

140

定数係数対称双曲型方程式系の半空間 における混合問題の解の挙動について

京大工 松村 睦豪

§0. 序

3次元 Euclid 空間 R^3 内のなめらかな compact closed surface
を境界とする外部領域 G において波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x)$$

を満足し, 初期条件

$$u(0, x) = g_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g_1(x) \quad (\text{例えば } g_0, g_1 \in C_0^\infty(G))$$

および境界条件

$$u(t, x)|_{x \in \partial G} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(t, x)|_{x \in \partial G} = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} \text{ は } \partial G \text{ における } G \text{ の } \right. \\ \left. \text{内法線方向への微分} \right)$$

をみたす解 $u(t, x)$ の $t \rightarrow \infty$ での挙動は T. Carleman [3], Wilcox
Morawetz [16], Mizohata [14], [15], Lax-Morawetz-Phillips [11] 等
によって研究された. Carleman はその著書 [3], Sur les équations
intégrales singulières ... (1923年) において 今日いわゆる Carleman
型と呼ばれる積分方程式の理論を展開し, その偏微分方程式論
への一つの応用として上の問題の解 $u(t, x)$ が $t \rightarrow \infty$ のとき G の

各 Compact set 上で一様に 0 に収束することを証明した。一方 J. Keller は 1959 年頃 hyperbolic equation の解の $t \rightarrow \infty$ での挙動が radiation and scattering problems に重要な役割を果たすことを指摘した。Wilcox は直ちに scattering obstacle が球の場合 解の特殊函数による explicit な表現式を解析することにより 解が $t \rightarrow \infty$ のとき G の各 Compact set 上で exponential decay することを示した (A.M.S. Notices, 1959) 続く C.S. Morawetz は 1961 年 C.P.A.M. において obstacle が star shaped の場合、解が $t \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{\sqrt{t}}$ で減少することを energy method を用いて示した (Dirichlet 境界条件のとき)。1963 年 Lax-Morawetz-Phillips は先の Morawetz の結果を用いて exponential decay を示した。他方 S. Mizohata [14] [15] は $\lambda^2 - \Delta$ に対する外部境界値問題の Green 函数 $G(x, y; \lambda)$ の λ に関する解析性を示しこれを用いて上の問題に対し Carleman とは異なる証明を与えている。

さてこれらの結果はすべて boundary が compact の場合であるが領域が半空間の場合にこの問題を考察することも興味があるように思われる。しかしこの場合にはもはや上のような積分方程式論を用いる方法や Morawetz の如き巧妙な技巧を用いた energy method は有効でないように思われる。ここでは半空間の特性を利用した Fourier-Laplace 変換の方法を用い、定数係数一階対称双曲型方程式系の半空間における混合問題に対し方程式と境界条件について後に正確に述べられる仮定の下で解が $t \rightarrow \infty$ のとき

半空間 $\mathbb{R}_+^n$ の各 compact set 上で一様に 0 に収束することを示す。
 (空間次元 $n \geq 2$)。その証明方針を標語的に言えば、混合問題
 に attach される自己共役作用素の spectral measure が原点を除いて
 絶対連続 (もちろん $\mathbb{R}^1$ 上の Lebesgue measure に関して) であることを
 stationary problem の Green 函数を構成しその性質から導くことである。

§1. 混合問題に関する若干の予備知識と問題の正確な設定

n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の half-space $\{x = (x', x_n), x_n > 0\} \subset \mathbb{R}_+^n$
 で表わす。こゝに $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ である。次の形の微分作用素

$$L = I \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

を考えよう。こゝで I は N 次単位行列で A_j は $N \times N$ constant
 hermitian matrices である。従って L は対称双曲型作用素になる。
 吾々は L に対する半空間 $\mathbb{R}_+^n$ における次の初期-境界値混合問題

$$\begin{cases} L[u(t, x)] = 0 & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n \\ \text{初期条件: } u(0, x) = g(x) & x \in \mathbb{R}_+^n \\ \text{境界条件: } B u(0, x)|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

を考える。 u 及び g は複素数値函数を要素とする $N \times 1$ 行列で
 ある。 B は境界において解 $u(t, x)$ が満足すべき l 個の linear
 relations を表わす $l \times N$ constant matrix で $\text{rank } B = l$ とする。
 行列 B を 境界条件 と呼ぶこともある。

$\mathbb{C}^N$ で N 次元 complex number space を表わそう。

$\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^l$ に canonical bases を固定し $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^l$ なる linear mapping の表現行列が B であるような operator をやはり B で記すことにし boundary operator と呼ぶ。また

$$\mathcal{B} = \ker B$$

とおく。 $\mathcal{B}$ は boundary space と呼ばれる。

$x_n = 0$ において境界条件を与えることに留意し quadratic form $A_n \zeta \cdot \bar{\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ を考える。

定義 1

$\mathcal{B}$ 上で $A_n \zeta \cdot \bar{\zeta} \geq 0$ のとき boundary condition B における boundary space $\mathcal{B}$ は dissipative であると言う。特に

$\mathcal{B} \ni \forall \zeta \neq 0$ に対し $A_n \zeta \cdot \bar{\zeta} > 0$ のとき strictly dissipative

$\mathcal{B} \ni \forall \zeta$ に対し $A_n \zeta \cdot \bar{\zeta} = 0$ のとき energy-preserving or conservative

と言う。また

$\mathcal{B} \ni \forall \zeta \neq 0$ に対し $A_n \zeta \cdot \bar{\zeta} < 0$ ならば accretive と呼ばれる。

定義 2

$\mathcal{B}$ を真部分空間として含む $\mathbb{C}^n$ の部分空間で その上で $A_n \zeta \cdot \bar{\zeta} \geq 0$ (resp. > 0 for $\zeta \neq 0$, resp. $= 0$) が成り立つものが存在しないとき boundary space $\mathcal{B}$ は maximally dissipative (resp. maximally strictly dissipative, maximally conservative) と呼ばれる。

境界における linear relations の数 l を少なくすれば n 次元は増大することに注意すれば上の条件は境界条件を課し過ぎることを排除するものである。従って上の性質をそれぞれ boundary condition B は minimally dissipative, minimally strictly dissipative, minimally conservative とおくことができる。

さて行列 A_n が non singular な場合 B が minimality をもてば境界における linear relations の数 l は Hermit 行列 A_n の n の固有値の数 (重複度もこめた) に等しい。

よく知られているように対称双曲型方程式系に対する minimally dissipative な境界条件を課す混合問題は L^2 -well posed である⁺

$$A = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad A(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j A_j \quad \text{とおく.}$$

さて今 A を elliptic operator 即ち $\exists^n \exists^V \xi \neq 0$ に対し $A(\xi) \neq 0$ がなりたつとしよう。⁺⁺

⁺ 一階対称(双曲)系は Friedrichs によって導入され (1954年), その境界値問題(混合問題)の well posedness は 1958 年以後 Friedrichs, Lax, Phillips, Sarason 等により研究された。例えば [5], [9], [10] をみよ。

そこで n はもっと一般な即ち変数係数でより一般な領域の場合にも係数の regularity や領域及び A_n に関する適当な仮定の下で L^2 -well posedness が確立されている。

⁺⁺ $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の real dual space でその duality は $\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ で与えられるものとする。

定義 3

boundary condition B (or boundary space $\mathcal{B}$) が coercive for A とは 適当な $C > 0$ が存在し $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ で, 有界な support をもち $v(x)|_{x_i=0} \in \mathcal{B}$ とする任意の v に対し

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\| \leq C (\|Av\| + \|v\|)$$

が 成り立つことを言う. ここで $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ を意味する.

