

項目反応理論を用いたプロ野球選手の評価について

時光順平 (東海大学・理学・院)

鳥越規央 (東海大学・理学部)

1. はじめに

プロ野球の投手を評価する際に良く用いられる指標として防御率が代表的である。また、先発投手なら勝利数、中継ぎ投手ならホールド数、抑え投手ならセーブ数で評価されることが多い。しかし、セイバーメトリクスの観点からみるとこれらの指標は投手本来の能力を如実に示していないとされている。なぜなら、勝利数は自チームの攻撃力に、防御率は守備力に影響される部分が大きいためである。つまり、それらの指標が等しい投手同士であっても能力が同等であるかどうかは定かではない。本研究では、TOEFL などのテストの作成段階における基本理論である項目反応理論 (豊田[2],[3]) という手法における段階反応モデルを用いて投手の能力や各シチュエーションにおける困難度を同時に推定する手法を構築する。なお、この研究はデータスタジアム株式会社の支援を受けて行っている。

2. 項目反応理論

2.1 2 値データによる項目反応理論

項目反応理論 (Item Response Theory, IRT) とは、テストを作成・実施・評価・運用するための数理モデルである。この理論ではテストを受けた受験者の能力だけでなくテスト問題の作成や評価を同時に行うことが出来る。また、アメリカやヨーロッパの多くの国でテスト理論として使用されており、中国や台湾などのアジア諸国の統一試験でも使用されている。日本では TOFLE や日本語能力検定など言語能力を測るテストで用いられることが多い。項目反応理論で扱われるデータは 2 値データである。2 値データとは、正答・誤答といった反応を 1, 0 で表す。

項目反応データ U は $N \times n$ 行列で、テストにおいて N は受験者数、 n は項目数を示している。被験者を s_i における問題 j への反応を u_{ij} と表し、 u_{ij} は正答だったら 1、誤答だったら 0 となる。テストは、複数の項目 (問題) から構成されている。そこでまず項目の性質を調べるため項目分析を行う。 N 人の被験者のなかで項目 j に正答した被験者が k_j 人いることを表す通過率を

$$P_j = k_j / N \quad (2.1)$$

で定義する。通過率は正答率とも呼ばれる。反応パターン u_j は 0-1 データであるから、恒等的に

$$P_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{ij} \quad (2.2)$$

とも表現できる。

次に識別力を以下のように定義する。識別力とは項目が被験者をどのくらい適切に区別しているかを表す。まずテスト得点ベクトル y を

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_i \dots y_N)' \quad (2.3)$$

のように被験者 i のテスト得点 y_i を一般項とするサイズの列ベクトルとする。被験者 i のテスト得点は

$$y_i = \sum_{j=1}^n \omega_j u_{ij} \quad (2.4)$$

で計算する。ここで ω_j は項目 j の配点である。項目 j の識別力 r_j は u_j と y の相関係数

$$r_j = \rho(u_j, y) \quad (2.5)$$

で定義する。識別力の高い項目とは項目得点がテスト全体で測っている特性を適切に反映し、被験者を区別している項目である。

2.2 ロジスティックモデルによる近似

$\phi(z)$ を標準正規分布の確率密度関数とし

$$\Phi(f(\theta)) = \int_{-\infty}^{f(\theta)} \phi(z) dz \quad (2.6)$$

とする。この正規累積モデル $f(\theta)$ は θ に関する単調増加関数である。ここで (2.6) を計算する際、ロジスティックモデルによる近似公式

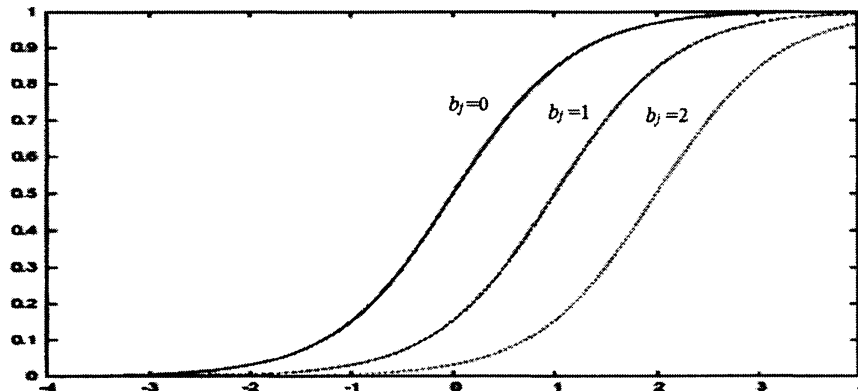
$$\int_{-\infty}^{f(\theta)} \phi(z) dz \cong \frac{1}{1 + \exp\{-Df(\theta)\}} \quad (2.7)$$

