

チャネルのクラス分けとスクイズドチャネルの導入

入山 聖史 (Satoshi Iriyama) 渡邊 昇 (Noboru Watanabe)
大矢 雅則 (Masanori Ohya) *

1 序論

光通信の研究は、量子チャネルの数理的モデルを用いてなされており、最近、様々な数理モデルが考え出されている。それに伴い、それを整理し体系だてて考える必要がでてきた。本論文では、その体系化のため、新たにスクイジングチャネルを導入し、それを用いたスクイズド光通信の情報伝送効率をキャパシティを用いて調べた。また、そこで用いられるスクイジング指数を適当な値にすることで、入力のスクイズド状態から、現在作ることが難しいとされているコヒーレント状態や光子数確定状態を、数理的に容易に作ることができることを示す。

2 量子系のチャネルと相互エントロピー

この節では、雑音のある量子チャネルと結合チャネルを説明する。そして量子系の入力状態とチャネルに関する相互エントロピーを説明し、それを基に定義される MER と MMER を説明する。

定義 2.1 いま、 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ をそれぞれ入力側、出力側のヒルベルト空間とし、 $B(\mathcal{H}_k)$ を $\mathcal{H}_k$ 上の有界線形作用素の全体とする。 $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$ への写像 Λ^* を量子チャネルあるいは単にチャネルといい、アフィン性 ($\sum_n \lambda_n = 1 (\forall \lambda_n \geq 0)$) ならば $\Lambda^*(\sum_n \lambda_n \rho_n) = \sum_n \lambda_n \Lambda^*(\rho_n)$, $\forall \rho_n \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ を満たす Λ^* を線形な量子チャネルという。さらに、 $B(\mathcal{H}_2)$ から $B(\mathcal{H}_1)$ への写像 Λ が Λ^* の共役写像であるとは、任意の $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ と任意の $A \in B(\mathcal{H}_2)$ に対して、 $\text{tr} \Lambda^*(\rho) A = \text{tr} \rho \Lambda(A)$ が成り立つものをいうが、この Λ が完全正写像であるとき、 Λ^* を完全正チャネルと呼ぶ。なお、 Λ が完全正写像であるとは、任意の $n \in N$ と任意の $A_j \in B(\mathcal{H}_2)$ と任意の $B_k \in B(\mathcal{H}_1)$ に対して、 $\sum_{j,k=1}^n B_j^* \Lambda(A_j^* A_k) B_k \geq 0$ を満たす場合をいう。

2.1 雑音のある量子チャネルと結合チャネル

いま、雑音系と損失系を表す二つのヒルベルト空間 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ を用意する。入力状態を ρ としたとき、雑音状態 $\varsigma = |m\rangle\langle m| \in \mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$ に対する量子チャネル Λ^* は、

$$\Lambda^*(\rho) \equiv \text{tr}_{\mathcal{K}_2} V(\rho \otimes \varsigma) V^*$$

*東京理科大 理工

で定義される。ここで、 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$ から $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2$ への変換 V は

$$V(n \otimes m) = \sum_{j=0}^{n+m} C_j^{n,m} j \otimes (n+m-j)$$

ここで,

$$\begin{aligned} C_j^{n,m} &= \sum_{r=1}^K (-1)^{n-r} \\ &\times \frac{\sqrt{n!m!j!(n+m-j)!}}{r!(n-r)!(j-r)!(m-j+r)!} \\ &\times \eta^{m-j+2r} (1-\eta)^{n+j-2r} \end{aligned}$$

ただし、 $K = \min\{j, n\}$, $L = \max\{j-m, 0\}$ である。この V を用いて $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ への完全正チャネル π^* を $\pi^*(\cdot) = V(\cdot)V^*$ と定める。この π^* は通信系の物理的装置に対応し、これを L 個結合することによって作られる結合チャネルは次のように定義される。

定義 2.1. 1

$$\begin{aligned} \Lambda_L^*(\rho) &\equiv \text{tr}_{\mathcal{K}_2} \pi^*(\pi^* \cdots \pi^*(\pi^*(\rho \otimes \xi)) \cdots) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{K}_2} V(V \cdots V(V(\rho \otimes \xi)V^*)V^* \cdots V^*)V^* \end{aligned}$$

