観測理論と測定の量子限界

名古屋大学　教養部　小澤正直

1．序論

この報告のもととなった研究会で，私は重力波検出にまつわる測定の量子力学的限界をめぐる最近の論争に関する新しい結果［088］について報告した．この進化の力学の研究会では観測問題に関するテーマが継続的に扱われていることから，私が採用した方法論とその背景となった数学理論に関する解説を研究会で求められた．目的とする問題の異なる二つの分野が同一の概念を扱うとき，その方法論の違いを解説することは意外に困難であることを痛感したが，この研究会本来の目的から，この原稿を用意するときに，観測問題のある側面に必然的にコミットすることになった．その意味で，この報告には，本来解説すべき測定の量子限界に関する結果の解説の前に，観測理論一般に関する一つの考えが表明されている．観測理論については，研究者の数だけ異説が存在する分野であるといわれるほど，論争の活発な分野であるわりには，基本概念が整理されているとはいいがたい分野であるといわれている．私のコミットメントは，量子力学的測定の誤差論という本来の目的のために必要最小限の概念の整理であるにすぎないが，観測問題のある側面に一つの光を当てることになれば幸である．

それでは，本論において，どういう問題が扱われ，その解析のために，観測とか測定という言葉が，どういう意味で使われるのかについて，少し前置きをしておこう．

私がここで取り扱う問題は，一つの自由質点の位置をある時間間隔で継続的に測定する場合に，どのくらいの精度でその質点を監視できるかという問題である．この精度が完全である場合には，その時間間隔にその質点に外部から加えられた古典的力を完全に推定することができ，不完全であれば，その力の推定にはその精度に応じた誤差が含まれる．このことは，マイケルソン干渉計を監視することにより重力波を検出する試みがなされるようになって，その感度の限界を議論するときに問題となった．干渉計の二つのアームの端には鏡が自由運動をしていて，その距離を監視することにより，鏡に作用する外力が推定される．しかし，その測定を限界まで精密に行えば，ある時刻の鏡の位置の測定が鏡の波束を収縮させ，次の測定までの波束の広がりがこの鏡の監視に不可避な誤差を与えると考えられる．この考えに基づいて，位置の反復測定には標準量子限界と呼ばれる精度の量子力学的限界があるという議論がなされてきた［W79,B74,C80］．

ところで，測定の議論におけるもっとも基本的なテーゼは，どんな測定にもその過程の一部に物理的に解析できる過程が含まれるということである．もちろん，この物理的過程は測定される対象と測定器との相互作用として記述される．ということは，測定器の物理的機構を改良することにより，その相互作用をわれわれの目的にかなうようにすれば，より精度のよい測定の統計が得られるのではないかという考えを否定することができない．もちろん，この分析は物理法則に従うので，不確定性原理という基本的制約

から逃れることはできないが，測定の過程のどの部分にその制約がきいているのかということは，詳細な分析を要する問題で，波束の収縮というやや教条的な原理によってその分析を放棄すべきものではない．

干渉計による測定過程の分析には，二通りの方法がある．一つの方法によれば，測定誤差の由来は，光が鏡に反射するときに鏡を反作用でランダムにキックすることによる輻射圧雑音，および，光子計数器がもつ検出誤差である．さて，光の強度を上げれば，検出誤差を小さくできるがそれに応じて，輻射圧雑音が大きくなり全体の精度に一定の限界があることが結論される．このことは，メカニカルな誤差の要因が輻射圧雑音にあり，これが不可避だということになる．次の分析は，測定過程を光と鏡の量子力学的相互作用として記述するもので，この分析により，輻射圧雑音が鏡の位置と運動量の不確定性関係から求められる．このようにして，通常の干渉計には実際に前述の測定の量子力学的限界が認められる．

このことは，前述の波束の収縮による議論が原理的限界を導くとする考えに有力な根拠を与えるようであるが，しかし，測定のための可能なあらゆるメカニズムがこの単純化された議論にしたがうという論理的保証がただ一つの例から得られないことは明らかである．では，本当に，可能なあらゆるメカニズムに対して，この測定の限界が存在するのであろうか．つまり，干渉計に対するどのようなメカニズムの改良もこの限界を越えることができないのであろうか．この標準量子限界を巡る論争の口火を付けたのが，Yuen [Y83] の次のような提案である：“測定の直後に波束が収縮するのではなく，時間発展にしたがって波束が収縮する状態（これを収縮状態という．）にすれば，標準量子限界を打ち破ることができる．”測定と波束の収縮が同義であるかのような従来の議論から見れば，一見，荒唐無稽なこの提案も，測定のメカニズムとその統計に関する深い考察を要求し，その後，そのような測定が原理的に可能かどうかを巡って，論争が重ねられた [W84,L84,L85,C85,N86]．この報告の目的は，この問題に対して，前述の標準量子限界が普遍的限界ではないこと，つまり，Yuen [Y83] の提案に従うような，標準量子限界を打ち破る測定が原理的に可能であることを証明することである．

では，そのような証明はどのような概念構成のもとで展開できるのであろうか．そのためには，すくなくとも，ある統計をもつ測定が可能である，または，存在するという言明に正確な定義を与えなければならない．もちろん，すべての測定が波束の収縮をするという前提を認める定義からこのような証明が得られないことは，標準量子限界を導く前述の単純な議論から明らかである．このことから必然的に測定とは何かという問題に導かれる．

いうまでもないことであるが，量子力学は統計的理論である．したがって，扱われる対象はすべて統計的にしか記述されない．一方，測定は対象からその状態に依存したなんらかの情報（一般に，その情報はある物理量の値と解釈される．）を取り出す作用であると考えられる．では，統計的な対象から情報を得るということは何によって記述されるのだろうか．Shannon によって創設された情報理論の分野でよく知られている考えに従えば，この問に対して，“対象とその外部のある系に統計的相関をつくることであ

る”と答えることができる．情報理論では，測定の対象に相当するものは情報源と呼ばれ，その外部に当るものは受信機と呼ばれる．更に，その両者を結ぶものは情報路と呼ばれる．情報源は統計的に記述され，情報路の役割は，情報源と受信機の間に統計的相関をつくることである．受信者は，受信機を知覚することにより，受信機で何が起こったかを知り，それをもとにして，情報源で何が情報として送られたかを推定する．この推定は，情報路によってつくられた統計的相関に基づく統計的推測である．統計的対象に対してつくられた統計的相関をもとに，対象で生起した事象を推定するこの原理はBayes の原理と呼ばれる．そして，測定によって得られる情報の量は，情報源に対する事前の確率と Bayes の原理で更新された事後の確率とのエントロピーの差の平均で測られる．

ところで，Bayes の原理は一般に結果の事象から原因の事象を推定する帰納的推測であると解説されるが，これは，誤解を招きやすいので注意を要する．というのは，統計的相関で結ばれた二つの事象に対して，その統計的相関は因果関係を本来何も主張しないからである．その二つの事象の役割は統計的にはまったく対称であり，どちらの事象からも他の事象の統計的推測が成立する．このことは，疫学調査の例で強調されるように，統計的相関は因果関係の兆候であっても，因果関係は別の根拠から結論されなければならない．とくに，力学的に記述される統計的相関は，通常，同時刻の二つの事象の生起に関する結合確率である．例えば，ダイスをふって，１の目が出る事象と，ダイスの底が６の目である事象とは常に完全相関をもつが，底が６の目であることが１の目が出ることの原因ともその逆とも考えない．両者は，ダイスをふったことが原因で確率的に生起した完全相関をもつ二つの結果である．したがって，統計的理論を扱う場合には，因果性，保存性，統計的相関の概念の間の関係について，注意深い取扱が必要である．（上の例でいえば，ダイスの相対する面の目の和が７であるという力学的構造は，ダイスを振ることによって変化しない保存的性質であり，ダイスを振ればどれかの目が１／６の確率で現れるというのが因果性である．保存的性質は統計的相関によって表現され，一方の事象から他方の事象の生起が統計的推測によって知られるが，二つの事象の因果関係は存在しない．）

さて，ここまでは，確率の一般論であって，量子力学の測定による特殊性は何も含まれていない．ということは，量子力学の統計解釈には，統計と情報，とくに統計的相関，に対するこの解釈は必然的に含まれていると考えられる．それでは，この情報理論の枠組を量子力学的測定の分析に当てはめてみよう．情報源に対応するのは測定の対象であり，受信機に対応するのはその外部のある系であって，それを便宜的に測定器と呼ぶ．測定は，対象と測定器の間に統計的相関をつくることで行われる．この統計的相関をつくるもの，つまり，情報路の役割は，対象と測定器の物理的相互作用によって記述される．そこで，受信者に対応する観測者は，物理過程に完全には帰着できない知覚の過程によって，測定器で生起する事象を知ることになる．この全過程を観測過程と呼び，対象と測定器の統計的相関がつくられるまでを測定過程と呼ぼう．もちろん，情報理論がそうであるように，この観測によって得られる情報の分析には，測定過程を分析すれば

