

2次元平面上の重み付き準算術平均と効用関数

北九州市立大学 経済学部 吉田祐治

Yuji Yoshida

Faculty of Economics and Business Administration,
University of Kitakyushu

1. はじめに

Yoshida [5] は2次元平面上の重み付き準算術平均を導入している. このでは, 2次元平面上の重み付き準算術平均の観点から2つの効用関数について risk averse/risk neutral/risk loving 満たすべき条件を議論する.

2. 2次元平面上の重み付き準算術平均

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ とし, 定義域 D を $\mathbb{R}^2$ の空でない開部分集合とし, $\mathcal{R}(D)$ を D の閉凸部分集合の族とする. $\mathcal{L}$ は C^2 級関数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ の族で $f_x > 0$ と $f_y > 0$ を満たすとし, $\mathcal{W}$ は連続関数 $w: D \rightarrow (0, \infty)$ の族とする. 開部分領域 $R \in \mathcal{R}(D)$ 上で, $f \in \mathcal{L}$ を効用関数とし $w \in \mathcal{W}$ を重みとする準算術平均を領域 R の部分集合 $M_w^f(R)$ で与える:

$$M_w^f(R) = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in R \mid f(\tilde{x}, \tilde{y}) \int \int_R w(x, y) dx dy = \int \int_R f(x, y) w(x, y) dx dy \right\}.$$

明らかに, $M_w^f(R) \neq \emptyset$ である.

定義 1. ($\mathbb{R}^2$ 上の半順序 $\preceq$).

- (i) $(\underline{x}, \underline{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ について, $(\underline{x}, \underline{y}) \preceq (\bar{x}, \bar{y}) \iff \underline{x} \leq \bar{x} \text{ かつ } \underline{y} \leq \bar{y}$.
- (ii) $(\underline{x}, \underline{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ について, $(\underline{x}, \underline{y}) \prec (\bar{x}, \bar{y}) \iff (\underline{x}, \underline{y}) \preceq (\bar{x}, \bar{y}) \text{ かつ } (\underline{x}, \underline{y}) \neq (\bar{x}, \bar{y})$.
- (iii) $A, B \subset \mathbb{R}^2$ について, $A \preceq B \iff$ (a) かつ (b):
 - (a) $(\underline{x}, \underline{y}) \in A$ について, $\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in B : (\underline{x}, \underline{y}) \preceq (\bar{x}, \bar{y})$.
 - (b) $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$ について, $\exists (\underline{x}, \underline{y}) \in A : (\underline{x}, \underline{y}) \preceq (\bar{x}, \bar{y})$.

$w \in \mathcal{W}$ を重み関数とする開部分領域 $R \in \mathcal{R}(D)$ 上の点 $(\bar{x}_R, \bar{y}_R)$ を次のように与える:

$$\bar{x}_R = \frac{\int \int_R x w(x, y) dx dy}{\int \int_R w(x, y) dx dy},$$

$$\bar{y}_R = \frac{\int \int_R y w(x, y) dx dy}{\int \int_R w(x, y) dx dy}.$$

ここでは, $(\bar{x}_R, \bar{y}_R)$ を不変リスク中立点という ([5]). 2次元平面 $\mathbb{R}^2$ を次のように分割する.

$$R_{w,-}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \prec (\bar{x}_R, \bar{y}_R)\},$$

$$R_{w,+}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\bar{x}_R, \bar{y}_R) \prec (x, y)\}.$$

$R_{w,-}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)}$ は risk averse 点であり, $R_{w,+}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)}$ は risk loving 点である. さらに, $R_w^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} = R_{w,-}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} \cup R_{w,+}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} \cup \{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)\}$ とおく.

定義 2. 効用関数 $f \in \mathcal{L}$ と領域 $R \in \mathcal{R}(D)$ について, 次のように定義する.

(i) 効用関数 f が R 上で risk neutral であるとは, すべての重み関数 w について

$$f(\bar{x}_R, \bar{y}_R) \iint_R w(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) w(x, y) dx dy.$$

(ii) 効用関数 f が R 上で risk averse であるとは, すべての重み関数 w について

$$f(\bar{x}_R, \bar{y}_R) \iint_R w(x, y) dx dy \geq \iint_R f(x, y) w(x, y) dx dy.$$

(iii) 効用関数 f が R 上で risk loving であるとは, すべての重み関数 w について

$$f(\bar{x}_R, \bar{y}_R) \iint_R w(x, y) dx dy \leq \iint_R f(x, y) w(x, y) dx dy.$$

定義 3. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について, f が g よりも risk averse とは, すべての重み関数 w とすべての凸閉領域 $R \in \mathcal{R}(D)$ について 次の式が成り立つときとする.

$$M_w^f(R) \cap R_w^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} \preceq M_w^g(R) \cap R_w^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)}.$$

定理 1. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について, f が g よりも risk averse ならば すべての正の数 h, k と実数 $r \in [-1, 1]$ について D 上で

$$\frac{h^2 f_{xx} + 2rhkf_{xy} + k^2 f_{yy}}{hf_x + kf_y} \leq \frac{h^2 g_{xx} + 2rhkg_{xy} + k^2 g_{yy}}{hg_x + kg_y}$$

が成り立つ.