π^* の L 個の結合 π^{*L} は長さが l^*L の物理的なチャネル内部の信号伝送過程を表していると考えることができる。

2.2 量子相互エントロピー

量子系のエントロピーは 1930 年頃 Von Neumann によって次のように定められた。

$$S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho$$

さらに、量子相互エントロピーを定式化するには次の条件が必要である。(1) チャネル Λ^* が恒等変換 id であれば、相互エントロピーはフォンノイマンエントロピーに一致する。 $I(\rho; id) = S(\rho)$ (2) 系が古典系であれば、量子相互エントロピーは古典系の相互エントロピーに一致する。(3) 基本不等式

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq S(\rho)$$

をみたす。この三つの条件を満たすものとして、入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する量子相互エントロピーは、

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup_E S(\sigma_E, \sigma_0)$$

で定められている。ここで、 $S(\cdot, \cdot)$ は量子系の相対エントロピーであり、

$$S(\sigma_E, \sigma_0) = \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0)$$

で定められ、

$$\sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n, \sigma_0 = \rho \otimes \Lambda^* \rho$$

である。 E_n は ρ のスペクトル分解の射影作用素をさらに1次元に分解したものである。ただし、この分解は一般に一意ではない。また、量子相互エントロピーは次の基本的不等式を満たす。

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min \{S(\rho), S(\Lambda^* \rho)\}$$

これより、 $I(\rho; \Lambda^*)$ が大きいほどチャネル Λ^* は伝送効率が良いと考えられる。また、この式を用いて入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する相互エントロピー比 MER $r(\rho; \Lambda^*)$ は、

$$0 \leq r(\rho; \Lambda^*) = \frac{I(\rho; \Lambda^*)}{S(\rho)} \leq 1$$

で定められる [9]。MER は、チャネル Λ^* は入力の情報量の何割を出力系に正しく伝えることができるかを測る尺度であり、これは入力系が異なるときでもチャネルの情報伝送効率を比較することができる。また、一般に情報伝送効率を測る尺度として量子通信路容量（キャパシティ）を用いた研究がなされている。チャネル Λ^* のキャパシティ C_q^s は

$$C_q^s(\Lambda^*) = \sup \{I(\rho); \rho \in \mathfrak{s}\}$$

で定められる [4,6,7, 11]。ここで $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ はある条件を満たす集合である。キャパシティは、チャネルが入力の情報量を最大でどれだけ正確に出力系に伝達可能かを測るための尺度である。さらに、系の異なる場合においてもチャネルの効率を比較できる新たな尺度 MMER が次のように定義されている。

定義 2.2. 1 入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する MMER $R_\rho^s(\Lambda^*)$ は、

$$0 \leq R_\rho^s(\Lambda^*) \equiv \sup_{\lambda} \left\{ \frac{I(\rho; \Lambda_0^{*L})}{S(\rho)}; \rho \in \mathfrak{s} \right\} \leq 1$$

で定義される [1]。ここで、 $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ はある条件を満たす集合である。

3 光状態の数理

量子チャネルの入力に用いる光の状態には、光子数確定状態、コヒーレント状態、スクイーズ状態があり、本節ではその数理を説明する。

3.1 光子数確定状態

時刻 $t = 0$ で、 $l = \lambda = 1$ である調和振動子のハミルトニアンは、 $(\hbar = 1)$ とおくと、 $H = (a^*a + \frac{1}{2})\omega$ と表される。ここで数作用素 N を $N = a^*a$ とおく。ただし a, a^* は、交換関係 $\text{CCR}[a, a^*a] = a$ 、 $[a^*, a^*a] = -a^*$ 、 $Na = a(N - I)$ 、 $Na^* = a^*(N + I)$ をみたす。 N の個有値を n 、ノルムが1の固有ベクトルを $|n\rangle$ とすると、 $N|n\rangle = n|n\rangle$ となり、

$$F_n = |x_n\rangle\langle x_n|$$

で与えられる状態 F_n を n 光子数確定状態という。この状態は、エネルギー $n\hbar\omega$ の状態にある光子が1個あるとも考えられるし、エネルギー $\hbar\omega$ の状態にある光子が n 個あるとも考えられる。

3.2 コヒーレント状態

コヒーレント状態ベクトルとは、消滅作用素 a の固有状態ベクトルのことをいう。 θ を個有値、 $|\theta\rangle$ をその固有ベクトルとすると、

$$a|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle$$

と表せる。光子数確定状態ベクトル $|n\rangle$ はヒルベルト空間の CONS をなすから、 $|\theta\rangle$ を $|n\rangle$ でフーリエ展開すると、

$$\begin{aligned} |\theta\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n, \theta | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{\sqrt{n!}} \exp\left\{-\frac{1}{2}|\theta|^2\right\} |n\rangle \end{aligned}$$