を利用する。ここで、 D は尺度因子でありここでは $D=1.7$ を用いて計算する。項目反応理論では横軸に被験者の能力を表す θ 、縦軸に項目に正解する確率 $p(\theta)$ を配置した項目特性曲線 (Item Characteristic Curve, ICC) によってモデルを表現する。モデルの中で多く利用されているものを川合ら[1]よりいくつか紹介する。まず、1母数ロジスティックモデルでは、能力 θ の被験者が項目 j に正解する確率 $p_j(\theta)$ を

$$p_j(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\{-Da(\theta - b_j)\}} \quad (2.8)$$

で表す。 b_j を困難度といい、値が小さいほど簡単な項目であり値が大きいほど難しい問題と解釈する。 a は定数である。

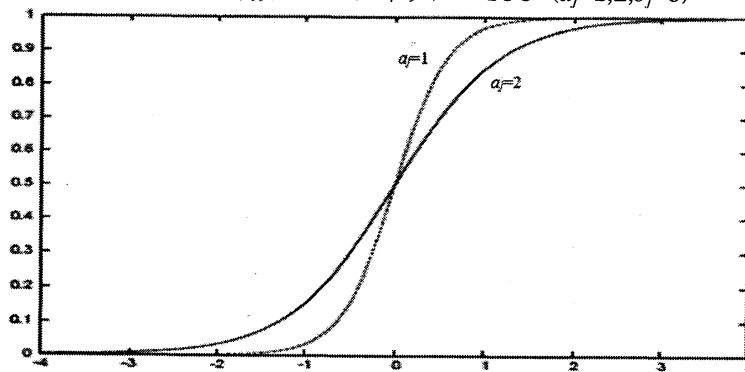
グラフ 2.1 1-母数ロジスティックの ICC ($a=1, b_j=0, 1, 2$)



グラフ 2.1 は 1-母数ロジスティックモデルの ICC である。このグラフでは、 $a=1$ と固定し困難度 b_j がそれぞれ 0, 1, 2 としている。つまり、困難度が大きいほど右寄りのグラフになることがわかる。(2.8) の a を母数として扱うモデルが 2 母数ロジスティックモデル

$$p_j(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\{-Da_j(\theta - b_j)\}} \quad (2.9)$$

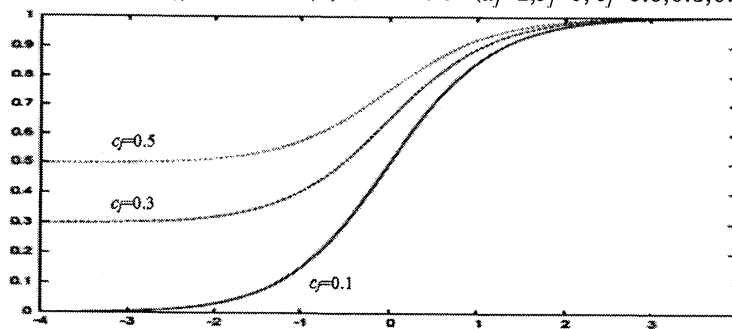
である。 a_j は項目識別力と呼ばれる。項目識別力が高い項目は、項目得点がテスト全体で測っている特性を適切に反映し、被験者を区別している項目である。逆に項目識別力が低い項目は項目得点が特性を適切に反映してない項目である。

グラフ 2.2 2-母数ロジスティックの ICC ($a_j=1,2, b_j=0$)