λ を complex parameter として 行列

$$M(\xi'; \lambda) = A_n^{-1} \left(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j \right)$$

を考えよう. hyperbolicity より 次の事実が従う.*

" λ が実数でなければ" $\exists^{n-1} \ni \forall \xi' \text{ に対し } M(\xi'; \lambda) \text{ の}$
特性根は決して real にはならない"

また A が elliptic の場合 $\lambda = 0$ のときも $\exists^{n-1} \ni \forall \xi' \neq 0$ に対し そうで
ある. さらに $\lambda \neq \text{real}$ か 或いは $\lambda = 0$ のとき imaginary part が
正 (resp. 負) であるような $M(\xi'; \lambda)$ の 特性根に対応する (generalized)
eigenvectors によって張られる $\mathbb{C}^n$ の 部分空間を $E^+(\xi'; \lambda)$ (resp.
 $E^-(\xi'; \lambda)$) で表わし $M(\xi'; \lambda)$ の positive eigenspace (resp. negative
eigenspace) と呼ぶ

$\lambda \neq \text{real}$ で $\exists^{n-1} \ni \xi'$, 或いは $\lambda = 0$ で $\exists^{n-1} \ni \xi' \neq 0$ に対し

$$E^+(\xi'; \lambda) \oplus E^-(\xi'; \lambda) = \mathbb{C}^n$$

である.

* もちろん一般には A の ellipticity を仮定しない*で考える. たゞしそのとき A_n が non-singular であることは仮定する.

そして A が elliptic であるならば $N=2m$ である

$$\dim E^+(\xi'; \lambda) = \dim E^-(\xi'; \lambda)$$

となる。ただし空間次元 $n=2$ のときはこれを仮定する。

Lemma

B が一階対称楕円型作用素 A に対する coercive boundary condition である為の必要且十分条件は

$$i) \quad l = m (= \frac{N}{2})$$

$$ii) \quad \mathcal{B} \cap E^+(\xi'; 0) = \{0\} \quad \forall \xi' \neq 0$$

が成り立つことである。

Lax and Phillips [10] による。

以上の準備の下で 吾々の仮定と主要定理を述べよう。

(I) “作用素 L に関する仮定”

L.1) 対称双曲系 L は strictly hyperbolic である。すなわち

λ についての代数方程式 $\det(\lambda I - \sum_{j=1}^n \xi_j A_j) = 0$ の根は

$\mathbb{R}^n \ni \forall \xi \neq 0$ に対し (real) distinct.

L.2) L の伝播速度は決して 0 にならない。言い換えれば

A は elliptic operator である。

L.3) L の normal surfaces は nonsingular である。その上の

各点での Gaussian curvature $\neq 0$ 。

L.4) 行列 $M(\xi'; \lambda)$ の特性根は $\lambda \neq \text{real}$, $\forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し

distinct である。 λ が real のとき $\xi' \neq 0$ に対し実根は必ず double。

(II) “境界条件 B に関する仮定”

- B.1) B は minimally conservative である。
 B.2) B は coercive for A である。
 B.3) strict complementary condition (or uniform Lopatinski condition) for $A - \lambda : ^+$

boundary operator B は $\lambda \neq \text{real}$ のとき $\forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し $E^+(\xi'; \lambda)$ は $\mathbb{C}^l$ の上への 1-to-1 mapping であり λ が non real であるとき λ の実軸上の各点 $\neq 0$ の適当な近傍を動かすとき linear operator $B^{-1}(\xi'; \lambda)$ の operator norm は一様に下から押えられる。

注意 1.

条件 B.1), B.2), B.3) の何れからでも $l = m (= \frac{N}{2})$ であることが要請される。

注意 2.

$E^+(\xi'; \lambda)$ に長さ 1 の vectors よりなる basis $h_1^+(\xi'; \lambda), \dots, h_m^+(\xi'; \lambda)$ をとるとき B.3) は Lopatinski determinant⁺⁺

$$\det(\langle h_i, h_j^+(\xi'; \lambda) \rangle) \neq 0 \quad \text{for } |\xi'| + |\lambda|^2 = 1$$

を意味する。ただし h_i は B の第 i 行 vector で $\langle, \rangle$ は real inner product を表わす

注意 3.

条件 (I) L.1), L.2), L.3), L.4) を満足する最も典型的なものは characteristic equations が

$$\det(\lambda I - \sum_{j=1}^m \xi_j A_j) = (\lambda^2 - a_1^2 |\xi|^2) \cdots (\lambda^2 - a_m^2 |\xi|^2)$$

$$a_1 > \cdots > a_m > 0$$

⁺⁾ elliptic となっても一階なので Agmon-Douglis-Nirenberg [1] によって取り扱われたものとはやや異質なものであるがその理論の analogy からこのように名付けてよいであろう。(Agmon [2], Heresh [8], Sarason [18] 参照)

で与えられる isotropic case すなわち伝播速度 (今の場合 $a_1, \dots, a_m$) がどの方向に関係しない場合である。

MAIN THEOREM

作用素 L , 境界条件 B に関する上の仮定の下で混合問題

$$\begin{cases} L[u(t, x)] = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = g(x) & g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ B[u(t, x)] = 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

の解 $u(t, x)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbb{R}^n$ の各 compact set 上で一様に 0 に収束する。

仮定 (I) をみたす operator L に対する証明も (注 3) の isotropic case の場合の証明と本質的な変更を加える必要はないので簡単の爲こゝでは isotropic の場合について説明し一般の場合は修訂すべき点 (3ヶ所のみ) を注意するにとめるよう。

主要定理へ到達する爲の吾々の plan は次の通りである。

§2. Free space における operator $A - \lambda I$ の基本解と $|x| \rightarrow \infty$ での挙動 ($\lambda \rightarrow \text{real}$ のときの一般評価)。

§3. Poisson kernel の構成。

§4. Green 函数の構成と $\lambda \rightarrow \text{real}$ のときの性質

§5. 主要定理の証明

以後各々についての説明を行うが詳細については講演者の論文 (数研紀要, Series A, vol. 4, No. 2. 発表予定) を参照されたい。

§ 2. Free space における operator $A - \lambda I$ の基本解とその $|x| \rightarrow \infty$ での挙動.