となる。また、

$$\rho = |\theta\rangle\langle\theta|$$

をコヒーレント状態という。

3.3 スクイズト状態

スクイズト状態とは、コヒーレント状態と同様に安定な光子状態であり、 a^*, a と $|\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1$ をみたす複素数 λ, μ を用いて、

$$b = \lambda a + \mu a^*$$

$$b^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} a$$

と新たな生成、消滅演算子 b^*, b を定めると、これらは CCR

$$[b^*, b] = I$$

を満たす。この b の固有ベクトルをスクイズト状態といい、 $|\theta; \lambda, \mu\rangle$ と表す。消滅作用素 b の個有値と固有ベクトルは

$$b|\theta; \lambda, \mu\rangle = (\lambda\theta + \mu\bar{\theta})|\theta; \lambda, \mu\rangle$$

を満たす。この固有ベクトルにより作られた状態

$$\rho = |\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|$$

をスクイズト状態という。

4 チャネルのクラス分類

4.1 光子数確定チャネル

入力系の光子数確定状態 $\rho = |n\rangle\langle n|$ の集合を $\mathfrak{S} \equiv \{\rho = |n\rangle\langle n|; n = 0, 1, 2, \dots\}$ とする。このとき、光子数確定状態を出力系の光子数確定状態に移すチャネル $\Lambda_N : \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathfrak{S}_N$ を光子数確定チャネルと呼ぶ。例：

$$\Lambda_N^*(|n\rangle\langle n|) \equiv |n-1\rangle\langle n-1|, (\forall n \geq 1)$$

$$\Lambda_N^*(|0\rangle\langle 0|) \equiv |0\rangle\langle 0|$$

4.2 コヒーレントチャネル

入力系のコヒーレント状態 $\rho_\theta = |\theta\rangle\langle\theta|$ の集合を $\mathfrak{S}_C \equiv \{\rho_\theta = |\theta\rangle\langle\theta|; \theta \in \mathbf{C}\}$

とする。このとき、コヒーレント状態を出力系のコヒーレント状態に移すチャネルをコヒーレントチャネルと呼ぶ。例：ある $\alpha \in \mathbf{C}$ を固定する。 $\Lambda_C^*(|\theta\rangle\langle\theta|) \equiv |\alpha\theta\rangle\langle\alpha\theta|$, $(\forall \rho_\theta = |\theta\rangle\langle\theta| \in \mathfrak{S})$

ここで、 $|\alpha|^2 > 1$ となるチャネルは増幅変換であり、 $|\alpha|^2 = 1$ となるチャネルは恒等変換であり、 $|\alpha|^2 < 1$ となるチャネルは減衰変換である。

定理 4.2.1 減衰チャネル Λ_0^* はコヒーレントチャネルである。

証明：

$$\rho_\theta = |\theta\rangle\langle\theta| = \exp(-|\theta|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^n \bar{\theta}^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| \in \mathfrak{S}_C$$

を減衰チャネル Λ_0^* で送ると、

$$\begin{aligned} \Lambda_0^* &= \exp(-|\theta|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^n \bar{\theta}^m}{\sqrt{n!m!}} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^n C_j^{(n)} \overline{C_{j+m-n}^{(m)}} |j\rangle\langle m-n+j| \\ &= \exp(-|\theta|^2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n-j=0}^n \frac{\theta^n \bar{\theta}^m}{\sqrt{j!(n-j)!(m-n+j)!(n-j)!}} \\ &\quad \times \alpha^j (-\beta)^{n-j} \bar{\alpha}^{m-n+j} (-\bar{\beta})^{n-j} \\ &\quad \times |j\rangle\langle m-n+j| \end{aligned}$$

となる。ここで $n-j=k$ とすると、

$$\begin{aligned} &= \exp(-|\theta|^2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m-k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{\theta^{j+k} \bar{\theta}^m}{\sqrt{j!k!(m-k)!k!}} \\ &\quad \times \alpha^j (-\beta)^k \bar{\alpha}^{m-k} (-\bar{\beta})^k |j\rangle\langle m-k| \end{aligned}$$