充分である．

では，観測者はこの観測によってどのような情報が得られるであろうか．まず，測定器に生起した事象を知ることによって（これは，測定器に用意されたある物理量を観測することにより得られる．），測定値と呼ばれる情報が得られる．次に，この測定値とBayes の原理にしたがって，対象の状態に関する情報が得られる．ところで，この対象の状態に関する情報は，対象と測定器との相互作用が原因となってつくられた統計的相関からえられたものであるから，正確には，測定過程の直後の状態が知られることになる．ところで，いわゆる波束の収縮という現象は，この二つの情報がある特殊な統計的相関をもつことを意味しているにすぎない．つまり，このようにして得られる二つの情報が，次のようになっているということである：“測定過程の直後の状態は測定値の固有状態である．” von Neumann [N55] は相互作用がある特殊な形をしていればこのようなことが可能であることを証明して，いわゆる観測理論の基礎を築いた．すると，われわれの問題は次のようになる：“適当な相互作用を選ぶことによって，測定値が質点の位置を表し，測定過程の直後の状態が，波束の収縮をせず，Yuen [Y83] の収縮状態になるような測定過程がはたして存在するか？” このように概念構成を組み立てることにより，この問題は，完全に量子力学の原理だけに支配される数学の問題に帰着される．

じつは，このような情報理論的枠組は観測理論にとって決して目新しいものではなく，観測理論の出発点になった von Neumann の議論のなかに明らかに認められるものである．ただ，von Neumann の議論では，波束の収縮という，測定値と測定後の状態が完全相関をもつ場合だけが論じられているので，一般的枠組が見にくくなっている．そのために，von Neumann 以後の観測理論の議論のなかでは，ともすると，この観点に対する考慮が看過されているように思われる．例えば，観測理論の解説書で通常行われる説明に，次のようなものがある：“対象と測定器は相互作用して，対象の状態と測定器の状態が１対１に対応する状態に時間発展する．これは，この相互作用が測定であるからには測定器の状態を見て，対象の状態が知られなければならないからで，これによって，測定器だけを見ることが許される．” しかし，ここに含まれる見せかけの説明，つまり，測定器から得られる測定値と対象が本来もっているように見える物理量の値との１対１対応，という考えはまったく無意味である．なぜなら，測定値の統計は相互作用直前の対象の状態に支配されているのに，ここで述べられている状態の相関は，相互作用直後の対象と測定器の状態だからである．つまり，統計的相関が因果関係を意味しないという意味で，この１対１対応は，対象の量の値と測定値の因果関係を表さない．（対象がはじめに測定される量の固有状態であるときに限り，そのような因果関係が生まれる．というのは，そのときには測定過程によって状態が変化しないので，過去の状態と現在の状態を混同することが許されるからである．）したがって，そのような因果関係のために，この対応が，相互作用が測定としての条件をなすという説明は無意味である．次に，“この相互作用の直後に観測者が測定器を観測して，測定値を知ることによって，１対１に対応した状態のひと組が選ばれ，それによって，対象の状態が，測定値の固有状態に変化する．” という説明も見受けられる．この説明が無意味であることは，対象

のいわゆる波束の収縮は，対象に対して行いうる次の測定の以前に完了していなければならないのに対して，測定器の観測が完了する（つまり，測定値を知る）のは，常に，それより後になるからである．言い替えれば，この説明では，波束の収縮が観測過程の直後に起こるのに対して，実際には，測定過程の直後に起こっていなければならないからである．というのは，測定過程の直後には，対象に対する次の測定にかかれるからであり，波束の収縮の現象論的意味は，次の測定の測定値が前の測定値と完全相関をもつということにすぎないからである．したがって，測定器を観測することが波束の収縮の原因ならば，原因が結果よりも時間的に後に起こることになる．これはちょうど，ダイスの目が１であることを知ることが，底の目を６にするというような説明であって，ここにも，統計的相関と因果関係との混同が見られる．それにもかかわらず，この混乱はvon Neumann の連鎖という不条理を導入して，観測問題の一つの動機にさえ数えられている．それでは，von Neumann はどう説明したのかということが気になる．そこで，この点に注意を喚起するために，第２節で，von Neumann の議論［N55］を再現することにした．

以下の各節の内容は次の通りである．第３節では，標準量子限界を巡る Yuen［Y83］と Caves［C85］の論争を解説して，目標とする問題が明らかにされている．第４節では，von Neumann の測定の理論を，上述の情報理論的観点から一般の測定に拡張して，測定の量子力学という方法論を確立した上で，どのような測定が物理的に実現可能かという問題に対する一つの解答が与えられている．第５節では，前節の測定の量子力学の枠組で，量子力学的測定の誤差論が展開され，標準量子限界に関する議論に厳密な数学的定式化を与え，そのもとで，標準量子限界を打ち破る測定の実現可能性が証明されている．なお，数学的詳論の多くは，引用文献に譲ってあるが，概念的側面に関しては意をつくしたつもりである．測定の量子力学という新しい方法論の確立のために，この報告が新たな議論のきっかけになることが報告者の願いとするところである．

２．観測理論

ここでは，３節以下で展開される測定過程の分析に関する議論の出発点を明らかにするために，von Neumann の観測理論を原典［N55］に忠実に解説を試み，概念的に重要ないくつかの点について検討する．

２．１．von Neumann の観測理論

古典力学においては物理的対象は原理的にただ一つのやり方で変化する．つまり，全ての対象の変化は運動方程式に従う．ここでは，対象を観測することにより，対象が被る変化は原理的にいくらでも小さくすることが可能であり，理論的には，対象は観測によって変化しないとされる．一方，量子力学において，対象は二通りのやり方で変化す

る．つまり，孤立した対象の状態は，Schroedinger 方程式に従って変化する（この変化を過程２．と呼ぶ．）が，ひとたび測定が行われるならば，それとは全く性格の異なる，非因果的な変化（この変化を過程１．と呼ぶ．また，通常，“波束の収縮”と呼ばれている．）を被るとされている．このように量子力学に不可避的に組み込まれた二重性を解明するために， von Neumann [N55] によって量子力学の観測理論が生み出された．

von Neumann によるこの問題の解決は極めて明解であるが，その後，現在に至るまで，その理論の概念的な側面について，議論が絶えない．いわゆる観測問題の出発点となった，von Neumann の理論は次のようなものである．

von Neumann の量子力学の公理的理論において，量子力学系とその状態の概念が重要な理論の構成要素となっている．量子力学という理論が適用されるのは，一つの特定化された量子力学系であり，その量子力学系は各時刻にある一つの状態にあると考えられている．量子力学系の状態は，その系によって特定化された一つのヒルベルト空間のベクトルであらわされ，その物理量はその上の作用素であらわされる．ある状態である物理量が観測されると，その測定値の分布は対応するベクトルと作用素に対する Born の統計公式によって計算される．一方，エネルギー的に閉じた量子力学系の状態は，Schroedinger 方程式によって時間発展する．このことから，過去の状態が知られれば，それ以後の時刻における最初の測定の結果について量子力学は統計的な予言をすることができ，力学の統計的因果性が確保される．ところで，ひとたび測定が行われれば，測定の前後での状態の変化は波束の収縮の公式を適用しなければならない．前述の二重性はここで現れる．von Neumann のこの二重性についての解明は，測定が常に測定される物理系とその外部にある他の物理系との相互作用が前提になっていることに基づいている．従って，彼の結論は，極めて明解である．すなわち，測定の前後では，対象となっている量子力学系はエネルギー的に閉じていないから，Schroedinger 方程式による時間発展でその状態の変化が記述できないというものである．つまり，一つの系で測定と時間発展とが両立しないから，量子力学が矛盾した予言を与える可能性はないというわけである．実際，彼は，次のように記している．

> さて量子力学は，観測される部分が観測する部分と相互作用をしていない限り，そのなかで生ずるできごとを過程２．のたすけをかりて記述する．しかし，ひとたびそのような相互作用が生ずれば，すなわち測定が行われれば，過程１．を適用しなければならない，と量子力学は教える．こうして二重性は正当化されたのである [N55;p.420 (p.344)]．（注：文献 [N55] からの引用は括弧内のページで指示される日本語版による．）

この結論を支える前提は，明らかにあらゆる測定が物理的相互作用，つまり，外部とのエネルギーの授受を伴うという考えである．論理的に明らかなように，もし，一つでも物理的相互作用を伴わない測定が可能ならば，その測定の前後での状態の変化につい

て，量子力学は二つの異なる予言をすることになって，彼の結論は破綻する．（しかし，この考えは，あらゆる測定において授受されるエネルギーが無視できない精度のレベルにおいて量子力学の原理が必然的に成立するというわれわれの日常的感覚の言い替えにすぎない．更に，一度その作用の影響が力学の原理に付け加えられて，力学の精度がそのレベルに維持されれば，測定による作用の内容をその力学が記述できるとするのも当然と考えられる．）von Neumann はこの考えを次のような物心平行論の要請から導いている．

> 第一に，観測すること，あるいは，それに結びついた主観的な知覚の過程は，物理的環境にとって新しい何かであって，これに帰着させることができないということは，それ自体としてはまったく正しい．．．．しかしながら次のいわゆる物心平行論は，科学的世界観にとって基本的な要請である．すなわち，実際は物理外の過程である主観的な知覚過程を，あたかもそれが物理世界において生じたかのように記述すること，すなわち，その過程の部分を客観的な環境の中の，通常の空間内における物理的過程に対応させることが可能でなければならないということである [N55;p.418 (p.333)].