グラフ 2.2 は 2-母数ロジスティックモデルの ICC である。このグラフは $b_j=0$ として項目識別力 a_j をそれぞれ 1, 2 としている。識別力が高くなると $\theta=b_j$ 付近でグラフの立ち上がり具合が急であることがわかる。(2.9)に項目母数 c_j を加えたモデルを 3 母数ロジスティックモデルといい

$$p_j(\theta) = c_j + \frac{1 - c_j}{1 + \exp\{-Da_j(\theta - b_j)\}} \quad (2.10)$$

で表される。 c_j を当て推量母数といい被験者が偶然正解してしまう確率を表している。

グラフ 2.3 3-母数ロジスティックの ICC ($a_j=1, b_j=0, c_j=0.0, 0.3, 0.5$)

グラフ 2.3 は 3-母数ロジスティックモデルの ICC である。 $a_j=1, b_j=0$ として当て推量母数 c_j をそれぞれ 0.0, 0.3, 0.5 としている。

3. 段階反応モデル

段階反応モデルでは多値データの際に用いる理論である。段階反応モデルでは、 u_j を

$$u_j = 0, 1, 2, \dots, C-1 \quad (3.1)$$

という C 個の値を取る順序尺度の離散変数であるとする。このとき能力 θ の被験者が $u_j = c$ と反応する確率 $p_{jc}(\theta)$ は

$$p_{jc}(\theta) := p(u_j = c | \theta) = p_{jc}^*(\theta) - p_{j(c+1)}^*(\theta) \quad (3.2)$$

と表現することができる。ただし $p_{jc}^*(\theta)$ は境界特性曲線(Boundary Characteristic Curve,

BCC)と呼ばれ

$$p_{jc}^*(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\{-Da_j(\theta - b_{jc}^*)\}} \quad (3.3)$$

で表される。この境界特性曲線は θ によらず

$$p_{jc}^*(\theta) = 1, \quad p_{jc}^*(\theta) = 0 \quad (3.4)$$

を満たす。(3.2)のグラフは項目反応カテゴリ特性曲線(Item Response Category Characteristic Curve, IRCCC)と呼ばれる。このとき、項目内で境界特性曲線が交差しないようにするため、項目内のカテゴリは識別力が等しいと仮定する。段階反応モデルでは、カテゴリの数だけ位置母数を用意する必要がある。まず、最下位の値 $u_{ij} = 0$ と最上位の値 $u_{ij} = C-1$ に関しては、それぞれ $p_{j0} = 0.5$ と $p_{j(C-1)} = 0.5$ となる尺度値を位置母数として利用することが出来る。したがって位置母数 p_{j0} と $p_{j(C-1)}$ は

$$b_{j0} = b_{j1}^*, \quad b_{j(C-1)} = b_{j(C-1)}^* \quad (3.5)$$

と表現される。ただし、段階反応モデルでは、困難度だけを位置母数として利用することはできない。そこで最下位でも最上位でもないカテゴリには、そのカテゴリが観察される確率が最も高くなる尺度値

$$b_{jc} = \frac{b_{jc}^* + b_{j(c+1)}^*}{2} \quad (3.6)$$

を位置母数として利用する。

3.1 項目母数の推定

項目母数の推定には最尤推定法を用いる。 $\mathbf{m}$ は反応パターンを表す $1 \times n$ ベクトル、 θ_i を被験者 i の能力とする。反応 $\mathbf{m}$ において項目 j にカテゴリ c と反応した要素を $u_{cj}^{\mathbf{m}}$ と表す。ここで $u_{cj}^{\mathbf{m}}$ は反応 $\mathbf{m}$ において項目 j にカテゴリ c と反応した場合 $u_{cj}^{\mathbf{m}} = 1$ としそれ以外は $u_{cj}^{\mathbf{m}} = 0$ とする。被験者 i の能力 θ_i が与えられた下での反応パターン $\mathbf{m}$ の分布は

$$p(\mathbf{m}|\theta_i) = \prod_{j=1}^n \prod_{c=0}^{C-1} p_{jc}^*(\theta_i)^{u_{cj}^{\mathbf{m}}} \quad (3.7)$$

と表すことができる。ここで

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{b} = (b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1(c-1)}, \dots, b_{20}, b_{21}, \dots, b_{2(c-1)}, b_{j0}, b_{j1}, \dots, b_{j(c-1)}) \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_N) \quad (3.10)$$