となる。ここで $m-k=l$ とすると、

$$\begin{aligned} &= \exp(-|\theta|^2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^{j+k} \bar{\theta}^{l+k}}{\sqrt{j!k!l!k!}} \\ &\quad \times \alpha^j (-\beta)^k \bar{\alpha}^l (-\bar{\beta})^k |j\rangle\langle l| \\ &= (\exp(-\frac{1}{2}|\alpha\theta|^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha\theta)^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle) \\ &\quad \times (\exp(-\frac{1}{2}|\alpha\theta|^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\bar{\alpha}\bar{\theta})^l}{\sqrt{l!}} \langle l|) \\ &= |\alpha\theta\rangle\langle\alpha\theta| \end{aligned}$$

よって、

$$\Lambda_0^*(\rho_\theta) = |\alpha\theta\rangle\langle\alpha\theta| \in \mathfrak{S}_C(\mathfrak{h})$$

となるので、 $\Lambda_0^*(\rho_\theta)$ はコヒーレント状態である。したがって、減衰チャネル Λ_0^* はコヒーレントチャネルである。QED

4.3 スクイズドチャネル

入力系のスクイズド状態 $\rho_{SQ} = |\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|$ の集合を

$$\mathfrak{S}_{SQ} \equiv \{\rho_{SQ} = |\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|; \theta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, s.t. |\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1\}$$

とする。このとき、スクイズド状態を出力系のスクイズド状態に移すチャネル $\Lambda_{SQ}^*: \mathfrak{S}_{SQ} \rightarrow \mathfrak{S}_{SQ}$ をスクイズドチャネルと呼ぶ。

定理 4.3. 1 (減衰チャネル) Λ_0^* はスクイズドチャネルでない。

証明：

$$\rho_{SQ} = |\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_n \bar{s}_m |n\rangle\langle m|$$

を減衰チャネル Λ_0^* で送ると、

$$\begin{aligned} \Lambda_0^* \rho_{SQ} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_n \Lambda_0^* |n\rangle\langle m| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n-j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_n \bar{s}_m C_j^{(n)} \\ &\quad \times \sum_{m-n+j}^m \overline{C_{m-n+j}^{(m)}} |j\rangle\langle m-n+j| \end{aligned}$$

ここで、 $n-j=k$ とすると、

$$\begin{aligned} \Lambda_0^* \rho_{SQ} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m-k=0}^{\infty} s_{j+k} \bar{s}_m C_j^{(j+k)} \\ &\quad \times \sum_{m-k}^m \overline{C_{m-k}^{(m)}} |j\rangle\langle m-k| \end{aligned}$$

ここで、 $m-k=l$ とすると、

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} s_{j+k} \bar{s}_{l+k} C_j^{(j+k)} \overline{C_l^{(l+k)}} |j\rangle\langle l| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_{j+k} C_j^{(j+k)} |j\rangle \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \bar{s}_{l+k} \overline{C_l^{(l+k)}} \langle l| \right) \end{aligned}$$

$|x_n\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} s_{j+k} C_j^{(j+k)} |j\rangle$ とおくと、

$$\Lambda_0^* \rho_{SQ} = \sum_k |x_k\rangle\langle x_k| = \sum_k \|x_k\|^2 \frac{|x_k\rangle\langle x_k|}{\|x_n\| \|x_n\|}$$

となるので、 $\Lambda_0^* \rho_{SQ}$ はスクイズド状態ではない。したがって、減衰チャネル Λ_0^* はスクイズドチャネルではない。QED

例： $\mathcal{H}_{SQ} \equiv \{|\theta; \lambda, \mu\rangle; \theta \in \mathbb{C}, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |\lambda|^\epsilon - |\mu|^\epsilon = \infty\}$ とし， $\mathcal{H}_{SQ}$ から $\mathcal{H}_{SQ}$ への線形変換 V_{SQ} を次のように定める．

$$V_{SQ}|\theta; \lambda, \mu\rangle \equiv |\sqrt{\eta}\theta; \alpha\lambda, \beta\mu\rangle$$