この要請から直ちに導かれることは，系 I を観測する過程の一部が，必ず，系 I を含むある物理系 I+II における物理的過程を含むということであり，しかしながら，観測の全過程は完全に物理過程には還元できない主観的知覚の過程を含むということである．更に，物心平行論の要請は，知覚の過程の物理的過程への還元がどこまでも可能なことを主張しているから，どこまでが物理系 I+II として物理的に記述されるかに関しては，極めて任意である．このことは，von Neumann の次のような言葉で明らかにされている．

> すなわち，われわれはいつでも世界を二つの部分に分けて，一方を観測される系，他方を観測者としなければならないのである．前者においては全ての物理的過程を（すくなくとも原理的には）いくらでも精確にたどることができるが，後者ではそのようなことは無意味である．両者のあいだの境目は極めて任意であって，うえの例では４つの異なった可能性が示されていた．．．．この境界を現実の観測者の身体の内部へいくらでも深く移すことができるということが，物心平行論の原理の内容である [N55;p.420 (p.334)].

このようにして，観測過程が，常に，本来の観測される系とその外部の系（これを便宜的に測定装置と呼ぶ．）との物理的相互作用，および，測定装置に対する本来の観測者の主観的知覚の過程という形で，分析可能であるという，いわゆる物心平行論の要請によって，状態変化の二重性の正当化がなされた．しかし，実際に全ての観測過程がこのような形で，すくなくとも原理的に分析できることを示さない限り，この議論は空虚

なものとなるであろう．このような要請は，物理現象がそれを記述する座標系によらずに物理学で記述されること，または，任意の二つの座標系によって一つの物理現象が整合的に記述されることというような要請と似た，いくぶん形而上学的な性格をもつ．ここで求められていることは，一つの観測という物理現象（その結果が物理学で予言できるという意味で，これは物理現象である）が，観測される系と観測者の境界を任意にとることによっても，量子力学が現象の整合的な記述を与えることを示すことである．von Neumann の次の言葉はこのことを意味している．

> しかし，観測される系と観測者の間の境界をうえの意味で任意に移動させることができるということが証明されない限り，物心平行論の原理が破れるおそれがある [N55;p.420 (p.334)]．

von Neumann の観測理論の中心的部分は，この境界の任意性に関する整合性，すなわち，観測過程に含まれる被観測系と測定装置系との相互作用の量子力学による記述可能性の証明にある．この証明は次のように定式化される．

> これを論ずるために世界を三つの部分 I，II，III に分ける．I は本来の観測される系，II は測定装置，III は本来の観測者である．証明すべきことは，境界は I と II+III とのあいだにも，また I+II と III とのあいだにもおくことができるということである [N55;p.421 (p.334)]．

つまり，一方では，I のみが量子力学系として記述され，過程２．は I のみに適用され，I の観測(つまり，物理的に分析されない I と II+III の相互作用，または，I に対する本来の観測者の主観的知覚の過程）に際しては，I について過程１．が適用される．他方では，I+II が量子力学系として記述され，過程２．が適用される．I の観測に際して，この記述では観測過程の一部が I+II における物理的過程として記述され，それは，I と II の間の物理的相互作用として過程２．によって記述される．観測過程の残りの部分は，本来の観測者 III による I+II に含まれる測定装置に対する主観的知覚の過程である．そして，証明すべきことは，どちらの記述によっても本来の測定される系 I に対して同一の陳述が得られるということである．それでは，これら二つの記述が，系 I に対して同一の陳述を与えるということは数学的にどのように定式化されるであろうか．

本来の測定される物理量を全て単純な固有値 $a_1, a_2, \ldots$ と，固有ベクトル $\phi_1, \phi_2, \ldots$ をもつ系 I の物理量 A とする．このとき，周知のスペクトル分解の記法で，$\hat{A} = \sum_i a_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ と書かれる．（物理量 A に対する自己共役作用素を $\hat{A}$ で表す．）I を観測される系，II+III を観測者とするとき，系 I の状態 ϕ でこの測定が行われるとすれば，この測定に関して，量子力学は，過程１．を適用することにより次の陳述を行う．

測定は，I を状態 ϕ から ϕ_i （$i=1,2,...$）のうちの一つの状態へ，それぞれ確率 $|<\phi|\phi_i>|^2$ で移行させる [N55;p.439 (p.348)].

もちろん，このとき得られる測定値は a_i である．

次に，I+II を観測される系とし，III だけが観測者とすれば，この測定に関する量子力学の陳述は，I+II に過程２．を適用することにより，次のようになる．

> II は I における A の値を示す目盛りをもった測定装置である．この目盛りのうえの指針の位置は，元来 III によって測定される II の物理量 B であって，．．．その値は A の値と１対１に結びつけられている．A の値を a_1 ,a_2 ,...,B の値を b_1 ,b_2 ,... とし，ちょうど a_n と b_n とが結び付くように番号を付けてあるとする．
>
> はじめ I は（知られていない）状態 $\phi(q)$ に，II は（知られている）状態 $\xi(r)$ にあったとすれば，I+II の状態は $\Phi(q,r) = \phi(q)\xi(r)$ である．測定は(II によって I に対して行われるかぎり），．．．，（I+II の）エネルギー作用素 H によって時間 t の間に行われる．これは過程２．であってΦを
>
> $$\Phi' = \exp(-2\pi i t H/h)\Phi \qquad (2.1.1)$$
>
> に変える [N55;p.439 (p.348)].

さて，観測者 III の立場からみて，どのようなときに，この記述が系 I の測定と見なされるであろうか．このことを明らかにするためには，過程１．を定式化するに至った次の再現可能性の要請を思い起こす必要がある．

> （M．） １つの系Ｓで物理量 R を２回すぐ続けて観測すれば，２回ともおなじ値が得られる．このことは，たとえ R がＳの最初の状態において分散をもち，そのうえ R の観測がＳの状態を変化させ得るにもかかわらず，なりたつ [N55;p.335 (p.268)].

この要請は，系 I のみを物理系とみる観測者 II+III にとって系 I の状態が測定の前後で過程１．に従って変化することと同等であることが示されている [N55;pp.212-223,pp.347-349,(pp.170-179,pp.278-280)]．よって，観測者 III の陳述が過程１．を用いた観測者 II+III の陳述と同一であるためには，観測者 III の陳述が要請（M．）を満たさなければならない．ところで，系 I+II を物理系とみて，観測過程の一部を系 I+II の相互作用とみる観測者 III にとって，この要請は次のことを意味する．観

測者 III にとって，物理量 A の最初の測定は，系 I+II の相互作用の直後に測定装置である系 II の物理量 B を観測することに相当し，2回目の測定は，系 I+II の相互作用の直後（これが，1回目の測定の直後に相当する時刻である．）に系 I の物理量 A を直接観測することに相当する．従って，この2回の反復測定の測定値の統計は，観測者 III にとって，系 I+II の相互作用の直後における B と A の同時測定の統計に相当する．よって，この要請は，A と B の同時測定の結果が完全相関をもつことを意味する．従って，観測者 III によるこの測定の記述が，系 I のみを物理系とする観測者 II+III と同等になる条件は，この A と B の同時測定の統計が再現可能性の要請（M．）および測定値の統計を規定する統計公式の二つの条件を満たすことである．この2条件は，明らかに，A と B の同時測定の統計を一意的に定め，von Neumann に従って述べれば，次のようになる．

> 観測者 III の立場からみれば，次のような場合にだけ測定について語ることができる（one has a measurement)．すなわち，III が過程1．によって，同時に測定可能な量 A，B（それぞれ I および II における，または，ともに I+II における量）を測定するとすれば，値の組 a_m, b_n の確率は $m \neq n$ のときは 0，$m=n$ のときは確かに w_n である．．．．なおそのとき量子力学から $w_n = |\langle \phi | \phi_n \rangle|^2$ である [N55;p.440 (p.348)]．

このように定式化された物理的要求に同等な数学の問題の定式化は，次のようになる．

> I における規格化された完全直交系 $\phi_1, \phi_2, \ldots$ が与えられている．そのとき適当な（Hilbert 空間）R^{II} における規格化された完全直交系 $\xi_1, \xi_2, \ldots$，および R^{II} の状態 ξ，さらに R^{I+II} におけるエネルギー作用素 H と時間 t を見いだして，つぎのことが成り立つようにすること．Φ を R^I における任意の状態とし，
>
> $$\Phi(q,r) = \phi(q)\xi(r), \qquad (2.1.2)$$
> $$\Phi'(q,r) = \exp(-2\pi i t H / h)\Phi(q,r) \qquad (2.1.3)$$
>
> とおけば，$\Phi'(q,r)$の形が
>
> $$\Sigma_n \; c_n \phi_n(q)\xi_n(r) \qquad (2.1.4)$$
>
> となる（c_n はもちろん Φ に依存する）．そのさい $|c_n|^2 = |\langle \phi | \phi_n \rangle|^2$ でなければならない [N55;p.440 (p.348)]．