とおくと被験者の反応ならびに項目における反応が互いに独立であるという仮定から、被験者母数と項目母数が与えられたもとで、 n 個の項目に対する N 人の被験者反応パターン行列 $\mathbf{m}$ が起こる確率は

$$p(\mathbf{m}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{i=1}^N p(\mathbf{m}|\theta_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^n \prod_{c=0}^{C-1} p(\mathbf{m}|\theta_i, a_j, b_{jc}) \quad (3.11)$$

である。被験者母数と項目母数は未知より $\mathbf{m}$ を定数、定数 $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ を変数とした尤度関数を

$$L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{m}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3.12)$$

とすると対数尤度関数は

$$\log L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n \sum_{c=0}^{C-1} u_{cj}^m \log p_{jc}^*(\theta_i) \quad (3.13)$$

と表すことができる。この対数尤度関数が最大となるような解を求める。この方法を被験者母数と項目母数を同時に推定する事から同時最尤推定法と呼ぶ。

しかし、この推定法には問題がある。同時最尤推定法では、被験者を追加してデータを増やすと未知数である被験者母数が増えてしまうため推定値が安定しないと言われている。そこで、周辺最尤推定法を用いて項目母数を推定していく。 $g(\boldsymbol{\theta})$ を標準正規分布の確率密度関数とすると反応パターン $\mathbf{m}$ の周辺確率 $p(\mathbf{m})$ は

$$p(\mathbf{m}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{m}|\boldsymbol{\theta}) g(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.14)$$

と表すことができる。 N_m を反応パターン $\mathbf{m}$ を取る被験者数とすると項目母数の尤度関数 $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N!}{\prod_{m=1}^M N_m!} \prod_{m=1}^M \{p(\mathbf{m})\}^{N_m} \quad (3.15)$$

と表すことができ、その対数尤度関数

$$\log L = \log N! - \log \sum_{m=1}^M N_m! + \sum_{m=1}^M N_m \log p(\mathbf{m}) \quad (3.16)$$

に含まれている母数で偏微分をし、母数が最大となるような解を求めることによって項目母数の最尤推定値が求められる。

3.2 尺度値の推定

段階反応モデルにおいての尺度値の推定には最尤推定法を用いる。項目反応データ U_i は被験者 i の反応パターンを表す $C \times n$ 行列である。ここで C はカテゴリ数であり、 n は項目数である。被験者 i の反応パターンである U_i の項目 j においてカテゴリ c と反応した要素を u_{cj}^i と表す。ここで u_{cj}^i は被験者 i において項目 j にカテゴリ c と反応した場合 $u_{cj}^i = 1$ としそれ以外は $u_{cj}^i = 0$ とする。尺度値を推定するためには多値型の確率変数の実測値をそのまま使用しない。被験者 i が項目数 10 個の問題に表 3.1 のように反応したとする。

表 3.1 反応データ

項目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
反応	2	1	2	0	2	2	1	2	2	2

被験者 i の反応を書きかえると

$$U_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

5. 結果

5.1 能力値について

今回は、奪三振率のデータから 12 シチュエーションと 24 シチュエーションの成績を用いて分析を行った。奪三振率は、各シチュエーションにおける 1 打数あたりの奪三振数のことである。2つのシチュエーションにおける各投手の能力値は、表 5.1 と表 5.2 である。