ただし， α, β は $|\alpha|^2|\lambda|^2 - |\beta|^2|\mu|^2 = 1$ を満たす複素数である．この V_{SQ} を用いてスクイズドチャンネル Λ_{SQ}^* を

$$\Lambda_{SQ}^*(\cdot) \equiv V_{SQ}(\cdot)V_{SQ}^*$$

と定める．また，スクイジング指数 $k(\lambda, \mu)$ を

$$k(\lambda, \mu) \equiv \frac{|\lambda + \mu|}{|\lambda - \mu|}$$

とし，スクイジング変化率 $\bar{k}$ を

$$\bar{k} \equiv \frac{k(\alpha\lambda, \beta\mu)}{k(\lambda, \mu)}$$

と定める．

4.4 スクイズド-コヒーレントチャンネル

入力系のスクイズド状態 ρ_{SQ} を出力系のコヒーレント状態に移すチャンネル Λ_{SC}^* ：
 $\mathfrak{S}_{SQ} \rightarrow \mathfrak{S}_C$ をスクイズド-コヒーレント（SC）チャンネルと呼ぶ．例：

$$\begin{aligned} \Lambda_{SC}^*(|\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|) &\equiv |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta| \\ (\forall \rho_{SQ} = |\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu| \in \mathfrak{S}_{SQ}) \end{aligned}$$

4.5 スクイズド-光子数確定チャンネル

入力系のスクイズド状態 ρ_{SQ} を出力系の光子数確定状態に移すチャンネル Λ_{SN}^* ：
 $\mathfrak{S}_{SQ} \rightarrow \mathfrak{S}_N$ をスクイズド-光子数確定（SN）チャンネルと呼ぶ．例：

$$\begin{aligned} \Lambda_{SN}^*(|\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|) &\equiv \\ &[|\bar{\lambda}\theta - \mu\bar{\theta}|^2 + |\mu|^2]\langle\bar{\lambda}\theta - \mu\bar{\theta}|^2 + |\mu|^2| \\ (\forall \rho_{SQ} = |\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu| \in \mathfrak{S}_{SQ}) \end{aligned}$$

ここで， $[\cdot]$ はガウス記号である．

5 スクイズドチャンネルに対する量子通信路容量の数値計算

OOK 方式を用いて入力状態 $\rho_{sq} = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|$ とチャンネル Λ_{SQ}^* に対する Ohya 相互エントロピーを文献に従って計算し，量子通信路容量を用いて，チャンネル $\rho_{sq} = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|$ の情報伝送効率を調べる．なお，光変調方式の効率の研究は文献などでなされている．

いま，入力状態 ρ が， $\theta \in \mathbb{C}, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1$ に対して，

$$\rho_{sq} = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|$$

($\forall p \in [0, 1]$) で与えられるものとする. ここで, $|0\rangle\langle 0|$ と $|\theta; \lambda, \mu\rangle\langle \theta; \lambda, \mu|$ は $\mathcal{H}$ の真空状態とスクイーズ状態である. $\mathcal{H}_\theta$ を $|0\rangle$ と $|\theta; \lambda, \mu\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると, $\mathcal{H}_\theta$ から $\mathbf{C}^2$ へのユニタリ作用素 U :

$$U|0\rangle = |y_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

$$U|\theta; \lambda, \mu\rangle = |y_1\rangle = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

が存在する.

$$u_0 = \langle y_0, y_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)$$

$$u_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda} \exp(|\theta|^2 + \frac{\mu}{\lambda}|\theta|^2)}$$

である. さらに, $U\rho_{sq}U^*$ の個有値は,

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4p(1-p) \left(1 - \frac{1}{\lambda} \exp(-|\theta|^2 + \frac{\mu}{\lambda}|\theta|^2) \right)} \right\}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p) \left(1 - \frac{1}{\lambda} \exp(-|\theta|^2 + \frac{\mu}{\lambda}|\theta|^2) \right)} \right\}$$

であり, φ_0 に関する固有ベクトルは

$$|\bar{y}_0\rangle = a|y_0\rangle + b|y_1\rangle$$

で与えられる. ここで,

$$|a|^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)\tau + 1}$$

$$|b|^2 = \frac{1}{\tau^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)\tau + 1}$$

$$ab^* = a^*b = \frac{\tau}{\tau^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)\tau + 1}$$

$$\tau = \frac{-(1-2p) + \sqrt{1 - 4p(1-p) \left(1 - \frac{1}{\lambda} \exp(-|\theta|^2 + \frac{\mu}{\lambda}|\theta|^2) \right)}}{\frac{2(1-p)}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)}$$

である. さらに, φ_1 に関する固有ベクトルは,

$$|\bar{y}_1\rangle = c|y_0\rangle + d|y_1\rangle$$

で与えられる. ここで,

$$|c|^2 = \frac{t^2}{t^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)t + 1}$$

$$|d|^2 = \frac{1}{t^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)t + 1}$$

$$ab^* = a^*b = \frac{\tau}{t^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)t + 1}$$

$$t = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)\tau}{\tau + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)}$$