吾々は先の注 3. において述べた isotropic case について話を
す、めるが、この手の結果は次の条件を満たす作用素 L に対し直ちに
一般化できることをまず注意しておく。⁺

L.1') L は次の意味で双曲型である: a) 行列 $\lambda I - A(\xi)$ の
特性根は $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ に対しすべて real で $\xi \neq 0$ に対し重複度一定
すなわち $\det(\lambda I - A(\xi)) = (\lambda - \lambda_1(\xi))^{v_1} \cdots (\lambda - \lambda_k(\xi))^{v_k}$
 $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_k(\xi)$ は real distinct,

b) 行列 $A(\xi)$ は diagonalisable

L.2') $\lambda_j(\xi) \equiv 0$ 或 $\lambda_j(\xi) \neq 0$ for $\forall \xi \neq 0$

L.3)

さて λ を non real complex number とするとき微分作用素 $A - \lambda I$
の一つの基本解は

$$E(x; \lambda) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1} [(A(\xi) - \lambda I)^{-1}]$$

で与えられる。こゝに $\mathcal{F}^{-1}$ は Fourier 逆変換を表わす。 $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば

$$\mathcal{F}^{-1}[\rho] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \rho(\xi) d\xi \text{ で定義される。}$$

$$\lambda = \eta \pm i\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \eta: \text{real とおく。}$$

⁺ この手は $\mathbb{R}^n$ 全体での話だから境界条件はもちろん考えてない。従って仮定は (I)
のみでよゝが L に関する仮定でも 対称性, strict hyperbolicity, A の ellipticity
及び L.4) は必要でない。これらは後の混合問題の取り扱いの爲に仮定された。

$(A(\xi) - (k + i\varepsilon))^{-1}$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $\delta'(\mathbb{R}^n)$ で

$vp(A(\xi) - kI)^{-1}$ + measure concentrated on the normal surfaces

なる形の distribution に収束する. 従って distribution として

$$E(x, k + i0) = \mathcal{F}^{-1} [vp(A(\xi) - kI)^{-1} + \dots]$$

は存在する. $E(x, k - i0)$ も同称である. しかし吾々はもっと正確に pointwise な意味での極限値の存在を示すことができる.

定理 2.1

$x \neq 0$, $k \neq 0$ に対し

$$E^{(\nu)}(x; k \pm i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\nu E(x; k \pm i\varepsilon)$$

が存在し $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times (\mathbb{R}^1 - \{0\})$ で (x, k) の連続函数になる.

“証明の概略”

$$\lambda_j^\pm(\xi) = \pm a_j |\xi| \quad \text{として}$$

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^+(\xi) P_j^+(\xi) + \lambda_j^-(\xi) P_j^-(\xi)$$

と分解される. ここで $P_j^\pm(\xi)$ は $\lambda_j^\pm(\xi)$ に対応する固有空間への projection であって次の形の行列で与えられる.

$$P_j^\pm(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} (A(\xi) - \lambda I)^{-1} d\lambda = \frac{\text{res}_{\lambda=\lambda_j^\pm(\xi)} (\lambda I - A(\xi))}{\frac{d}{d\lambda} \{\det(\lambda I - A(\xi))\}} \Big|_{\lambda=\lambda_j^\pm(\xi)}.$$

このとき

$$(A(\xi) - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j^+(\xi) - \lambda} P_j^+(\xi) + \frac{1}{\lambda_j^-(\xi) - \lambda} P_j^-(\xi)$$

と表わされる.

実数 $k_0 \neq 0$ を任意に固定し λ は $\Lambda_\delta = \{\lambda; |\operatorname{Re} \lambda - k_0| < \delta\}$ 内に
あるとしよう。今

$$\phi_0(r) = \begin{cases} 1 & |r| \leq 2\delta \\ 0 & |r| \geq 3\delta \end{cases}$$

$$\phi_j(r) = \begin{cases} 1 & |r - \frac{k_0}{a_j}| \leq \frac{2\delta}{a_j} \\ 0 & |r - \frac{k_0}{a_j}| \geq \frac{3\delta}{a_j} \end{cases} \quad (j=1, \dots, m)$$

なる函数で $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ に属するものをとる。こゝで δ は区間 $[-3\delta, 3\delta]$,
 $[\frac{k_0-3\delta}{a_j}, \frac{k_0+3\delta}{a_j}]$ ($j=1, \dots, m$) が disjoint となるように小さくとつて
おく。これらの函数を用い次の変形を行う。

$k_0 > 0$ のとき

$$\begin{aligned} E(x; \lambda) &\equiv \mathcal{F}^{-1}[(A(\xi) - \lambda I)^{-1}] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\phi_0(|\xi|)(A(\xi) - \lambda I)^{-1}] \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(1-\phi_0(|\xi|))(1-\phi_j(|\xi|))}{a_j|\xi|-\lambda} P_j^+(\xi) + \frac{(1-\phi_0(|\xi|))}{-a_j|\xi|-\lambda} P_j^-(\xi)\right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\phi_j(|\xi|)}{a_j|\xi|-\lambda} P_j^+(\xi)\right] \equiv E_1(x; \lambda) + E_2(x; \lambda) + E_3(x; \lambda) \end{aligned}$$

$k_0 < 0$ のときも対応する変形を行う。

さて上式の右辺第一項の $[\quad]$ の中は $\lambda \in \Lambda_\delta$ のとき ξ の C_0^∞ 函数で
 λ に解析的に依存している。従つて $E_1(x; \lambda)$ は x の C^∞ 函数で
それ自身および x に関する導函数は λ について解析的である。
又 $|x| \rightarrow \infty$ のとき $|x|^{-1}$ のどんな正数中よりも速く減少する。しかも
 $\Lambda_{\delta, \varepsilon_0} = \{\lambda; |\operatorname{Re} \lambda - k_0| < \delta, |\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon_0\}$ なる λ について一様である。

第二項の [] の中を $Q(\xi; \lambda)$ で表わせば $\lambda \in \Lambda_\delta$ のとき ξ の C^∞ 函数で $\xi=0$ のまわりで 0 でありしかも任意の multi-index ν に対し

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\nu Q(\xi; \lambda) \right| \leq C (1 + |\xi|)^{-|\nu|-1}$$

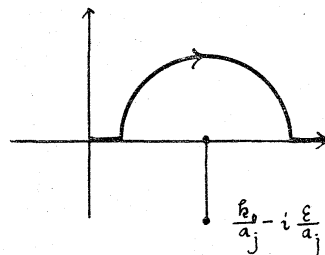
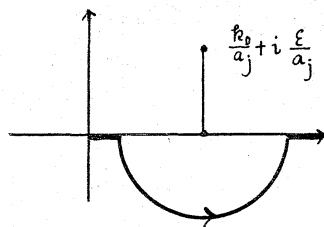
が成り立つ. λ が $\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}$ を動くとき C は一定にとれる. 従って

$E_2(x; \lambda) = \mathcal{F}^{-1}[Q(\xi; \lambda)]$ は $x \neq 0$ で C^∞ でそれ自身およびその導函数は λ について Continuous (実際には解析的). 又 $|x| \rightarrow \infty$ のとき $|x|^{-1}$ のどんな正数中よりも速く減少する. しかも $\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}$ に属する λ に関し一様である.

第三項 $E_3(x; \lambda)$ は積分の形で表わされるから極座標へ変換する

$$E_3(x; \lambda) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \frac{r^{n-1} \phi_j(r)}{a_j r - (k \pm i\varepsilon)} \left\{ \int_{\Omega} e^{i\langle x, \omega \rangle r} P_j^+(\omega) d\omega \right\} dr$$

となる. ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ 内の単位球で $d\omega$ はその surface element を表わす. $\phi_j(r)$ が $r = \frac{k_0}{a_j}$ の近くで 1 であることを注意し integrand を r について $\frac{k_0}{a_j}$ のまわりで complex に拡張し積分路を $k \pm i\varepsilon$ に応じそれぞれ下図の如く変形する.