表 5.1 24 シチュエーションでの能力値

投手名	能力値	投手名	能力値
田中 将大	3.079	久保 康友	0.002
ダルビッシュ 有	2.789	岸 孝之	-0.031
杉内 俊哉	1.408	中山 慎也	-0.075
和田 毅	1.269	西 勇輝	-0.095
能見 篤史	1.133	フィガロ	-0.099
岩田 稔	0.98	ネルソン	-0.122
前田 健太	0.98	グライシンガー	-0.127
メッセンジャー	0.814	バリントン	-0.184
澤村 拓一	0.805	吉見 一起	-0.198
内海 哲也	0.78	三浦 大輔	-0.204
西村 健太朗	0.766	近藤 一樹	-0.249
金子 千尋	0.692	武田 勝	-0.444
攝津 正	0.66	山本 省吾	-0.512
ジオ	0.566	斎藤 佑樹	-0.513
福井 優也	0.551	帆足 和幸	-0.514
東野 峻	0.473	ウルフ	-0.527
館山 昌平	0.47	山田 大樹	-0.552
岩隈 久志	0.459	七條 祐樹	-0.566
塩見 貴洋	0.438	須田 幸太	-0.566
成瀬 善久	0.406	大谷 智久	-0.576
村中 恭兵	0.406	涌井 秀章	-0.615
赤川 克紀	0.379	寺原 隼人	-0.621
由規	0.304	篠田 純平	-0.664
永井 怜	0.277	チェン	-0.731
木佐貫 洋	0.254	マーフィー	-0.755
石川 雅規	0.215	岩崎 翔	-1.103
ホールトン	0.193	菊池 雄星	-1.276
唐川 侑己	0.149	井坂 亮平	-1.294
スタンリッジ	0.14	上野 大樹	-1.34
西口 文也	0.126	ヒメネス	-1.547
増渕 竜義	0.087	小野 晋吾	-1.589
石井 一久	0.085	渡辺 俊介	-1.651
高崎 健太郎	0.047	ケッペル	-1.867

表 5.2 12 シチュエーションでの能力値

投手名	能力値	投手名	能力値
ダルビッシュ 有	2.621	増渕 竜義	0.026
田中 将大	2.231	バリントン	0.007
杉内 俊哉	2.028	西 勇輝	0.005
能見 篤史	1.271	七條 祐樹	-0.011
攝津 正	1.049	ネルソン	-0.059
岩田 稔	1.044	高崎 健太郎	-0.098
澤村 拓一	1.037	フィガロ	-0.137
赤川 克紀	0.942	チェン	-0.153
前田 健太	0.867	唐川 侑己	-0.216
ジオ	0.81	帆足 和幸	-0.359
福井 優也	0.773	寺原 隼人	-0.365
メッセンジャー	0.701	三浦 大輔	-0.375
和田 毅	0.675	マーフィー	-0.425
内海 哲也	0.67	吉見 一起	-0.433
西口 文也	0.581	須田 幸太	-0.526
塩見 貴洋	0.531	久保 康友	-0.56
岩隈 久志	0.51	斎藤 佑樹	-0.672
近藤 一樹	0.505	涌井 秀章	-0.673
石井 一久	0.503	グライシンガー	-0.678
岸 孝之	0.446	山田 大樹	-0.746
ホールトン	0.429	篠田 純平	-0.786
永井 怜	0.358	ウルフ	-0.799
館山 昌平	0.322	武田 勝	-0.935
金子 千尋	0.311	山本 省吾	-0.939
村中 恭兵	0.265	大谷 智久	-0.983
東野 峻	0.261	上野 大樹	-1.012
木佐貫 洋	0.237	ヒメネス	-1.165
由規	0.225	菊池 雄星	-1.221
西村 健太朗	0.174	岩崎 翔	-1.314
スタンリッジ	0.15	ケッペル	-1.488
中山 慎也	0.137	渡辺 俊介	-1.57
成瀬 善久	0.093	井坂 亮平	-1.607
石川 雅規	0.09	小野 晋吾	-2.076

能力値に関しては、田中（楽天）投手とダルビッシュ（日本ハム）投手の能力値が高い結果となった。この両投手は 2011 年シーズンの奪三振数が他の投手と比べて多く、ダルビッシュ投手は 276 個、田中投手は 241 個であった。奪三振数が 2 番目である田中投手と 3 番目の杉内投手（ソフトバンク）との差は 50 個もある。この両投手に関しては、奪三振数の数が多いため能力値が高くなったと言えるだろう。

5.2 シチュエーションについて

今回は、各シチュエーションに表 5.3, 表 5.4 のような項目番号を与えた.