である。また、 Λ_{SQ}^* に対する出力状態は、

$$\Lambda_{SQ}^* = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|\theta_\eta; \alpha\lambda, \beta\mu\rangle\langle \theta_\eta; \alpha\lambda, \beta\mu|$$

となる。ここで、 $\theta_\eta = \sqrt{\eta}\theta$ である。このとき、 $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ を $|0\rangle$ と $|\theta_\eta; \alpha\lambda, \beta\mu\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると、 $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ から $\mathbf{C}^2$ へのユニタリー作用素 V :

$$V|0\rangle = |z_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

$$V|\theta; \lambda, \mu\rangle = |z_1\rangle = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

が存在する。ここで、

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \langle z_0, z_1 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{2\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2) \\ \nu_1 &= \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha\lambda} \exp(-|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2)} \end{aligned}$$

である。さらに、 $V\Lambda_{SQ}^*\rho_{sq}V^*$ の固有値は、

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} \{ 1 + \sqrt{1 - 4p(1-p)(1 - \frac{1}{\alpha\lambda} \exp(-|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2))} \} \\ v_1 &= \frac{1}{2} \{ 1 + \sqrt{1 - 4p(1-p)(1 - \frac{1}{\alpha\lambda} \exp(-|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2))} \} \end{aligned}$$

である。このとき、 $|\bar{y}_j\rangle$ に対して、 $\bar{F}_j|\bar{y}_j\rangle\langle\bar{y}_j|$ とおき、さらに $|\bar{x}_j\rangle = U^*|\bar{y}_j\rangle$ とし、 $\bar{E}_j = |\bar{x}_j\rangle\langle\bar{x}_j|$ と書くことにする ($j=0,1$) と、 $\Lambda_{SQ}^*\bar{E}_j$ は、

$$\Lambda_{SQ}^*\bar{E}_j = \bar{p}_j\bar{E}_{j0} + (1-\bar{p}_j)\bar{E}_{j1}$$

と表される。ここで $\bar{p}_j$ ($j=0,1$) は、

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{\alpha} \exp(-\frac{1}{2}(1-\eta)(|\theta|^2 - \frac{\mu}{\lambda}|\theta|^2))) \\ &\quad \times \frac{\tau^2 + \frac{2}{\sqrt{\alpha\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{2\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2)\tau + 1}{\tau^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)\tau + 1} \\ \bar{p}_1 &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{\alpha} \exp(-\frac{1}{2}(1-\eta)(|\theta|^2 - \frac{\mu}{\lambda}|\theta|^2))) \\ &\quad \times \frac{t^2 + \frac{2}{\sqrt{\alpha\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{2\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2)t + 1}{t^2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \exp(-\frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{\mu}{2\lambda}|\theta|^2)t + 1} \end{aligned}$$

であり, $\bar{E}_{jk} = |\bar{x}_{jk}\rangle\langle\bar{x}_{jk}|$ ($j, k = 0, 1$) は,

$$\begin{aligned} \langle\bar{x}_{jk}, \bar{x}_{jk}\rangle &= 1, (j, k = 0, 1) \\ \langle\bar{x}_{00}, \bar{x}_{01}\rangle &= \frac{\tau^2 - 1}{\sqrt{(\tau^2 + 1) - \frac{4}{\sqrt{\alpha\lambda}} \exp(-|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2)\tau^2}} \neq 0 \\ \langle\bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}\rangle &= \frac{\tau^2 - 1}{\sqrt{(t^2 + 1) - \frac{4}{\sqrt{\alpha\lambda}} \exp(-|\theta_\eta|^2 + \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda}|\theta_\eta|^2)t^2}} \neq 0 \end{aligned}$$

を満たすので, $|\bar{x}_{j0}\rangle$ と $|\bar{x}_{j1}\rangle$ ($j = 0, 1$) は互いに非直交ベクトルである. よって, $\bar{\mathcal{H}}_{j\theta}$ を $|\bar{x}_{j0}\rangle$ と $|\bar{x}_{j1}\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると, $\bar{\mathcal{H}}_{j\theta}$ から $\mathbf{C}^2$ へのユニタリー作用素 $\bar{U}_j$:

$$\begin{aligned} \bar{U}_j|\bar{x}_{j0}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2 \\ \bar{U}_j|\bar{x}_{j1}\rangle &= \begin{pmatrix} \bar{u}_{j0} \\ \bar{u}_{j1} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2 \end{aligned}$$