このような数学的定式化のもとで，von Neumann は，実際に，要求された数学的対象が

存在することを示して証明を完結する．なお，この定式化において，測定器の指針の位置をあらわす物理量は，$B = \Sigma_n \; b_n \, |\xi_n\rangle\langle\xi_n|$である．

２．２．波束の収縮に関して

前節において，von Neumann の理論を原著に忠実に解説してきたが，最近の傾向としては，“von Neumann の説は誤りであり，対象と測定器の相互作用は合成系を混合状態に導き，波束の収縮は測定器の巨視的性質が原因で起こる”という説が一部で支持されているようである．しかし，実際の測定を考えると，装置の巨視的部分が作動する以前に波束の収縮が起こっていて，装置の巨視的性格がその原因とは考えにくい．そこで，思考実験を一つ取り上げてみよう．

ファインマン物理学［F65］の量子力学編の第１章には，ヤングの干渉実験の詳細な解説がされている．実験配置の左端には電子銃があり，中央には，周知のような上下２つのスリットをもつ衝立がおかれ，右端には，電子を捕捉するスクリーンがおかれている．スリットが充分に小さいとすれば，上のスリットを通る電子の状態と下のスリットを通る電子の状態は，それぞれ直交する２つの波動関数 ϕ_1 と ϕ_2 であらわされる．スクリーンで捕捉される電子の状態は ϕ_1 と ϕ_2 の重ね合わせであり，スクリーンの各位置に到達する電子の相対確率は，よく知られた干渉縞を呈する．さて，次に，衝立のすぐ右方（スクリーン側）に強い光源をおくとスクリーンの各位置で捕捉される電子の相対確率は $|\phi_1|^2+|\phi_2|^2$ となり，これは，スクリーンに到達する電子の状態が，ϕ_1 と ϕ_2 の混合であることを示している．では，なぜ重ね合わせの状態が混合に移行したのであろうか．これを説明する仕方に２通りあるというのが von Neumann の主張である．

まず，電子だけを物理系として分析する観測者にとって，電子が光源の脇を通過するときに，光が上のスリットの付近で散乱されるか，下のスリットの付近で散乱されるかを見ることによって，電子が上のスリットを通過したのか下のスリットを通過したのかが観測される．従って，この観測によって，波束は収縮し，スクリーン上では，電子の状態は，混合としてふるまう．もちろん，上のスリットを通った電子と下のスリットを通った電子とを区別する必要がなければ，散乱された光を見る必要がないから，観測者が実際に散乱光を見るか見ないかに関わらず，電子の状態は混合としてふるまう．一方，電子と光源から発する光子の両方を物理系として分析する観測者にとって，事態は次のようになる．電子は光源の脇を通過するときに一つの光子と衝突して，光子の散乱を起こす．この過程は，電子と光子の合成系において，量子力学の運動方程式に従うものである．その結果，電子と光子の合成系は，この相互作用に従って，ある相関をもった合成状態に移行する．ところで，運動方程式は重ね合わせを重ね合わせに移行させるから，この合成状態は合成系の純粋状態である．では，この合成状態で，電子の位置だけを測定すればどうなるであろうか．それは，実験結果に示されているように，あたかも，電子の状態が ϕ_1 と ϕ_2 の混合であるかのような分布をスクリーン上で示すのである．

つまり，純粋状態にある合成系も，その部分だけを測定して，全系の相関を測定しなければ，混合としてふるまう．この２人の観測者の現象の分析の整合性は，ちょうど，von Neumann が証明した問題の場合とおなじである．もし，量子力学の運動方程式が測定における統計的相関を説明しないものならば，後者の分析は波束の収縮を説明できず，干渉縞の消失を結論しないであろう．しかし，まさに，このような説明が可能だということが，von Neumann が証明したことなのである．更に，ここでは，電子によって散乱された光子を検出するいかなる検出器の存在も，干渉縞の消失の原因になっていないことが明らかである．実際に，検出器を光源のすぐそばにおいても，スクリーンよりも遙かに遠くにおいても，また，検出器をおかなくても，どの場合にもスクリーン上の電子の分布に変化がないことが明らかであるからである．したがって，電子と光が量子力学の運動方程式に従って，相互作用することだけが，その原因と考えられる．このことから，近年，主張されているような，検出器の巨視的性質が波束の収縮に本質的であるという考えもここでは捨てなければならない．

上の実験で，光源の強度が強いという仮定は，電子と光子の相互作用が起こるチャンスを確率１に近付けるために必要である．したがって，この光源の強度を波束の収縮の起こりやすさを示す，装置の巨視的性質のパラメータとして利用することができるかも知れないが，それはあまり意味がない．というのは，そのパラメータは波束の収縮のメカニズムに対して何の示唆も与えず，単に，測定器がうまく作動するチャンス，つまり，スクリーンに到達する電子のうち測定を受けて到達するものの割合，を示唆するにすぎないからである．つまり，観測の理論の名のもとでわれわれが知りたいことは，測定に成功するときにどうして波束の収縮が伴うのかということであって，与えられた実験配置によって測定に成功する確率を知りたいのではないからである．

２．３．境界の任意性について

明らかに，波束の収縮という言葉は，測定の直前の状態から測定の直後の状態への対象系の量子力学的状態の変化を意味する．ところで，von Neumann の分析によれば，観測の全過程は，対象と測定器の相互作用とそれに引き続く観測者の測定器に対する主観的知覚の過程であるとされる．もちろん，この知覚の過程自身もある物理量の測定に還元されているから，測定は，対象系とその外部にある第２の系との物理的相互作用および第２の系に対する測定の２段階の形で分析される．von Neumann のいう境界の任意性とはこの第２の系の特定化の任意性ということである．それでは，このような観測の全過程において，対象系にとっての測定の直後とはどの時点をさすのであろうか．

この問題を厳密に考えるためには，直後の状態という言葉の正確な意味を考えなければならない．まず，量子力学における状態の概念は，常に，その系に対するある可能な測定の測定値に対する確率的予言を前提にしている．測定の直後の状態を特徴付ける確率的予言は，前述の再現可能性の要請である．つまり，同一の測定を２回続けて行え

ば，おなじ値が得られるというものである．では，２回目の測定はいつ可能であろうか．まず，観測の全過程の後であるという考えは現実的でない．例えば，測定値をある記憶装置に蓄えておくことにより，観測者の知覚の過程をいくらでも引き延ばすことができるのに反して，対象に対する第２の測定をそれ以前に行うことはいくらでも可能である．もちろん，相互作用の直前には，状態は変化しないし，相互作用の途中で他の測定器と相互作用することは，その相互作用の記述と矛盾することになりかねない．すると，考えられる答は，対象と測定器の相互作用の直後ということになる．実際に，von Neumann の分析では，この相互作用の直後の合成系の状態から得られる確率的予言が，再現可能性の要請と一致することが証明されている．しかし，もし境界のおき方が任意ならば，境界のおき方によって，異なる直後が現れることになる．例えば，通常の測定器には，微視的な変化を巨視的な指針の位置の変化に変換するための増幅過程が組み込まれていると考えられるが，このような過程までも第２の系に含める場合と，対象と測定器の微視的な相互作用のみを含める場合とでは，直後の時刻に大きな隔たりができるであろう．この場合には，後者の記述により，増幅過程の最中に対象を他の測定器と相互作用させることができると考えられるから，増幅過程の部分のハミルトニアンは微視的対象との直接の相互作用が含まれていないと考えられる．つまり，対象と測定器を含む系の境界が２つあれば，狭い方の境界がより本質的である．

以上の考察から，測定の直後の時刻と，相互作用の直後の時刻を合わせるためには，第２の系の自由度は非常に小さく，測定器のうちで，対象と実際にエネルギーの授受を行う微視的な部分に限られることが解る．このことから得られる結論は，対象と測定器の相互作用のうちで，波束の収縮の原因となるのは，測定器のうちで，実際に対象とエネルギーの授受が行われる微視的な部分だということである．従って，その後に測定器の内部で起こるいわば巨視的変化は，それが，対象系の状態変化が起こった後に起こるという端的な理由で，つまり，原因が結果より後に起こることはないという理由から，波束の収縮の原因とは考えられない．

ただし，von Neumann の議論は，物心平行論に対する一般的証明として，正しいものと考えられる．というのは，その後の過程をいくら積み重ねても，対象系自身は系の Hamiltonian による時間発展をしているにすぎないからである．（測定の時間に関する問題に関しては，[N55;pp.352-357，(pp.282-285)] を参照．その考察にあるように，測定の相互作用から対象が受ける作用は，測定に付随する適当な摂動エネルギーの影響のもとで，相互作用の初期の時間に限定されていると考えられる．にもかかわらず，測定器系を大きくとるほど，測定器系が作用を受ける時間は長くなる．）しかし，実際の測定器の統計的性能の分析を行う場合には，これまでに述べた意味で，固有の境界が存在し，それは，対象が次の測定にかかれる最初の部分で引かれなければならない．例えば，前節の実験では，電子と光子が相互作用した後ならば，スクリーンをどこにでも置くことができるから，境界は電子と光子の相互作用の直後の段階で引かれる．その場合，光子を捕捉する検出器などは，第２の系に含まれないことになる．つまり，その検出器が波束の収縮の原因にならないことは，光子が検出器に捉えられる以前に，２回目の測