系 1. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について, f が g よりも risk averse ならば すべての正の数 h, k と実数 $r \in [-1, 1]$ について D 上で

$$\frac{f_{xx}}{f_x} \leq \frac{g_{xx}}{g_x} \quad \text{かつ} \quad \frac{f_{yy}}{f_y} \leq \frac{g_{yy}}{g_y}$$

が成り立つ.

3. 十分条件

効用関数 $f \in \mathcal{L}$ について、ヘッセ行列を

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in D \quad (3.1)$$

とおく.

命題 1. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について、(i) と (ii) が成り立つ.

(i) 行列

$$\frac{1}{f_x(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_x(x, y)} H^g(x, y) \text{ と } \frac{1}{f_y(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_y(x, y)} H^g(x, y)$$

がすべての $(x, y) \in D$ について negative semi-definite である $\iff$ すべての $(x, y) \in D$ とすべての正の数 h, k について

$$\frac{1}{hf_x(x, y) + kf_y(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{hg_x(x, y) + kg_y(x, y)} H^g(x, y)$$

が negative semi-definite である.

(ii) 行列

$$\frac{1}{f_x(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_x(x, y)} H^g(x, y) \text{ と } \frac{1}{f_y(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_y(x, y)} H^g(x, y)$$

がすべての $(x, y) \in D$ について negative semi-definite ならば、すべての正の数 h, k と実数 $r \in [-1, 1]$ について D 上で

$$\frac{h^2 f_{xx} + 2rhkf_{xy} + k^2 f_{yy}}{hf_x + kf_y} \leq \frac{h^2 g_{xx} + 2rhkg_{xy} + k^2 g_{yy}}{hg_x + kg_y}$$

が成り立つ.

定理 2. $f, g \in \mathcal{L}$ を D 上の 2 次の効用関数とする. 行列

$$\frac{1}{f_x(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_x(x, y)} H^g(x, y) \text{ と } \frac{1}{f_y(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_y(x, y)} H^g(x, y)$$

がすべての $(x, y) \in D$ について negative semi-definite ならば、 f が g よりも risk averse である.

例 1. (2 次の効用関数) 定義域 $D = (-0.5, 1.5)^2$ の領域 $R = [0, 1]^2$ で重みを $w = 1$ とすると、不変リスク中立点は $(\bar{x}_R, \bar{y}_R) = (0.5, 0.5)$ であり、 $R_{w,-}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} = [0, 0.5]^2 \setminus \{(0.5, 0.5)\}$ 、 $R_{w,+}^{(\bar{x}_R, \bar{y}_R)} = [0.5, 1]^2 \setminus \{(0.5, 0.5)\}$. 2 次の効用関数 $f(x, y) = -2x^2 - 2y^2 + 2xy + 8x + 8y$ と

$g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy + 5x + 5y$ について、 R 上で $f_x > 0$, $f_y > 0$, $g_x > 0$, $g_y > 0$ であることがわかる。また、行列

$$\frac{1}{f_x(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_x(x, y)} H^g(x, y) = \frac{1}{-4x + 2y + 8} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{-2x + y + 5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{f_y(x, y)} H^f(x, y) - \frac{1}{g_y(x, y)} H^g(x, y) = \frac{1}{2x - 4y + 8} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{x - 2y + 5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

はすべての $(x, y) \in D$ について negative definite であるから、定理 2 より f が g よりも risk averse である。

References

- [1] K.J.Arrow, *Essays in the Theory of Risk-Bearing* (Markham, Chicago, 1971).
- [2] G.Gollier, *The Economics of Risk and Time* (MIT Publishers, 2001).
- [3] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means and conditional expectations, in: V.Torra, Y.Narukawa and M.Daumas, eds., *Modeling Decisions for Artificial Intelligence - MDAI 2010* Lecture Notes in Artificial Intelligence 6408 (Springer, Oct., 2010), 31-42.
- [4] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means and a risk index for stochastic environments, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems (IJUFKS)*, **16**, suppl. (2011) 1-16.
- [5] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means on two-dimensional regions and their applications, in: V.Torra and Y.Narukawa, eds., *Modeling Decisions for Artificial Intelligence - MDAI 2015* Lecture Notes in Artificial Intelligence 9321 (Springer, Sept., 2015), 42-53.
- [6] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means on two-dimensional regions: An independent case, in: V.Torra and Y.Narukawa, eds., *Modeling Decisions for Artificial Intelligence - MDAI 2016* Lecture Notes in Artificial Intelligence 9880 (Springer, Sept., 2016), 82-93.