が存在する. ここで, $\bar{u}_{j0} = \langle\bar{x}_{j0}, \bar{x}_{j1}\rangle$, $\bar{u}_{j1} = \sqrt{1 - |\langle\bar{x}_{j0}, \bar{x}_{j1}\rangle|^2}$ である. さらに, $\bar{U}_j \bar{E}_{jk} \bar{U}_j^*$ の個有値は,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{j0} &= \frac{1}{2} \{1 + \sqrt{1 - 4p(1-p)(1 - |\langle\bar{x}_{j0}, \bar{x}_{j1}\rangle|^2)}\} \\ \bar{\varphi}_{j1} &= \frac{1}{2} \{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)(1 - |\langle\bar{x}_{j0}, \bar{x}_{j1}\rangle|^2)}\} \end{aligned}$$

である. 以上のことから, 量子系の相互エントロピーは,

$$\begin{aligned} I(\rho_{sq}; \Lambda_{SQ}^*) &= \\ S(\Lambda_{SQ}^* \rho_{sq}) - \|\rho_{sq}\| S(\Lambda_{SQ}^* \bar{E}_0) - (1 - \|\rho_{sq}\|) S(\Lambda_{SQ}^* \bar{E}_1) \end{aligned}$$

で一意に求められる. ここで, $\|\rho_{sq}\| = \varphi_0^2$ であり,

$$\begin{aligned} S(\Lambda_{SQ}^* \rho_{sq}) &= - \sum_{k=0}^1 \nu_k \log \nu_k \\ S(\Lambda_{SQ}^* \bar{E}_j) &= - \sum_{k=0}^1 \bar{\varphi}_{jk} \log \bar{\varphi}_{jk}, (j = 0, 1) \end{aligned}$$

である. したがって, 入力状態のエネルギーが E でおさえられている集合に対する量子通信路容量は,

$$C_q^{\mathcal{S}_{SQ,E}^{OOK}}(\Lambda_{SQ}^*) \equiv \sup\{I(\rho_{sq}; \Lambda_{SQ}^*); \rho_{sq} \in \mathcal{S}_{SQ,E}^{OOK}\}$$

で求められる.

6 計算結果と考察

まず，入力のスクイズド状態の変化による量子通信路容量の変化を調べる．

入力状態 ρ_{SQ} のパラメータ λ を増加させると量子通信路容量は増加し，その極限は，

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C_q^{SQ,E}(\Lambda_{SQ}^*) = \log 2$$

となる (図 1)．そして，スクイズドチャネルとコヒーレントチャネルの量子通信路容量を比較したのが (図 2) である．これより，スクイズドチャネルは良い入力状態を与えると，コヒーレントチャネルより量子通信路容量が大きくなるということが分かった．

次に，チャネル自体の持つパラメータである，スクイジング変化率 $bark$ を変化させたときの量子通信路容量を調べると， $\bar{k}$ が増加するにつれ量子通信路容量は大きくなっている (図 3)．つまり，入力状態をより押しつぶす変換をすると量子通信路容量は大きくなるということである．

さらに， $\bar{k}$ の値を大きくしたのが (図 4) である．これより入力状態をさらに押しつぶし光子数確定状態に近づけると，量子通信路容量はさらに大きくなっていくことがわかる．

SN チャネル，SC チャネル，SQ チャネルを比較したのが (図 5) である．これより，SN チャネル他よりも圧倒的に量子通信路容量が大きいことが分かる．

以上のことをまとめると，

- 入力状態の λ を大きくすると量子通信路容量は大きくなる
- 良い入力や $\bar{k}$ を与えるとスクイズド光通信は，コヒーレント光通信よりも量子通信路容量が大きくなる
- SN チャネルが最も量子通信路容量が大きい

ということである．このことから，光通信過程における情報伝送効率を改善する研究は，コヒーレント光通信からスクイズド光通信，そして SN 光通信へと発展していくものと推測される．

本論文では，数学的にスクイズドチャネルを導入し，量子通信路容量を計算していくつかの結果を得たが，このスクイズドチャネルを物理的に定式化し，さらに，厳密な研究を推進していくことが，今後の課題である．