定である，電子のスクリーンによる捕捉を受けることが可能なことから明らかだからである．

これはまた，次のような例え話から明らかだろう．非常に高空をとぶジェット機を見ると，機体本体は見えないが，その後ろに飛行機雲が連なっていることがある．このとき，飛行機雲は目に見えない機体の位置を示しているが，飛行機雲ができつつある場所は機体の位置より少し後方である．このとき，飛行機雲が生成することが，飛行機が推進することの原因にならないことは明らかである．では，飛行機を電子に，飛行機雲を霧箱中の飛跡に置き換えて，測定の巨視的効果が波束の収縮の原因と考えてみよう．すると，飛跡が生成することが波束を収縮させて，次の瞬間の電子の位置を決める，つまり，電子が推進することの原因になるということになる．はたして，量子の世界では，飛行機雲が飛行機を飛ばすのであろうか．von Neumann の観測理論の立場からすれば，ジェット・エンジンと外気の１次的相互作用が原因となって，飛行機の推進と飛行機雲の生成という二つの結果を生じ，その２つの事象の生起は完全な統計的相関をもつといわなければならない．

以上の考察から，以下の各節でわれわれが行う測定器の統計的性能の考察において，対象と測定器の相互作用は，その非常に初期の部分で起こる微視的相互作用に限定して分析されることが正当化されるであろう．

最後に強調すべきことは，物理理論における測定の一般的可能性について，von Neumann が次のように述べていることである．

> 第１に，Compton と Simon が量子力学の成立の以前に行った重要な実験に論及しなければならない．この実験では，光を電子によって散乱させ，その後で散乱された光と電子をつかまえて，それらのエネルギーおよび運動量を測定することによって，この散乱過程を定量的に制御する．すなわち，光量子と電子との間に衝突が行われたのであるが，観測者は衝突後のそれらの軌道を観測することによって，弾性衝突の法則が満たされているかどうかを確かめることができた．．．．実際，そのような計算による検証は可能である：というのは，衝突前の軌道は知れており衝突後のは観測されるからである．．．実験の結果は，力学の法則を完全に確証していた．
>
> 衝突法則が成り立つことを認め，衝突前の軌道は知れているものとすれば，この結果はまた次のように定式化することもできる：衝突の位置と中心線とを計算するためには，衝突後の光量子でも電子でもどちらかの軌道を測定すれば充分である．そうすると，Compton-Simon の実験は，これら２つの観測が同一の結果を与えることを示している．
>
> 一般化して述べると，同一の物理量．．．は２つの違った方法で．．．測定され，その結果はつねに同一である [N55;pp.212-213,(pp.170-171)].

つまり，一つの実験は，つねに二通りに解釈される．一つは，そこで保存則が成立して

いるかの検証として解釈され，それは二つの量の相関的一致を調べることで行われる．次に，保存則が成立していることを仮定して，一方の量を知って，もう一方の量を知ること，つまり，測定として解釈される．ところで，古典力学では測定の際の対象が被る作用は無視されるから，知られるのは，測定前の状態でもあるが，量子力学では，測定後の状態しか知られない．つまり，波束の収縮はこうして起こり，それは，物理法則の検証可能性が物理量の測定可能性を導くことの必然的帰結である．

３．自由質点の位置の反復測定に関する標準量子限界

干渉計型重力波検出装置の性能に関する不確定性原理を用いた簡単な解析から，自由質点の位置の反復測定に関する感度の限界が導かれることが知られているが，その正否を巡って，量子光学および一般相対論の分野で長い間，論争が繰り広げられてきた．この限界――自由質点の位置の反復測定に関する標準量子限界（ＳＱＬ）と呼ばれている――は通常次のように述べられる：時間間隔 τ で自由質点 m の位置 x を２回反復して測定すると，２回目の測定の結果は $(\hbar\tau/m)^{1/2}$ より小さい不確定さで予言することができない．

３．１．ＳＱＬを打破するための Yuen の提案

この限界を導く標準的な議論 [B74,C80] では，不確定性原理

$$\Delta x(0)\Delta p(0) \geqq \hbar/2 \tag{3.1.1}$$

が第１回の測定直後の時刻 $t = 0$ の位置の不確定さ $\Delta x(0)$ と運動量の不確定さ $\Delta p(0)$ に適用される．その結果，第２の測定の時刻 τ までに x の不確定さの２乗（分散）は次のように増加する：

$$\begin{aligned}\Delta x(\tau)^2 &= \Delta x(0)^2 + \Delta p(0)^2\,\tau^2/m^2 \geqq 2\Delta x(0)\Delta p(0)\tau/m \\ &\geqq \hbar\tau/m.\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

ここから，次式のＳＱＬが得られる：

$$\Delta x(\tau) \geqq (\hbar\tau/m)^{1/2}, \tag{3.1.3}$$

このようにして，通常，ＳＱＬは不確定性原理 (3.1.1) の直接の帰結であると説明されてきた．

ところが，Yuen [Y83] は，この標準的な議論に重大な不備があることを指摘した．

自由質点の時間発展は，

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \hat{p}(0)t/m, \tag{3.1.4}$$

で与えられるので，時刻 τ における x の分散は，次式で与えられる：

$$\Delta x(\tau)^2 = \Delta x(0)^2 + \Delta p(0)^2 \tau^2/m^2 + \\ + \langle \Delta\hat{x}(0)\Delta\hat{p}(0) + \Delta\hat{p}(0)\Delta\hat{x}(0)\rangle \tau/m, \tag{3.1.5}$$

ここで，$\Delta\hat{x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$ ，$\Delta x^2 = \langle\Delta\hat{x}^2\rangle$ ，などとおいた．従って，標準的議論はこの式 (3.1.5) の最後の項――相関項と呼ばれる――が非負であることを暗黙のうちに仮定していることになる．Yuen の主張[Y83] は x のある測定は自由質点を負の相関項をもつある状態にするということである．そのような性質をもつ Gauss 状態[S86] は以下のように解析される [Y83].

そこで， $\hat{a}$ を質点の状態の Hilbert 空間における次のような作用素とする：

$$\hat{a} = (m\omega/2\hbar)^{1/2}\hat{x} + 1/(2\hbar m\omega)^{1/2}\, i\hat{p}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \tag{3.1.6}$$

ここで，ω は $\sec^{-1}$ の単位をもつ任意のパラメータである．<u>ねじれコーヒーレント状態（ＴＣＳ）</u>$|\mu\nu\alpha\omega\rangle$ は作用素 $\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^+$ の固有値 $\mu\alpha + \nu\alpha^*$ に対する固有状態である：

$$(\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^+)|\mu\nu\alpha\omega\rangle = (\mu\alpha + \nu\alpha^*)|\mu\nu\alpha\omega\rangle, \\ |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1. \tag{3.1.7}$$

このとき，自由 Hamiltonian は次のように表される：

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2m \\ = (\hbar\omega/2)(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2 - \hat{a}^2/2 - \hat{a}^{+2}/2. \tag{3.1.8}$$

波動関数 $\langle x|\mu\nu\alpha\omega\rangle$ （ここに， $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$）は位相定数因子を除いて，次式で与えられる：

$$\langle x|\mu\nu\alpha\omega\rangle = [m\omega/(\pi\hbar|\mu-\nu|^2)]^{1/4}\times \\ \times\exp[\{-m\omega(1+2\xi i)/(2\hbar|\mu-\nu|^2)\}(x-x_0)^2 + ip_0(x-x_0)]. \tag{3.1.9}$$

ここで，

$$\xi = \mathrm{Im}(\mu^* \nu),$$
$$\alpha = (m\omega/2\hbar)^{1/2} x_0 + 1/(2\hbar m\omega)^{1/2} i p_0 ,$$
$$x_0 , p_0 \quad \text{real}. \tag{3.1.10}$$

さて，$\xi = 0$ のとき，波動関数（3.1.9）は通常の最小不確定状態である．調和振動子の文脈では，(3.1.9) 式の形の波動関数で $\mu \neq 0$ の場合にスクイーズド状態と呼ばれる．状態 $|\mu\ \nu\ \alpha\ \omega\rangle$ の最初の２つのモーメントは次のとおりである：

$$\langle x \rangle = x_0 , \quad \langle p \rangle = p_0 ,$$
$$\Delta x^2 = \hbar |\mu - \nu|^2 / 2m\omega , \qquad \Delta p^2 = \hbar m\omega |\mu + \nu|^2 / 2, \tag{3.1.11}$$
$$\langle \Delta\hat{x}\Delta\hat{p} + \Delta\hat{p}\Delta\hat{x} \rangle = -2\hbar\xi , \tag{3.1.12}$$
$$\Delta x \Delta p = \hbar(1+\xi^2)^{1/2}/4, \tag{3.1.13}$$
$$\langle H \rangle = (\langle p \rangle^2 + \Delta p^2)/2m. \tag{3.1.14}$$