このとき $E_3^{(\nu)}(x; k \pm i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E_3(x; k \pm i\varepsilon)$ の存在や (x, k) についての連続性は明らか.

さて次に $E^{(u)}(x; k \pm i\varepsilon)$ の $|x| \rightarrow \infty$ での漸近的挙動を考察する。
 即ち $|x| \rightarrow \infty$ のときの x についての減少の order の $\lambda = k \pm i\varepsilon$ ($|k - k_0| < \delta$,
 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$) に関する一称評価を問題にしよう。既に注意したこと
 からわかるように問題となるのは $E_3(x; k \pm i\varepsilon)$ のみであるが
 この $|x| \rightarrow \infty$ のときの減少の order を正確に出す為には次の2つの
 lemma を用意する。

まず単位球面 Ω 上に concentrate された measure の Fourier 像
 の無限遠での挙動に関するものである。[†]

Lemma 2.1

$$I(x) \equiv \int_{\Omega} e^{i\langle x, \omega \rangle} \mu(\omega) d\omega$$

と置く。ここで $\mu(\omega)$ は Ω 上で C^∞ な函数とする。そのとき $x = |x|\theta$

と置くとき次の asymptotic formula が成り立つ。

$$I(x) = \mu(\theta) \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{i(|x| - \frac{\pi}{4}(n-1))} + \mu(-\theta) \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-i(|x| - \frac{\pi}{4}(n-1))} \\ + q(x)$$

$$|q(x)| + \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{\text{Const}}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

“証明の方針”

$x = (0 \cdots 0 x_n)$ の場合に示せばよい。実際一般の場合は

[†] isotropic である場合 Ω の代りに normal surfaces をとらねばならぬ
 がそのときにも仮定 (I) L.3) より全く同一の証明方針で類似の formula が
 得られる。

座標軸の回転を用いることによりこの場合に帰着されるからである。吾々はまず

$$I(x_n) \equiv I(0 \cdots 0 x_n) = \int_{\Omega} e^{i x_n \omega_n} \mu(\omega) d\omega$$

の $|x_n| \rightarrow \infty$ のときの挙動に関する principal contribution は法線が $(0 \cdots 0 x_n)$ と平行であるような球面上の点即ち北極 $(0 \cdots 0 1)$ と南極 $(0 \cdots 0 -1)$ のまわりでの積分によるものであることを示そう。

球面 Ω を C^∞ manifold と考へ十分小さな座標近傍 $\{U_j\}_{1 \leq j \leq \ell}$ で Ω をおおう。 $\{U_j\}$ に従属する球面上の C^∞ 単位の分解

$$1 = \sum_1^\ell f_j(\omega), \quad \text{supp } f_j \subset U_j$$

をと

$$I(x_n) = \sum_1^\ell \int_{\Omega} e^{i x_n \omega_n} \mu_j(\omega) d\omega, \quad \mu_j(\omega) = \mu(\omega) f_j(\omega)$$

と分解する。そのとき北極や南極を含め U_j に対しては U_j を座標近傍とする任意の局所座標 $\sigma = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})$:

$$\omega_k = \omega_k(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \quad (k=1, \dots, n)$$

をとると U_j の各点における法線は $(0 \cdots 0 x_n)$ と平行にはならぬ。から接ベクトル $(\frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma_i} \cdots \frac{\partial \omega_n}{\partial \sigma_i})$ は $(0 \cdots 0 x_n)$ と直交しない。即ち

$$x_n \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \sigma_i}(\sigma) \neq 0$$

が成り立つ。そこで

$$\int e^{i x_n \omega_n} \mu_j(\omega) d\omega = \int e^{i x_n \omega_n(\sigma)} \mu(\omega(\sigma)) \frac{D(\omega)}{D(\sigma)} d\sigma$$

と表わし σ について部分積分を何回もくり返すと $|x_n| \rightarrow \infty$ のとき

この積分は $|x_n|^{-1}$ の任意正数中よりも速く減少することがわかる。

従って μ_j の support が北極点または南極を含む U_j 内に含まれる

場合のみが問題となる。北極や南極のまわりではそれぞれ

$$\omega_n = \sqrt{1 - \omega_1^2 - \dots - \omega_{n-1}^2}, \quad -\sqrt{1 - \omega_1^2 - \dots - \omega_{n-1}^2} \quad \text{と表わされるが } \omega_1 = \dots = \omega_{n-1}$$

$= 0$ はこれらの函数のいわゆる regular critical point である。

そこで M. Morse の lemma を適用すると、適当な座標 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$

をとり $\omega_n = \pm (1 - \sigma_1^2 - \dots - \sigma_{n-1}^2)$ と表わすことができる。そして

Jacobien は $\frac{D\omega}{D\sigma} = 2^{\frac{n-1}{2}}$ (一般の場合 (Gauss の曲率) $^{-\frac{1}{2}}$ がこれにかかる)

となる。この $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ を用い積分を書き直せば漸近展開に関

する stationary phase の方法を用いることができる。lemma を

述べられた形を導くにはや、煩雑な計算を必要とするのでこ

では省略する。たゞ principal term は

$$2^{\frac{n-1}{2}} \mu(0, \dots, 0, \pm 1) \prod_{j=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i x_n \sigma_j^2} d\sigma_j$$

なる項より変数変換で Fresnel 積分に帰着することによりもたら

されることのみを注意しておく。

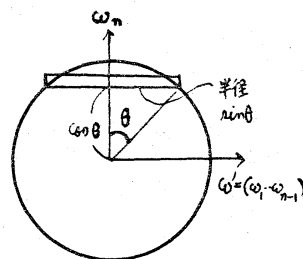
注意

$$\mu(\omega) \equiv 1 \text{ のとき } d\omega = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} (\sin\theta)^{n-2} d\theta$$

となるから

$\operatorname{Re}(\nu + \frac{1}{2}) > 0$ のときの Bessel 函数の積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2\nu}\theta e^{-ix \cos\theta} d\theta$$



と漸近公式

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}}), \quad x \rightarrow \infty$$

より

$$\begin{aligned} I(x_n) &= \int_{\Omega} e^{i x_n \omega_n} d\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(x_n) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \cos\left(x_n - (n-1)\frac{\pi}{4}\right) + O(x_n^{-\frac{n+1}{2}}) \end{aligned}$$

と前りの結果と一致する。

Lemma 2.2

k_0 を $\text{real} \neq 0$ とし δ は区間 $[k_0 - 3\delta, k_0 + 3\delta]$ が 0 を含まないような正数とする。 $\rho \in C_0^\infty((k_0 - 3\delta, k_0 + 3\delta))$, $I(x)$ を Lemma 2.1 における函数とするとき

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(r)}{r - (k \pm i\varepsilon)} I(rx) dr \right| \leq C |x|^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{for } \begin{array}{l} |x| \geq R \\ |k - k_0| < \delta \\ \varepsilon > 0 \end{array}$$

が成り立つ。ここで定数 C は ρ や μ には関係するが ε や上の範囲の k, x には関係しない。

“証明の方針”

Lemma 2.1 を適用し $(r - (k \pm i\varepsilon))^{-1}$ の Fourier transform

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda r}}{r - (k \pm i\varepsilon)} dr = \pm 2\pi i Y(\pm\lambda) e^{i(k \pm i\varepsilon)\lambda}, \quad \varepsilon > 0$$

