^{11}, D^{22}, D^{24}, D^{33}, D^{34}$ なる 非特異有理曲線が存在することがわかり $D^{ij} (i, j=1, \dots, 4)$ は互いに交わらない。そこで $K_D = B \cup \bigcup_{i,j=1}^4 D^{ij}$ とおく。



K_D は double kummer pencil divisor となる。しかも ④ $\subset K_D$ となる。

系補題2により, $f(K_D) = K_{nat}$ となる $f \in \text{Aut}_N(X)$ が存在する。必要ならば, $E \times F$ の2点の平行移動から導かれる X の N -自己同型を合成して, f は, $\{f(H_4), f(G_4)\} = \{E_1, F_1\}$ となるようにできる。この f により第1段は満たされる。□

第2段の証明 明らかに $g(\oplus i'k') = \oplus ijk$ となる。こゝと補題1(1)により、次の等式をえる。

$$g_*(C'_{i'3} + C'_{j'3} + C'_{j'4} + C'_{k'4} + C'_{k'2} + C'_{i'2}) = C_{i3} + C_{j3} + C_{j4} + C_{k4} + C_{k2} + C_{i2} \quad \dots \textcircled{1}$$

ところで、 $C = C_{i3} + C_{j3} + C_{j4} + C_{k4} + C_{k2} + C_{i2}$ は、補題4の仮定を満たすので、 $\textcircled{1}$ と合わせて、次の $\textcircled{2}$ をえる。

$$C'_{i'3} + C'_{j'3} + C'_{j'4} + C'_{k'4} + C'_{k'2} + C'_{i'2} \equiv 0 \pmod{2 \cdot NS(X)} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$+ C_{i3} + C_{j3} + C_{j4} + C_{k4} + C_{k2} + C_{i2}$$

$$\begin{aligned} \text{ところで、} \{i', j'\} &= \{p, q\}, \{j', k'\} = \{s, t\}, \{k', i'\} = \{v, w\} \\ \{i, j\} &= \{p, r\}, \{j, k\} = \{s, u\}, \{k, i\} = \{v, z\} \end{aligned}$$

よおけるので $\textcircled{2}$ より、次の $\textcircled{3}$ をえる。

$$C_{q3} + C_{r3} + C_{t4} + C_{u4} + C_{w2} + C_{z2} \equiv 0 \pmod{2 \cdot NS(X) = 2 \cdot Pic(X)} \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ と(0.3)(1)より容易に、 $q=r, t=u, w=z$ が出る。

故に、 $k'=k, i'=i, j'=j$ となる。 $\square$

注意 補題の証明には、§3§4の中、保留にしてあった事実

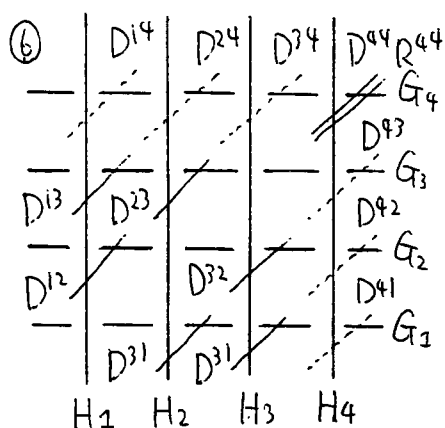
$a=8, b=0$ と $M_\varphi(X) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は全然用いていない。

そこで、最後に、補題を用いて、 $a=8, b=0$ と $M_\varphi(X)$ のねじれ群が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ になることを証明する。

証明 補題により、 g_2 の元は、 $\varphi = \oplus |\oplus|$ として、

$$\oplus = H_1 + D^{12} + G_2 + D^{32} + H^3 + D^{31} + G_1 + D^{21} + H_2 + D^{23} + G_3 + D^{13}$$

(下図⑥を参照) と書け, I_4 型特異ファイバーは, $\mathbb{C}_1 = H_4 + D^{44} + R^{44} + G_4$, 更に, $D^{14}, D^{24}, D^{34}, D^{41}, D^{42}, D^{43}$ なる互いに交わらない切断が存在する。



また, $f_i \in M_4(X)$ ($i=2,3,4$) を $f_i(D^{i4}) = D^{4i}$ で定める。

すると, 例12は, D^{i4} を D -切断にとることにより, (0.5) の双-二次形式を計算すると, $\langle f_i, f_i \rangle = 0$

($i=2,3,4$) がわかる。したがって, (0.5) により, f_i ($i=2,3,4$) はすべて

ねじれ元となる。したがって, φ は II 型の特異ファイバーをもたないので, $a+2b=8$ だったことから, I_{12}, I_4 以外の特異ファイバーは, I_1 型 (α) 8個, つまり $a=8, b=0$ となる。

$M_4(X)$ のねじれ元は, I_1 型ファイバーの特異点を固定するので, X 上に 8 個の固定点をもつ。故に, (0.7) により, その位数はすべて 2 となる。 $M_4(X)$ のねじれ部分群は $\mathbb{C}^\times$ への単射があるから巡回群でなければならぬ。よって, $M_4(X)$ のねじれ部分群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。特に $f_2 = f_3 = f_4$ である。 $\square$

この証明より, X 上に⑥図の様な configuration があれば, 次にみた位数 2 の $\text{Aut}_N(X)$ の元があることもわかった。

$$f(H_i) = G_i, f(G_i) = H_i, f(D^{ij}) = D^{ji} \quad (i \neq j)$$

この自己同型は, $\mathcal{I}_m/\text{Aut}_N(X)$ の完全代表系を決める時にも用い

543. ([10] を参照)

参考文献.

- [1] Nikulin, V. On Kummer surfaces. Math. USSR-Izv. 9. 261-275
(1975)
- [2] " Finite groups of automorphisms of Kählerian surfaces
of type $K3$. Trans. Moscow. Math. Soc. 38 71-135
(1980)
- [3] " Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic
forms with respect to subgroups generated by 2-reflections, algebro-
-geometric applications J. Soviet Math. 22, 1401-1475 (1983)
- [4] Shioda, T. On elliptic modular surfaces. J. Math. Soc. Japan
24. 20-59 (1972)
- [5] Shioda, T. The period map of abelian surfaces. J. Fac. Soc.
Univ. of Tokyo, 25. 47-59 (1978)
- [6] Shioda, T & Inose, H. On singular $K3$ surfaces. Complex analysis
and algebraic geometry Iwanami shoten, 119-136 (1977)
- [7] Cox, D. & Zucker, S. Intersection numbers of sections of elliptic
surfaces. Inv. Math. 53. 1-44 (1979)
- [8] Hayashida, T. & Nishi, M. Existence of curves of genus two on a
product of two elliptic curves. J. Math. Soc. Japan 17, 1-16 (1965)
- [9] Kodaira, K. On compact analytic surfaces II Ann. of Math. 77
563-626 (1963)

[10] Ogus, K. On Jacobian fibrations of $K3(E \times F)$ whose Picard number is 18. (preprint.)

[11] Pjateckii-Sapiro, I.I. & Safarevic, I.R. A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $K3$. Math. USSR-Izv. 5, 547-587 (1971)

[12] 向井茂 $K3$ 曲面の自己同型群について「多様体の特異点の最近の成果」数研講究録 (日本語)