これより，$\xi > 0$ のとき，(3.1.9) 式の x に従属する位相は，自由運動の間に $\Delta x(t)$ を $\Delta x(0)$ から狭めていく働きをする．この振るまいのゆえに Yuen は $\xi > 0$ のときの質点の状態 (3.1.9) を <u>収縮状態</u> (contractive states) と呼んだ．．

任意のＴＣＳ（3.1.9）から出発した自由質点の位置の不確定さは，式 (3.1.5) と (3.1.12)--(3.1.13) から直ちに得られる：

$$\Delta x(t)^2 = (\hbar/2m\omega)(|\mu - \nu|^2 - 4\xi\omega t + |\mu + \nu|^2 (\omega t)^2) \tag{3.1.15}$$
$$= (1/4\xi)(\hbar\tau/m) + (2\hbar/m\omega)(|\mu + \nu|\omega/2)^2 (t-\tau)^2 , \tag{3.1.16}$$

ここに，

$$\tau = 2\xi/(\omega|\mu + \nu|^2) = \xi\hbar m/\Delta p(0)^2 . \tag{3.1.17}$$

$\xi > 0$ に対して，位置の不確定さは時刻 $t=0$ から $t=\tau$ の間に減少していき，最小の不確定さは，時刻 $\tau = 2\xi/(\omega|\mu + \nu|^2)$ において，ＳＱＬの $1/(2\xi^{1/2})$ に達する．この最小の不確定さ $\Delta x(\tau)$ は，次式のように，初期状態の運動量の不確定性にだけ関係している：

$$\Delta x(\tau) = \hbar / 2\Delta p(0) = \Delta x(0) / (1+4\xi^2)^{1/2}. \qquad (3.1.18)$$

このことから，任意に大きい τ に対して，充分に大きい ξ を選べば，$\Delta x(\tau)$ をいくらでも小さくできることがわかる．

従って，もし，測定の直後に自由質点を収縮状態にするような測定が可能ならば，式(3.1.3)で定式化されたＳＱＬは，打ち破ることができる．

３．２．Caves によるＳＱＬの擁護

Yuen [Y83] によって，収縮状態を利用した測定の提案がなされた後，Caves はＳＱＬに関する更に進んだ分析 [C85] を発表して，ＳＱＬを擁護する論陣を張った．そこで，彼は次のようなＳＱＬの定式化の改良を行った：

> 自由質点 m がその位置 x の，同一の測定装置による，２回の測定の間，時間 τ にわたって，ユニタリな時間発展を受けるとする．このとき，第１回の可能な結果について平均すると，$(\hbar\tau/m)^{1/2}$ より小さい不確定さで，第２回の測定結果を予測することはできない．

Caves [C85] は von Neumann [N55; pp.442-445,(pp.350-352)] による位置測定の特定なモデルに対して，このＳＱＬが成立していることを示し，ＳＱＬの妥当性に関する以下のような発見法的証明を与えた．彼の論点は，測定装置がもつ不完全な分解能 σ という概念にある．彼の最初の仮定は，x の測定値の分散 $\Delta(\tau)^2$ が σ^2 と x の測定の時刻における分散の和になるということである：

$$\Delta(\tau)^2 = \sigma^2 + \Delta x(\tau)^2 . \qquad (3.2.1)$$

このことは，測定器が x と線型に結合されている場合には正しいと述べられている．第２の仮定は，最初の測定の直後の自由質点の位置の不確定さは，分解能より大きくはないということである：

$$\Delta x(0) \leqq \sigma . \qquad (3.2.2)$$

この２つの仮定のもとで，彼は時刻 τ における第２回の測定の不確定さ $\Delta(\tau)$ に対する次のような評価を導いた：

$$\begin{aligned} \Delta(\tau)^2 &= \sigma^2 + \Delta x(\tau)^2 \geqq \Delta x(0)^2 + \Delta x(\tau)^2 \\ &\geqq 2\Delta x(0)\Delta x(\tau) \geqq \hbar\tau/m. \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

この議論に従えば，ＳＱＬは仮定 (3.2.1)--(3.2.2) もとで不確定性関係

$$\Delta x(0)\Delta x(\tau) \geq |\langle[\hat{x}(0),\hat{x}(\tau)]\rangle|/2 = \hbar\tau/2m, \qquad (3.2.4)$$

からの帰結ということになる．

しかしながら，測定の分解能に関する彼の定義は曖昧であり，よって，彼の議論に対する批判的検討が必要であると思われる．実際，彼は，論文のなかで次のような３つの異なった定義を使っている．１）自由質点が x の測定の時刻に位置の固有状態にあれば，σ は測定値の不確定性と定義される．２）測定によって，測定直後の位置は，おおよそ，測定値から σ 以内に決定される．（測定直後の位置の標準偏差が σ であると解釈する．）３）分解能の２乗 σ^2 は対象と測定器の相互作用の直前の指針の位置の分散である． これら３つの概念は von Neumann のモデルではすべて同じになるが，本質的には異なる概念である．

測定の分解能の概念は文献中にしばしば言及されているにも関わらず，これまで，その満足のいく定義には到達していないようである．この問題に関して基本的なことは，測定値が質点の状態に関して何を告げているのかということである．この問いかけに対しては，主な考え方が２つある．一つの考え方は，測定値が告げているのは測定直前の質点の位置であるとするものである．というのは，測定前の位置が測定値という測定の結果に対する原因だと考えられるからである．もう一つの考え方は，測定値は測定直後の質点の位置を告げているのだとするものである．そのわけは，測定が質点の位置を，ちょうど，測定後の位置と測定値という，測定という行為の二つの結果が一致するように，変化させるからである．どちらが正しい考え方かということはにわかに決められない問題である．もしそうだとするすれば，測定の分解能に関する問題に対する最良の方策は，分解能という概念には二つのタイプがあるのだと認識することであろう．この理由から，われわれは，次のような区別を設けることにしよう．自由質点が x の測定の時刻に位置の固有状態にあれば，測定の精度 ε を測定値の不確定さとして定義し，また，分解能 σ を測定直後の質点の位置の測定値からの偏差として定義する．これらの概念の，重ね合わせの場合も含めた，数学的な定義および詳しい議論は次節以降で与えることにする．

さて，ＳＱＬの妥当性の問題に戻ろう．ＳＱＬの定式化の改良によって，自由質点を収縮状態にする測定というアイディアが直ちにＳＱＬを打ち破るというわけにはいかなくなった．とはいっても，Caves の発見法的証明を免れる可能性は残されている．彼の $\sigma \geq \Delta x(0)$ という仮定の定式化には曖昧さが含まれているからである．にもかかわらず，ＳＱＬを打ち破ろうという人々にとって，Caves の仮定を免れるような測定の実現可能なモデルを構成することが大変な重荷であることには違いない．そこで，次の節では実現可能な測定に関する一般的な考察を与えよう．

４．測定の量子力学

この節の主な目的は，von Neumann の測定過程の分析を，必ずしも離散的でない物理量の，近似的測定の場合にまで拡張する．その際，分析は量子力学の原理だけに基づいて行われる．

４．１．測定の統計

量子力学の公理として通常の非相対論的量子力学の公理を考える．ただし，超選択則は考慮しない．これは，（ａ）物理量と状態がそれぞれ Hilbert 空間の自己共役作用素とベクトル（または，密度作用素）で表されるという定義，（ｂ）時間に依存する Schroedinger 方程式，（ｃ）交換可能な物理量の確率分布に対する Born の統計公式からなっている．ここでは，測定の際の射影の要請は除かれている．（我々は，物心平行論の要請を暗黙に認めているので，von Neumann が示したようにこれはなしですますことができる．）

以下で，全ての可能な測定について議論するために，あらかじめそれらを２種類に分類しておくのが便利である．第１種の測定とは，それが測定される系の量子力学的記述を破壊しないものである．このような測定に対しては，原理的に，可能な測定値のそれぞれの場合について，測定直後の系の状態が決定できるものと考える．第２種の測定とは，それが，測定される系の量子力学的記述を破壊するものである．このような測定に対しては，測定後の系の状態という概念は考えられないから，測定は測定値だけを与える．光子計数器のような巨視的な検出器との直接の相互作用の全過程は，第２種の測定と考えられる．

第１種の測定の統計は次の２つの要素で特徴付けられる：測定直前の系の状態 ψ に対して，$P(a|\psi)$ を測定値 a が得られる確率密度とし，ψ_a を測定値が a である場合の測定直後の状態とする．すると，測定器の物理的配置および指定された準備によって，全ての ψ に対する $P(a|\psi)$ と状態変化 $\psi \to \psi_a$ がその測定に固有のものとして定まる．これら２つの要素は与えられた第１種の測定の統計と呼ばれる．ここで，$P(a|\psi)$ はその測定の測定確率（measurement probability）と呼ばれ，$\psi \to \psi_a$ は状態遷移（state transition）と呼ばれる．更に，測定直前の状態 ψ はその測定の事前状態（prior state），直後の状態 ψ_a は事後状態（posterior state）と呼ばれる．このような測定の統計の特徴付けから，もし２つの測定が同一のものと考えられるならば，それぞれに対応する統計も同一でなければならない．一方，第２種の測定の統計は測定確率だけで特徴付けられる．というのは，このような測定に関しては，測定後の状態を記述することができないからである．