$Y(\lambda)$ は Heaviside 函数

と

$$\left| \int_{-3\delta}^{3\delta} \frac{dr}{r \pm i\varepsilon} \right|, \quad \int_{-3\delta}^{3\delta} \left| \frac{r}{r \pm i\varepsilon} \right| dr \leq \text{Const. for all } \varepsilon > 0$$

なることを用いなければならない。

これらの Lemmas を用いることにより次の定理が従う。

定理 2.2

k_0 を 0 でない実数とし δ, ε_0 を適当に定められた正数とし
よう。このとき任意の multi-index ν に対し適当に定数 $C, R > 0$
をとれば

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; k \pm i\varepsilon) \right| \leq C |x|^{-\frac{n-1}{2}} \text{ for } |x| \geq R, |k - k_0| < \delta, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

が成り立つ。

吾々が後で用いるのは次の事実である。

系

$y \in \mathbb{R}_+^n$, $\forall \nu$: multi index, $\forall q > 2$ に対し

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x-y; k \pm i\varepsilon) \right|_{x_n=0} \in L^q(\mathbb{R}_x^{n-1})$$

である ($\varepsilon > 0$)。しかも写像

$$(y, k, \varepsilon) \longrightarrow \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x-y; k \pm i\varepsilon) \right|_{x_n=0} \in L^q(\mathbb{R}_x^{n-1})$$

は連続である。

§3. Poisson kernel の構成

§3 及び §4 の結果は仮定(I), (L.1), (L.3), (L.4) および仮定
(II) B.3) の下で成り立つ。すなわち A の ellipticity, 境界条件に関する
minimal conservative な性質および Coerciveness は必要でない。

§1 において述べた hyperbolic system L に対する混合問題に associate される stationary problem 即ち operator $A - \lambda$ に対する次の境界値問題

$$\begin{cases} (A - \lambda I) v(x; \lambda) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}_+^n \quad (\lambda \neq \text{real}) \\ B v(x; \lambda) \Big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

を考える。この問題の Poisson kernel は

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) K(x; \lambda) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ B K(x; \lambda) \Big|_{x_n=0} &= \delta(x') I \end{aligned}$$

を満足する $(2m) \times m$ tempered matrix distribution $K(x; \lambda)$ である。 B は $m \times (2m)$ 定数行列であつたから、この I は m 次単位行列を表わす。

$K(x; \lambda)$ を構成する為 発見的考察として上の式を $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ について形式的に Fourier 変換する。 K の Fourier 像を $\tilde{K}$ で表わせば $\tilde{K}(\xi', x_n; \lambda)$ は (ξ', λ) を parameters とする常微分方程式

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx_n} \tilde{K}(\xi', x_n; \lambda) = M(\xi'; \lambda) \tilde{K}(\xi', x_n; \lambda), \quad x_n > 0$$

の解で

$$B \tilde{K}(\xi', 0; \lambda) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} I$$

を満足し、しかも $x_n \rightarrow \infty$ のとき x_n については有て x_n の正数中の order でしか増大しない。 吾々はこれらを考慮に入れ (ξ', λ) を parameters とする常微分方程式系

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx_n} U(\xi', x_n; \lambda) = M(\xi'; \lambda) U(\xi', x_n; \lambda), \quad x_n > 0$$

の附帯条件

$$U(\xi', x_n; \lambda) = O(x_n^p), \quad x_n \rightarrow \infty \quad \left(\begin{array}{l} p \text{ は一定} \\ \text{するとして} \end{array} \right. \begin{array}{l} \xi', \lambda \text{ に depend} \\ \end{array} \right)$$

$$BU(\xi', 0; \lambda) = g \in \mathbb{C}^m$$

の下での解に関する考察から始める。

吾々は今 isotropic case を考えているから行列 $M(\xi'; \lambda)$
 $= A_n^{-1}(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j)$ の固有値は explicit に

$$\tau_j(\xi'; \lambda) = \left\{ \left(\frac{\lambda}{a_j} \right)^2 - |\xi'|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (j=1, \dots, m)$$

で与えられる。 $\text{Im } \tau_j > 0$ なる固有値を $\tau_j^+(\xi'; \lambda)$ で表わそう。

吾々は後で $U(\xi', x_n; k \pm i\varepsilon)$ の $\varepsilon \downarrow 0$ なる limit を考える必要がある為次のことに注意する。

$\tau_j^+(\xi'; \lambda)$ は $\tau_j^+(\xi'; k + i0)$ (resp. $\tau_j^+(\xi'; k - i0)$) を $\lambda = k$ における値と考えることにより上半平面 $\{\lambda; \text{Im } \lambda \geq 0\}$ (resp. 下半平面 $\{\lambda; \text{Im } \lambda \leq 0\}$) で (ξ', λ) の連続函数となる。しかも $\forall \alpha$ ($1 \leq \alpha < 2$) に対し

$$(\star) \quad \tau_j^+(\cdot; k \pm i\varepsilon), \frac{\partial \tau_j^+}{\partial \xi_i}(\cdot; k \pm i\varepsilon) \in L^\alpha \left(\left\{ \xi'; |\xi'| \leq \frac{k_0 + 2\delta}{a_m} \right\} \right) \quad \text{for } |k - k_0| < \delta, \varepsilon \geq 0$$

が成り立つ。

次の吾々の仕事は $\tau_j^+(\xi'; \lambda)$ に対応する eigenvector $h_j^+(\xi'; \lambda)$ を $h_j^+(\xi'; k \pm i0)$ が nontrivial vector として存在ししかも上の性質 $(\star)$ をもつように構成することである。

行列 $M(\xi'; \lambda)$ は λ が real $\neq 0$ となるときある ξ' に対しては

⊕ isotropic な場合は explicit な形からわかるが一般の場合は仮定 (I), L.4 より Puiseux 展開の議論を用いてこの性質が示される。

double real eigenvalues をもつからそこで eigenvector $h_j^+(\xi'; \lambda)$ が trivial vector になつたり或は regularity (一般には連続性も) が失われる危険性がある。しかし吾々の場合 (一般のときは仮定 (I) L.1), L.4) より) 求むるものが次のようにして構成できる。

まず行列 $(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \tau A_n) \Big|_{\tau = \tau_j^+(\xi'; \lambda)}$ の各列 vector は $M(\xi'; \lambda)$ の固有値 $\tau_j^+(\xi'; \lambda)$ に対応する固有 vector であることに注意する。 $\lambda = \text{real}$ のとき strict hyperbolicity よりこれらの列 vector の中に (ξ', λ) について local には zero vector にならぬものが存在する。これと列 vector の (ξ', λ) に関する homogeneity とを便し有限個の $C_{\xi'}^{\infty}$ 函数からなる $\mathbb{R}^{n-1}$ 空間の単位の分解を用いて $h_j^+(\xi'; \lambda)$ を構成することができる。

吾々は再び $\lambda \neq \text{real}$ の場合に帰ろう。 $\lambda \neq \text{real}$ のとき $M(\xi'; \lambda)$ の固有値はすべて相異なるからこのようにして作られた $h_1^+(\xi'; \lambda), \dots, h_m^+(\xi'; \lambda)$ は行列 $M(\xi'; \lambda)$ の positive eigenspace $E^+(\xi'; \lambda)$ の一つの基底をつくる。