表 5.3 24 シチュエーションにおける項目番号

ランナー アウト	なし	1 星	2 星	3 星	1・2 星	1・3 星	2・3 星	満星
0 アウト	項目 1	項目 2	項目 3	項目 4	項目 5	項目 6	項目 7	項目 8
1 アウト	項目 9	項目 10	項目 11	項目 12	項目 13	項目 14	項目 15	項目 16
2 アウト	項目 17	項目 18	項目 19	項目 20	項目 21	項目 22	項目 23	項目 24

表 5.4 12 シチュエーションにおける項目番号

ランナー アウト	なし	1 星	2 星, 1・2 星	3 星, 1・3 星, 2・3 星, 満星
0 アウト	項目 1	項目 2	項目 3	項目 4
1 アウト	項目 5	項目 6	項目 7	項目 8
2 アウト	項目 9	項目 10	項目 11	項目 12

各シチュエーションにおける項目母数は表 5.5, 表 5.6 のように求められた.

表 5.5 24 シチュエーションにおける項目母数

	無死走なし	無死走 1 星	無死走 2 星	無死走 3 星	無死走 1・2 星	無死走 1・3 星	無死走 2・3 星	無死走満星
困難度 1	-1.515	-0.498	1.966	3.489	-6.342	3.831	11.415	4.441
困難度 2	1.127	2.057	4.061	5.157	-11.023	6.736	13.587	6.715
識別力	1.404	0.699	0.732	0.556	-0.318	0.347	0.203	0.324
	1 死走なし	1 死走 1 星	1 死走 2 星	1 死走 3 星	1 死走 1・2 星	1 死走 1・3 星	1 死走 2・3 星	1 死走満星
困難度 1	-0.762	-0.143	0.154	1.065	-0.250	2.564	4.263	1.763
困難度 2	1.897	2.237	2.847	3.489	2.563	6.273	16.712	4.107
識別力	1.483	1.049	1.057	1.220	0.814	0.198	0.252	0.593
	2 死走なし	2 死走 1 星	2 死走 2 星	2 死走 3 星	2 死走 1・2 星	2 死走 1・3 星	2 死走 2・3 星	2 死走満星
困難度 1	-1.122	-1.53	-0.454	0.859	-1.203	2.223	0.966	0.879
困難度 2	0.602	2.130	3.232	3.094	3.765	4.999	3.290	3.635
識別力	2.176	1.015	0.787	0.844	0.556	0.767	0.710	1.144

表 5.6 12 シチュエーションにおける項目母数

	無死走なし	無死走1星	無死走2星	無死走3星	1死走なし	1死走1星
困難度1	-1.004	-0.578	0.394	1.436	-0.590	-0.38
困難度2	0.914	2.440	4.682	3.103	1.459	2.000
識別力	2.596	0.635	0.571	0.747	1.921	0.864
	1死走2星	1死走3星	2死走なし	2死走1星	2死走2星	2死走3星
困難度1	-0.920	0.124	-1.161	-1.191	-1.884	0.048
困難度2	1.875	4.163	0.648	1.975	1.889	2.071
識別力	0.915	1.182	2.054	1.238	0.776	1.478

6. 今後の展望

今回の研究での項目母数の推定法は周辺最尤指定法を用いたが、推定の方法にはいろいろな方法がある。その1つとしてあげられる方法は、因子分析モデルを使用した推定法である。この因子分析モデルは段階反応モデルと相性が良いと言われている。今後は、この因子分析モデルを用いて項目母数の推定を行い、最尤推定法との違いを見ていきたいと思う。また、今回使用したデータは量的データを3等分したカテゴリーによって評価したので、成績の評価方法が正しいとは言い難い。成績を評価するための閾値の設定方法についても考えていく。分析に関しては、投手の能力に必要な指標を考え投手の総合的な能力の推定について考えていく。そして、推定した項目母数からシチュエーションの特徴を見ていき、指標ごとにどのシチュエーションが重要になってくるかを考察していく。

参考文献

- [1] 川合治男, 福山裕宣, 岩瀬弘和, 半田勝久 (2010) 項目反応理論による新入生のコンピューター・リテラシーの測定, 東京成徳大学研究紀要 17, 33-47
- [2] 豊田秀樹(2002) 項目反応理論[入門編], 朝倉書店.
- [3] 豊田秀樹(2002) 項目反応理論 [理論編], 朝倉書店.