４．２．測定図式

一般的な公理論の立場で測定の理論を建設するためには，全ての物理量に対してなんらかの測定手段が存在するという要請から出発するのが便利である．もちろん，このことは，統計公式に現れる物理量の確率分布とは，その物理量を測定するときの測定値の分布であるという普通の解釈の言い替えにすぎない．そこで，このことを次の要請で明らかにしておこう．

要請１．任意の物理量 A に対して，その測定確率 $P(a|\psi)$ が，任意の状態ベクトル ψ に対して，次の Born の統計公式

$$P(a|\psi)da = \langle\psi|dA\hat{}(a)|\psi\rangle \tag{4.2.1}$$

を満たす測定が存在する．ただし，この測定は，第２種であってもよい．ここで，$dA\hat{}(a)$ は，物理量 A に対応する自己共役作用素 $A\hat{}$ の単位の分解とする．すなわち，$A\hat{}$ は，

$$A\hat{} = \int a\, dA\hat{}(a) \tag{4.2.2}$$

とスペクトル分解される．

ここで，この報告で用いられる記号上の規約を確認しておく．物理量 A に対して，対応する自己共役作用素を $A\hat{}$ で，そのスペクトル測度を $A\hat{}(\Delta)$（Δ は Borel 集合の上を動く）で，その積分要素（または，単位の分解）を $dA\hat{}(a)$（a は実数の上を動く）で表す．よって，A と $dA\hat{}(a)$ の関係が式 (4.2.1) で，$dA\hat{}(a)$ と $A\hat{}$ の関係が式 (4.2.2) で，また，$dA\hat{}(a)$ と $A\hat{}(\Delta)$ の関係が次式で表される：

$$A\hat{}(\Delta) = \int_{\Delta} dA\hat{}(a). \tag{4.2.3}$$

また，Hilbert 空間の作用素には一般にカラット ^ を付け，より一般の測度に対しても式 (4.2.3) のような，測度と積分要素との対応を利用する．また，Hilbert 空間の恒等作用素は 1 で表される．

以下において，式 (4.2.1) を満たす測定器を物理量 A の検出器 (detector) と呼ぶ．ここで，要請１．によっては第１種の測定の存在に関して何の主張もされていないことに注意しなければならない．我々の基本的な問題は，量子力学の公理とこの要請から，どのような第１種の測定が存在し得るのかを厳密に定めることである．この問題を解決するために，von Neumann によって考え出された測定過程に関する次の図式を採用する．

対象系と呼ばれる量子力学系Ｓ（Hilbert 空間 H で表される．）がある測定装置によって第１種の測定がなされるとする．測定直前の対象系Ｓの状態を ψ とする．第１の観測者と呼ばれる観測者は，この測定を系Ｓのみが物理系であるとして記述する．

すると，この測定は用いられる測定器に固有の測定の統計によって特徴付けられる．これを，$P_i(a|\psi)$ および $\psi \to \psi_a$ で表す．ところで，この測定の統計は，測定器の物理的記述によって完全に決定されるはずである．そこで，測定器をも物理系として記述する観測者を想定して，この測定の統計を決定することを試みる．

そこで，第２の観測者と呼ばれる観測者は，量子力学系Ｓの他に，測定器の一部を量子力学系として記述し，この測定を２つの系の相互作用として記述する．そのために，測定器を２つの部分に分ける．第１の部分は，対象系と直接相互作用する量子力学系で，これを，探査系Ｐ（Hilbert 空間 K で表される．）と呼ぶ．測定器の他の部分は，探査系のある物理量（これは，伝統的な観測理論では，指針の位置と呼ばれる．）を，普通は，第２種の測定によって，測定する検出器である．対象系は，探査系との相互作用の直後に他の測定器によって，再び測定が可能である．

第２の観測者にとって，この測定は，対象系と探査系の相互作用および探査系に対する第２種の測定の２段階からなり，次のように記述される．測定器の設計，配置，準備によって，次の要素が，第２の観測者によって制御可能である；探査系の相互作用直前の状態 ϕ，対象系と探査系との合成系Ｓ＋Ｐの相互作用による時間発展 $\hat{U}$，測定器の引き続く部分で測定される探査系の物理量 A ．これらの要素を用いた第２の観測者による測定の物理的記述を<u>測定図式</u>（measurement scheme）と呼ぶ．すると，相互作用の直前の合成系の状態は，$\psi \otimes \phi$ であり，相互作用直後の合成系の状態は，$\hat{U}(\psi \otimes \phi)$ である．さて，この測定の統計は，第２の観測者にとってどのように記述されるであろうか．第２の観測者にとっての測定確率 $P_{II}(a|\psi)$は，測定値が探査系の物理量 A の相互作用直後の測定によって与えられることから，

$$P_{II}(a|\psi)da = \langle \hat{U}(\psi \otimes \phi)|1 \otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi \otimes \phi)\rangle \qquad (4.2.4)$$

によって，与えられる．第１の観測者と第２の観測者の現象の記述の整合性から，第１の観測者にとっての測定確率は第２の観測者の測定確率と一致しなければならない．よって，第１の観測者の測定確率 $P_i(a|\psi)$は，

$$P_i(a|\psi)da = \langle \hat{U}(\psi \otimes \phi)|1 \otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi \otimes \phi)\rangle \qquad (4.2.5)$$

となる．

次に，測定の状態遷移を決定するために，対象系と探査系との相互作用の直後に，対象系の任意の物理量 X を測定すると仮定する．さて，この時刻に，探査系の物理量 A の測定がされるから，この同時測定によって，$A = a$ かつ $X = x$ という測定値が得られる結合確率分布 $P_{II}(x,a|\psi)dxda$ が，第２の観測者によって，次のように計算される．

$$P_{II}(x,a|\psi)dxda = \langle \hat{U}(\psi \otimes \phi)|d\hat{X}(x) \otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi \otimes \phi)\rangle \qquad (4.2.6)$$

一方，第１の観測者にとっては，物理量 X の測定は，第１の測定の直後に行われるから，その確率分布は事後状態 ψ_a によって計算される．また，第１の測定の測定値が a である確率は $P_i(a|\psi)da$ だから，第１の測定値が a で第２の物理量 X の測定値が x である確率分布 $P_i(x,a|\psi)dxda$ は，

$$P_i(x,a|\psi)dxda = \langle\psi_a|d\hat{X}(x)|\psi_a\rangle P_i(a|\psi)da \qquad (4.2.7)$$

となる．よって，再び第１の観測者と第２の観測者の記述の整合性から，$P_i(x,a|\psi) = P_{II}(x,a|\psi)$ でなければならない．したがって，

$$\langle\psi_a|d\hat{X}(x)|\psi_a\rangle = \langle\hat{U}(\psi\otimes\phi)|d\hat{X}(x)\otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi\otimes\phi)\rangle\times \times(1/\langle\hat{U}(\psi\otimes\phi)|1\otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi\otimes\phi)\rangle) \qquad (4.2.8)$$

となる．物理量 X は任意であったから，任意の完全正規直交系 $\{|i\rangle\}$ に対して，

$$\langle i|\psi_a\rangle\langle\psi_a|j\rangle = \langle\hat{U}(\psi\otimes\phi)|(|j\rangle\langle i|\otimes d\hat{A}(a))|\hat{U}(\psi\otimes\phi)\rangle\times \times(1/\langle\hat{U}(\psi\otimes\phi)|1\otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi\otimes\phi)\rangle) \qquad (4.2.9)$$

となる．この式から，明らかに，ψ_a を絶対値１の位相因子を除いて，決定することができる．実際，上式は，密度作用素 $|\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ の行列要素を完全に決定している．すなわち，探査系の Hilbert 空間に対する部分跡の演算を TR_K で表せば，

$$|\psi_a\rangle\langle\psi_a| = TR_K[(1\otimes d\hat{A}(a))\hat{U}(|\psi\otimes\phi\rangle\langle\psi\otimes\phi|)\hat{U}^*]\times \times(1/\langle\hat{U}(\psi\otimes\phi)|1\otimes d\hat{A}(a)|\hat{U}(\psi\otimes\phi)\rangle) \qquad (4.2.10)$$

となる．（ここで，微分は Radon-Nikodym の意味でつねに可能である．）

以上の考察から，第２の観測者のもつ測定器に対する物理的記述は，第１の観測者の測定の統計を完全に決定することが証明された．もちろん，この議論は von Neumann が再現可能な測定，つまり，測定の状態遷移が波束の収縮の公式で表せる測定について行ったことの一般化にすぎない．