さて常微分方程式系 $\frac{1}{i} \frac{d}{dx_n} U(\xi', x_n; \lambda) = M(\xi'; \lambda) U(\xi', x_n; \lambda)$ の x_n について tempered 解 $U(\xi', x_n; \lambda)$ (ξ', λ は任意に固定して考える) は

$$U(\xi', x_n; \lambda) = \sum_{j=1}^m d_j(\xi'; \lambda) e^{i \tau_j^+(\xi'; \lambda) x_n} h_j^+(\xi'; \lambda)$$

と一意的に表わされる。従つて上の方程式の解 $U(\xi', x_n; \lambda)$ が x_n について tempered であることと $U(\xi', 0; \lambda) \in E^+(\xi'; \lambda)$ とは同値 + $x_n \geq 0$ で考える。

である。このことに注意すれば次の補題が成り立つ

Lemma 3.1

1° $\forall g \in \mathbb{C}^m$ に対し

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx_n} U(\xi', x_n; \lambda) = M(\xi'; \lambda) U(\xi', x_n; \lambda), \quad x_n > 0$$

$$B U(\xi', 0; \lambda) = g$$

の tempered solution が一意的に存在する。

2° linear operator B は $E^+(\xi'; \lambda)$ を $\mathbb{C}^m$ の上への 1 対 1 写像である。

3° $\mathcal{O} (= \ker B) \cap E^+(\xi'; \lambda) = \{0\}$ 。

4° Lopatinski determinant は 0 にならない。即ち

$$\det(\langle b_\mu, h_\nu^+(\xi'; \lambda) \rangle) \neq 0.$$

そこで行列 $(\langle b_\mu, h_\nu^+(\xi'; \lambda) \rangle)$ の第 j 列を $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{(k)}$ で置きかえて得られる行列を $\mathcal{H}_{kj}(\xi'; \lambda)$ で表わし

$$U_k(\xi', x_n; \lambda) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^m \frac{\mathcal{H}_{kj}(\xi'; \lambda)}{\det(\langle b_\mu, h_\nu^+(\xi'; \lambda) \rangle)} e^{i\tau_j^+(\xi'; \lambda)x_n} h_j^+(\xi'; \lambda)$$

($k=1, \dots, m$)

とおく。そして長さ $2m$ の列 vector U_k を第 k 列とみる $(2m) \times m$

行列 $(U_1(\xi', x_n; \lambda), \dots, U_m(\xi', x_n; \lambda))$

を考え $K(x', x_n; \lambda)$ を $\mathbb{C}^m$ で新しく

$$K(x', x_n; \lambda) = \mathcal{H}_{\xi'}^{-1} [(U_1(\xi', x_n; \lambda), \dots, U_m(\xi', x_n; \lambda))]$$

で定義する。このとき $K(x', x_n; \lambda)$ は Poisson kernel である。

実際 次の定理が成り立つ。

定理 3.1

$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{n-1})$ に対し 函数 $V(x; \lambda) = K(x; \lambda) *_{(x')} g(x')$
は境界値問題

$$(A - \lambda I) V(x; \lambda) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n \quad (\lambda \neq \text{real})$$

$$B V(x; \lambda) \Big|_{x_n=0} = g(x')$$

の $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ における一意的な解を与える。

さて吾々は $\lambda \neq \text{real}$ と考えてきたが $U_h(\xi', x_n; \lambda)$ を与える

formula と仮定 (II) B.3) より $K(x', x_n; h \pm i0)$ が distribution
として存在することがわかる。もっと正確に

$$[0, \infty) \ni x_n \rightsquigarrow K(\cdot, x_n; h \pm i0) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^{n-1})$$

は連続で $x_n > 0$ で x_n について C^∞ である。

§4. Green 函数の構成と $\lambda \rightarrow \text{real}$ のときの性質

system $\{A - \lambda I, B\}$ の Green 函数 $G(x, y; \lambda)$ は §2 で定義さ
れた自由空間での基本解 $E(x; \lambda)$ を用い

$$G(x, y; \lambda) = E(x - y; \lambda) - E_c(x, y; \lambda)$$

なる形で求められる。ここで $E_c(x, y; \lambda)$ は compensating kernel
と呼ばれるもので非斉次な境界条件をもつ境界値問題

$$\begin{cases} (A - \lambda I) E_c(x, y; \lambda) = 0 \\ B E_c(x, y; \lambda) \Big|_{x_n=0} = B E(x - y; \lambda) \Big|_{x_n=0} \end{cases}$$

の解として得られる。従って $E_c(x, y; \lambda)$ は δ で構成した Poisson kernel を用い、形式的には

$$E_c(x, y; \lambda) = K(x; \lambda) *_{(x)} \left(B E(x-y; \lambda) \Big|_{x=0} \right)^+$$

なる形で与えられる。

この δ の目的は $\lambda = k \pm i\varepsilon$ が $\varepsilon \downarrow 0$ のときも含めて上の合成積が意味をもち、そして $E_c(x, y; k \pm i0)$ が $x \neq y, k \neq 0$ で (x, y, k) について連続であることを示すことにある。

k_0 を 0 でない実数とし λ は $\bar{\Lambda}^+ = \{k + i\varepsilon; |k - k_0| \leq \delta, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ を動くとしよう ($\lambda \in \bar{\Lambda}^- = \{k - i\varepsilon; |k - k_0| \leq \delta, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ の場合も同様に扱うことができる)。 y を $\mathbb{R}^n$ の任意の点とし固定する。行列 $K(x; \lambda)$ の任意の要素を $\Psi(x; \lambda)$ で $B E(x-y; \lambda) \Big|_{x=0}$ の任意の要素を $\Psi(x'; \lambda) \equiv \Psi(x', y; \lambda)$ で表わすことにする。

まず Ψ をその x' についての Fourier 像が $\lambda = k + i0$ のとき ξ' の函数として、singularity をもつ部分と C^∞ ではあるが $|\xi'| \rightarrow \infty$ のときあまり速くは減少しない部分とに分ける。即ち

$$|\lambda| > \frac{|k_0| + 2\delta}{a_m} \quad (a_m \text{ は最小の伝播速度})$$

なる正数 λ をとり 函数 $e \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\xi'}^{n-1})$ で

$$e(\xi') = \begin{cases} 1 & |\xi'| \leq 1 \\ 0 & |\xi'| \geq 1 + 1 \end{cases}$$

† $G(x, y; \lambda), E(x; \lambda), E_c(x, y; \lambda)$ は $(2m) \times (2m)$ 行列, $K(x; \lambda)$ は $(2m) \times m$ 行列
 B は $m \times (2m)$ 行列, $B E(x-y; \lambda)$ は $m \times (2m)$ 行列 である。

なるものを選び固定する。そして重を

$$\Phi(x; \lambda) = \Phi_1(x; \lambda) + \Phi_2(x; \lambda)$$

$$\tilde{\Phi}_1(\xi', x_n; \lambda) = e(\xi') \tilde{\Phi}(\xi', x_n; \lambda)$$

$$\tilde{\Phi}_2(\xi', x_n; \lambda) = (1 - e(\xi')) \tilde{\Phi}(\xi', x_n; \lambda)$$