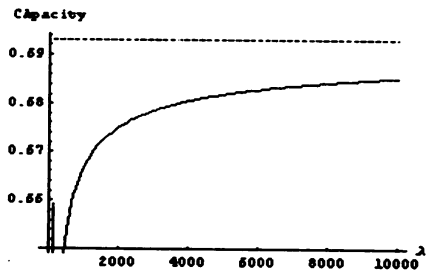


Figure 1: λ の値を変えたときのスクイズドチャネルのキャパシティ ($\alpha = 1, \beta = 1$)

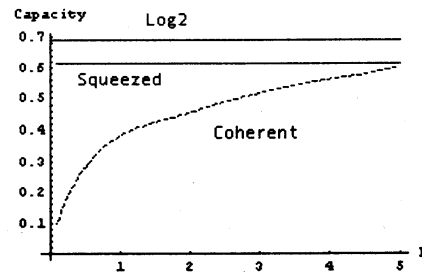


Figure 2: コヒーレントチャンネルとスクイズドチャンネルのキャパシティ ($\lambda = \sqrt{10}, \mu = \sqrt{9}, \alpha = 1, \beta = 1$)

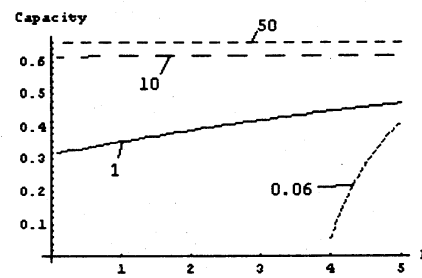


Figure 3: k の値を変えたときのスクイズドチャンネルのキャパシティ ($\lambda = \sqrt{5}, \mu = \sqrt{4}, k = 0.06, 1, 10, 50$)

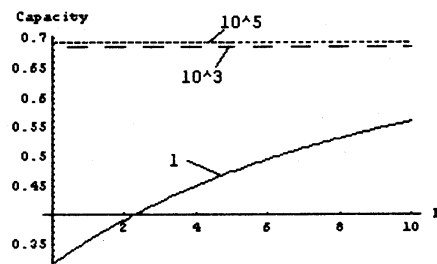


Figure 4: k の値を大きくしたときのキャパシティ ($k = 1, 10^3, 10^5$)

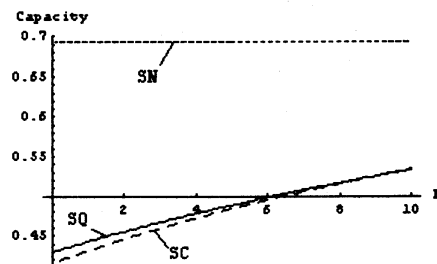


Figure 5: SN チャンネル, SC チャンネル, SQ チャンネルのキャパシティ ($\eta = 0.9, \lambda = \sqrt{5}, \mu = \sqrt{4}, \alpha = 1, \beta = 1$)

References

- [1] J.von Neumann: "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik", Springer-Verlag, Berlin, 1932
- [2] M.Ohya: "On compound state and mutual information in quantum information theory", IEEE Trans. Inf. Theory, 29, 770-774, 1983.
- [3] 大矢雅則: "量子チャネルの伝送容量について", 信学論, J80A, No12, 1638-1643, 1998
- [4] M.Ohya: "Fundamentals of quantum mutual entropy and capacity", Open Systems and Information Dynamics, 6, No.1, 69-78, 1999
- [5] M.Ohya and D.Petz: "Quantum Entropy and Its Use", Springer-Verlag, 1993.
- [6] M.Ohya, D.Petz and N.Watanabe: "On capacities of quantum channels", Probability and Mathematical Statistics, 17, 179-196, 1993.
- [7] M.Ohya and D.Petz and N.Watanabe: "Numerical computation of quantum capacity", International Journal of Theoretical Physics, 37, No.1, 507-510, 1998.
- [8] 大矢雅則, 渡邊昇: "量子論的通信過程における数理モデルの構成とその解析", 信学論, J67-A, No.6, 548-552, 1984.
- [9] 大矢雅則, 渡邊昇: "量子通信理論の基礎", 牧野書店, 1998.
- [10] R.Schatten: "Norm Ideals of Completely Continuous Operators", Springer-Verlag, Berlin, New York, 1960.
- [11] N.Watanabe: "Efficiency of optical modulations for photon number states", Quantum Probability and Related Topics, 6, 489-498, 1991.