と分解する。そのとき仮定 B.3) より

$$\tilde{\Phi}_2 \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}_{\xi'}^{n-1}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{temperated } C^\infty\text{-function} \\ \text{の空間} \end{array} \right)$$

が従う。よって $\Phi_2 \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$ (急減少超函数の空間) とある。

一方 $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$ より convolution $\Phi_2 *_{(x')} \Psi$ は意味をもつ。そして

$$\Phi_2 *_{(x')} \Psi = (1 - \Delta')^{-N} \Phi_2(x', x_n; \lambda) * (1 - \Delta')^N \Psi(x'; \lambda)$$

が成り立つ。ここで $\Delta' = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とある。

$p \geq 1$ に対し N を十分大きくすると

$$(1 - \Delta')^{-N} \Phi_2(\cdot, x_n; \lambda) \in L^p(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$$

とある。一方定理 2.2 の系より $\forall q > 2$ に対し

$$(1 - \Delta')^N \Psi(\cdot; \lambda) \in L^q(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$$

が成り立つ。このとき

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} \quad \text{とある } r \geq 1$$

がとれ合成積 $\Phi_2 *_{(x')} \Psi$ は $\lambda = \kappa + i\varepsilon \in \overline{\Lambda}_+$ のとき $L^r(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$ に

属し $(x_n, \lambda) \rightsquigarrow \Phi_2 *_{(x')} \Psi \in L^r(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$ は連続とある。

$(\frac{\partial}{\partial x'})^{d'} (\frac{\partial}{\partial x_n})^{d_n} \Phi_2 *_{(x')} \Psi$ についても同様である。

次に $\Phi_1 *_{(x')} \Psi$ を考えよう。

$\forall q > 2$ に対し $\Psi(\cdot; \lambda) \in L^q(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$ が成り立つことより適当な

p ($1 < p < 2$) に対し $\Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ が与えられ,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ とある $r \geq 1$ が与えられ $\Phi_1^*, \Psi \in L^r(\mathbb{R}^{n-1})$ が与えられる.

そこでそのような p の存在を示そう.

簡単のため $\Phi_1(x', x_n; \lambda) \in \Phi_1(x'; \lambda)$ と書く.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\Phi_1(x'; \lambda)|^p dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|x'|)^{-p} |(1+|x'|)\Phi_1(x'; \lambda)|^p dx'$$

Hölder の不等式により

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|x'|)^{-ap} dx' \right\}^{\frac{1}{a}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(1+|x'|)\Phi_1(x'; \lambda)|^{bp} dx' \right\}^{\frac{1}{b}}$$

とある. ここで $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ で $a, b \geq 1$ である.

まず $\{ \quad \}$ の積分が存在する場合には

$$ap > n-1$$

が成立せねばならぬ. 一方

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(1+|x'|)\Phi_1(x'; \lambda)|^{bp} dx' \right\}^{\frac{1}{b}} \\ & \leq \| \Phi_1(\cdot; \lambda) \|_{L^{bp}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} \| x_j \Phi_1(\cdot; \lambda) \|_{L^{bp}(\mathbb{R}^{n-1})} \end{aligned}$$

であるが $\lambda = \frac{bp}{bp-1}$ とおくと $1 < \lambda < 2$ である.

$bp > 2$ と仮定して L^p の Fourier 変換に関する

Titchmarsh and M. Riesz の定理により

$$\| \Phi_1(x'; \lambda) \|_{L^{bp}} \leq \| \tilde{\Phi}_1(\xi'; \lambda) \|_{L^{\lambda}}$$

$$\| x_j \Phi_1(x'; \lambda) \|_{L^{bp}} \leq \| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \tilde{\Phi}_1(\xi'; \lambda) \|_{L^{\lambda}} \quad (j=1, \dots, n-1)$$

が成り立つ。ところがこれらの式の右辺が有限なことが §2
における $\mathcal{E}_j^+(\xi'; k \pm i\varepsilon)$ や $\mathcal{H}_j^+(\xi'; k \pm i\varepsilon)$ が性質 (★) を満たして
いることと $U_k(\xi', x_n; \lambda)$ を与える formula 及び仮定 B.3) から
従う。このようにして

$$1 \leq p < 2, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \quad a, b \geq 1$$

$$ap > n-1 \quad bp > 2 \quad (\text{or } 1 < \frac{bp}{bp-1} < 2)$$

を満足する a, b, p の存在が示されればよゝゝがこれは容易
である。同様に $(\frac{\partial}{\partial x})^{d'} (\frac{\partial}{\partial x_n})^{d_n} \Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) \in L^p(\mathbb{R}_x^{n-1})$ とする p
($1 \leq p < 2$) の存在も示され

$$(x_n, y, \lambda) \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{d'} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{d_n} \Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) *_{(x')} \Psi(\cdot, y; \lambda)$$

$$\in L^r(\mathbb{R}_x^{n-1})$$

の連続性も示える。

これらのことより $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{n-1})$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} E_c(x, y; k \pm i0) g(y) dy$$

は x について C^∞ で、その x についての任意の derivative が $\mathbb{R}_+^n \times (\mathbb{R}^1 - \{0\})$
において (x, k) の連続函数となることが従う。定理 2.1 と結合す
れば次の定理を得る。

定理 4.1 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ とする。そのとき任意の multi-index
 ν に対し

$$G_{k \pm i0}^{(\omega)} g(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu \int_{\mathbb{R}_+^n} G(x, y; k \pm i0) g(y) dy$$

は $\mathbb{R}_+^n \times (\mathbb{R}^1 - \{0\})$ において (x, k) の連続函数である。

§ 5. 主要定理の証明

吾々は § 1 で述べた主要定理を得る爲、問題を L^2 空間の枠内で取り扱う。

微分作用素 $A = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ を $L^2(\mathbb{R}_+^n)^{++}$ における定義域

$$D(A) = \{v(x); v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}), Bv(x', 0) = 0\}$$

をもつ linear operator とみるとき A は pre-closed であり、従って closed extension をもつ。これを H で表わそう。

Lemma 5.1

H は a self-adjoint operator in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ であり

$$D(H) = \{v(x); v \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbb{R}_+^n), Bv(x', 0) = 0\}^{++}$$

である。

“証明の方針” 行列 A_j ($j=1, \dots, n$) が Hermitian なことと境界条件 B が conservative であることから $H \subset H^*$ が従う。 $^{++}$
また minimality より dual boundary space $(A_n \mathcal{B})^\perp$ が $\mathcal{B}$ と一致することが出来 $H = H^*$ となる。定義域 $D(H)$ が上のようなことは作用素 A の ellipticity と境界条件の coerciveness から従う。

† 正確には $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ の $2m$ 個の直積 Hilbert space であるが簡単の爲このように記す。

†† $\mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbb{R}_+^n) = H^1(\mathbb{R}_+^n) = W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n) = v$ 及び w distribution derivatives $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ ($j=1, \dots, n$) が $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ に属する v の全体

‡ これは Lax and Phillips [9] (1960) による即ち彼等は一階対称系の boundary value problem に対し weak extension と strong extension の一致を証明した。Lax and Phillips [10] も参照のこと。

さてこの operator H を用いると吾々の混合問題は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = i H u(t) \\ u(0) = g \end{cases}$$

と発展方程式の形に reformulate される. そのとき H が spectral representation

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dE_{\mu}, \quad \{E_{\mu}\}_{-\infty < \mu < \infty} \text{ は } H \text{ に対応する the resolution of the identity.}$$

をもつことより 解 $u(t) = u(t, x)$ は

$$u(t, \cdot) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mu} dE_{\mu} g$$

で与えられる.

まず吾々は spectral family $\{E_{\mu}\}$ と ときに構成した Green 函数との関係を確立しよう.

定理 5.1 $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ とする. そのとき

- 1° $(E_{\mu}g)(x)$ は x について C^{∞} であり又 $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ で (x, μ) の連続函数である.
- 2° $(E_{\mu}g)(x)$ は x を任意に固定するとき $\mathbb{R}^1 - \{0\}$ で μ について一回連続的に可微分であつて

$$\frac{d}{d\mu}(E_{\mu}g)(x) = \frac{1}{2\pi i} \{ G_{\mu+i0}(x) - G_{\mu-i0}(x) \}, \quad \mu \neq 0$$

が成り立つ. 但し

$$G_{\lambda}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \lambda) g(y) dy$$

である.

“証明の方針”

$E_\mu g$ が x の C^∞ 函数であることは H が coercive boundary value problem に associate される自己共役作用素であることと Sobolev の lemma から従う.

$$2^\circ \text{ は } R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda} dE_\mu, \quad \lambda \neq \text{real}$$

$$((H - \lambda I)^{-1} g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \lambda) g(y) dy$$

なる relation と Stieltjes の反転公式 と定理 4.1 から従う.

念の爲 Stieltjes の反転公式 を書いておく.

$\phi(\mu)$ を $[-\infty, \infty]$ で有界変動な函数とし $\lambda \neq \text{real}$ に対し Cauchy kernel をもつ Cauchy-Stieltjes 積分

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda} d\phi(\mu)$$

を考える. そのとき

$$\begin{aligned} & \frac{\phi(\mu+0) + \phi(\mu-0)}{2} - \frac{\phi(\nu+0) + \phi(\nu-0)}{2} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\nu^\mu \{ \Phi(\sigma + i\varepsilon) - \Phi(\sigma - i\varepsilon) \} d\sigma \end{aligned}$$

が成り立つ.

1° の $(E_\mu g)(x)$ が $\mu=0$ で連続なことは boundary condition の coerciveness から $\mu=0$ が H の eigenvalue でないことが示されるからである.

主要定理の証明

$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ に対する混合問題の解は

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mu} dE_\mu g(x) \text{ で与えられた. } \text{そこで右辺の積分を} \\ &= \int_N^\infty + \int_\delta^N + \int_{-\delta}^\delta + \int_{-N}^{-\delta} + \int_{-\infty}^{-N} = u_1(t, x) + u_2(t, x) + u_3(t, x) + u_4(t, x) + u_5(t, x) \end{aligned}$$

とわけると、そのとき Sobolev の lemma と Coercive inequality より

$$|u_1(t, x)| \leq \text{Const} \|u_1(t, \cdot)\|_{C_{L^2}^{(\frac{n-1}{2}+1)}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \text{Const} \sum_{k=0}^{(\frac{n-1}{2}+1)} \|H^k u_1(t, \cdot)\|$$

しからず

$$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset \bigcap_{k=1}^\infty D(H^k) \text{ より } \|H^k u_1(t, \cdot)\|^2 = \int_N^\infty \mu^{2k} d\|E_\mu g\|^2 < \infty$$

が成り立つから $\forall \varepsilon > 0$ に対し N を十分大きくとると $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}_+^n$ の

如何に抱らず $|u_1(t, x)| < \varepsilon$ が成り立つ. 同様、 $|u_5(t, x)| < \varepsilon$ となる.

また同じようにして

$$\left| \int_{-\delta}^\delta e^{it\mu} dE_\mu g(x) \right|^2 \leq \text{Const} (1 + \delta^2 + \dots + \delta^{2(\frac{n-1}{2}+1)}) \cdot (\|E_\delta g\|^2 - \|E_{-\delta} g\|^2)$$

が成り立ち $\|E_\mu g\|$ の $\mu=0$ における連続性より δ を十分小さくとれば

$|u_3(t, x)| < \varepsilon$ となる. 一方定理 5.1 より $\Theta(\mu, x) = G_{\mu+i0} g(x) - G_{\mu-i0} g(x)$

と書く

$$u_2(t, x) = \int_\delta^N e^{it\mu} dE_\mu g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta^N e^{it\mu} \Theta(\mu, x) d\mu$$

と表わされる. 従って x を固定すれば Riemann-Lebesgue の定理より

$t \rightarrow \infty$ のとき $u_2(t, x) \rightarrow 0$ となる. x が $\mathbb{R}_+^n$ の任意の compact set K を動く

とき上の収束の一致性は $x \in K$ を parameter とする変数 μ の連続函数の

族 $\{\Theta(\cdot, x)\}_{x \in K}$ が連続函数の空間 $C[s, N]$ で precompact set をつくる

ことから云える. $u_4(t, x)$ に対しても同様である. かくして主要定理は証明された.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727.
- [2] S. AGMON, Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, Colloques sur les équations aux dérivées partielles, C.N.R.S. (1962), 13-18.
- [3] T. CARLEMAN, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923.
- [4] A. ERDELYI, Asymptotic expansions, Dover Publ. Co., New York, 1956.
- [5] K. O. FRIEDRICHS, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 11 (1958), 333-418.
- [6] F. R. GANTMACHER, Théorie des matrices I, Dunod, Paris, 1966.
- [7] V. V. GRUSIN, On Sommerfeld-type conditions for a certain class of partial differential equations, A. M. S. Transl. series 2, 51 (1966), 82-112 (Mat. Sb. (N.S.) 61 (103) (1963), 147-174).
- [8] R. HERSH, Mixed problems in several variables, J. Math. Mech., 12 (1963), 317-334.
- [9] P. D. LAX and R. S. PHILLIPS, Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 427-455.
- [10] P. D. LAX and R. S. PHILLIPS, Scattering theory, Academic press, New York and London, 1967.
- [11] P. D. LAX, C. S. MORAWETZ and R. S. PHILLIPS, The exponential decay of solutions of the wave equation in the

- exterior of a star-shaped obstacle, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 593-595.
- [12] W. LITTMAN, Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 766-770.
 - [13] D. A. LUDWIG, Examples of the behavior of solutions of hyperbolic equations for large times, J. Math. Mech., 12 (1963), 557-566.
 - [14] S. MIZOHATA, Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème extérieur, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 352-357.
 - [15] S. MIZOHATA, Théorie des équations aux dérivées partielles, Iwanami, Tokyo, 1965. (En japonais.)
 - [16] C. S. MORAWETZ, The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 561-569.
 - [17] M. MORSE, The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 18, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1934.
 - [18] L. SARASON, On hyperbolic mixed problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 18 (1965), 310-334.
 - [19] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966. (Nouvelle édition.)
 - [20] K. YOSIDA, Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.
 - [21] M. MATSUMURA, Comportement des solutions de quelques problèmes mixtes pour certains systèmes hyperboliques symétriques à coefficients constants à paraître Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A, Vol. 4, No. 2 (1968)