４．３．測定の統計の数学的表現

これまでの測定過程の分析により，どんな統計が第１種の測定として実現可能かとい

う問題は，どんな統計が測定図式で実現されるかという問題に帰着された．この問題を解決するための重要な第一歩は，測定の統計を扱いやすい数学的対象で表現することである．以下では，どんな実現可能な測定の統計も，操作測度と呼ばれる単一の数学的対象で表現されることを示す．測定の操作とか効果に関する詳しい数学的理論については[L83,K83]を，また，操作測度と効果測度については，[D76,H82,084-086]を参照されたい．

H を対象系のヒルベルト空間とし，ある第１種の測定の統計とその測定図式が与えられているとする．つまり，H の任意の状態ベクトル ψ に対して，測定確率 $P(a|\psi)$ と状態遷移 $\psi \to \psi_a$ が与えられ，それに対して，探査系のヒルベルト空間 K，K の状態ベクトル ϕ，K の物理量 A，および，$H \otimes K$ のユニタリ作用素 $U\hat{}$ が存在して，式 (4.2.10) を満たすとする．

はじめに，この統計的記述を事前状態が混合である場合に拡張しよう．$\rho\hat{}$ を事前状態を表す密度作用素，$\rho\hat{}_a$ を事後状態を表す密度作用素とする．すると，測定直前の対象系と探査系との合成系の状態は密度作用素 $\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|$ で，測定直後の状態は，$U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*$ で表される．前節で展開した議論を再び繰り返すことにより，測定の統計は次のようになる．

$$P(a|\rho)da = Tr[(1\otimes dA\hat{}(a))U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*], \tag{4.3.1}$$

$$\rho\hat{}_a = TR_K[(1\otimes dA\hat{}(a))U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*]\times \times (1/Tr[(1\otimes dA\hat{}(a))U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*]). \tag{4.3.2}$$

次に，Δ を数直線の Borel 集合とし，S_Δ をこの測定の測定値 a が Δ に属する対象系Sの部分集団とする．この部分集団 S_Δ の測定直後の状態を $\rho\hat{}_\Delta$ で表す．以下で，$\rho\hat{}_\Delta$ を表す式を求めよう．そのために，第１の測定者にとっての状態 $\rho\hat{}_\Delta$ の現象論的意味を考えてみよう．状態は可能な測定の測定値の分布の確率的予言を介して現象と結び付いているから，第１の観測者が，今，考えている測定の直後に，対象系の任意の物理量 X の測定を行うと仮定する．そこで，第１回の測定の測定値を a，第２回の測定の測定値を x とする．この２回の反復測定を多数回繰り返した結果は，値の組 (x, a) の統計を与える．明らかに，$\rho\hat{}_\Delta$ によるこの測定結果に対する統計的予言は，次のようなものである．はじめに，値の組 (x, a) の中から，a が Δ に属する全ての値の組を選び出す．このとき，このデータの集まりのうちで，x が Borel 集合 Δ' に属する頻度は，実験の回数を無限大にするとき，$\rho\hat{}_\Delta$によって計算される確率，すなわち，$Tr[dX\hat{}(\Delta')\rho\hat{}_\Delta]$ に収束する．従って，確率論の言葉によれば，$\rho\hat{}_\Delta$ によって計算される確率 $Tr[dX\hat{}(\Delta')\rho\hat{}_\Delta]$ は第１回の測定値 a が Δ に属するという条件のもとでの，第２回の測定値 x が Δ' に属するという確率事象の条件付確率ということになる．それでは，この条件付確率は，第２の観測者にとってどのように予言されるであろうか．第２の観測者にとって，第１回の測定値が a で，第２回の測定値が

x であるという確率事象は，対象系と探査系との相互作用の直後に，探査系の物理量 A と対象系の物理量 X との同時測定を行ったとき， A の測定値が a で，X の測定値が x であるという確率事象として記述される．従って，a が Δ に属し，X が Δ' に属するという確率事象の確率は，第２の観測者によれば，Born の統計公式から次のように予言される．

$$P_{II}(X\in\Delta',A\in\Delta) = Tr[\ ((X\hat{}(\Delta')\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ].$$

(4.3.3)

従って，a が Δ に属するという条件のもとで X が Δ' に属するという確率事象の条件付確率は，確率論の公式から，次のようになる：

$$P_{II}(X\in\Delta'|A\in\Delta) = P_{II}(X\in\Delta',A\in\Delta)/P_{II}(A\in\Delta)$$
$$= Tr[\ ((X\hat{}(\Delta')\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ]\times$$
$$\times(1/Tr[\ ((1\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ]).$$

(4.3.4)

よって，第１の観測者と第２の観測者の予言の整合性から，次式がえられる：

$$Tr[X\hat{}(\Delta')\rho\hat{}_\Delta]$$
$$= Tr[\ ((X\hat{}(\Delta')\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ]\times$$
$$\times(1/Tr[\ ((1\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ]).$$

(4.3.5)

この式と物理量 X の任意性から，$\rho\hat{}_\Delta$ を決定する次式がえられる：

$$\rho\hat{}_\Delta = TR_K[\ (1\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ]\times$$
$$\times(1/Tr[\ (1\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ]).$$

(4.3.6)

ここで，これらの測定の統計を単一の数学的対象で表現するために次の定義を与える：任意のボレル集合 Δ と跡族作用素 $\rho\hat{}$ に対して，

$$I(\Delta)\rho\hat{} = TR_K[\ (1\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ].$$

(4.3.7)

すなわち，I(Δ) は，跡族作用素 $\rho\hat{}$ に対して跡族作用素 $TR_K[\ (1\otimes A\hat{}(\Delta))\ U\hat{}(\rho\hat{}\otimes|\phi><\phi|)U\hat{}^*\ ]$ を対応させる写像である．このとき，写像 I(Δ)は次の性質をも

つ.

1.任意のボレル集合 Δ に対して，写像 $\rho\hat{} \to I(\Delta)\rho\hat{}$ は跡族作用素の空間上の線型作用素で，密度作用素を正値跡族作用素に写像する.

2．任意のボレル集合 Δ と密度作用素 $\rho\hat{}$ に対して，

$$0 \leqq Tr[I(\Delta)\rho\hat{}] \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad Tr[I(R)\rho\hat{}] = 1. \tag{4.3.8}$$

3．任意のボレル集合の可算列 $\{\Delta_i\}$ と密度作用素 $\rho\hat{}$ に対して，

$$\Sigma_i \; Tr[I(\Delta_i)\rho\hat{}] = Tr[I(\cup_i \; \Delta_i)\rho\hat{}]. \tag{4.3.9}$$

一般に，上記の性質1－2.をもつ写像 $\rho\hat{} \to I(\Delta)\rho\hat{}$ は，測定の操作 (operation) と呼ばれ，性質1－3．をもつ写像 $\Delta \to I(\Delta)$ は，測定の操作測度 (operation measure) と呼ばれる．さて，実現可能な測定から得られた操作測度は，更に，次の性質をもつ.

4．任意の Borel 集合Δとベクトルの有限列$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ と$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ に対して，

$$\Sigma_{i,j} \langle \xi_i | I(\Delta)(|\eta_i\rangle\langle\eta_j|)|\xi_j\rangle \geqq 0. \tag{4.3.10}$$

この条件を満たす操作測度は，完全正値 (completely positive) といわれる．従って，実現可能な測定の統計は，完全正値な操作測度を定義することがわかった.

次に，この操作測度が測定の統計の全データを表現していることを示そう．まず，測定確率 $P(a|\psi)$ は，

$$P(a|\psi)da = Tr[dI(a)(|\psi\rangle\langle\psi|)], \tag{4.3.11}$$

で表される．事前状態 ψ に対する事後状態 ψ_a は，

$$|\psi_a\rangle\langle\psi_a| = dI(a)(|\psi\rangle\langle\psi|)/Tr[dI(a)(|\psi\rangle\langle\psi|)], \tag{4.3.12}$$

で表され，ここに，右辺の微分は，一種の Radon-Nikodym の微分であって，その正当化は，[085a] で与えらている．Borel 集合 Δ と事前状態 $\rho\hat{}$ に対しても同様に以下の各式が成立する.

$$P(\Delta|\hat{\rho}) = \mathrm{Tr}[I(\Delta)\hat{\rho}], \tag{4.3.13}$$

$$\hat{\rho}_a = dI(a)\hat{\rho}/\mathrm{Tr}[dI(a)\hat{\rho}], \tag{4.3.14}$$

$$\hat{\rho}_\Delta = I(\Delta)\hat{\rho}/\mathrm{Tr}[I(\Delta)\hat{\rho}]. \tag{4.3.15}$$

以上で，実現可能な第１種の測定の統計は，完全正値な操作測度で，完全に表現されることがわかった．

なお，これまでの議論では，測定の操作測度を得るのに第２の観測者による測定図式を利用してきたが，この結果を４．２節の結果と比較することにより，測定の統計から直接定義する式が次のように得られる．事前状態 ρ が次のスペクトル分解をもつとする：

$$\hat{\rho} = \Sigma_i \lambda_i |\psi^i\rangle\langle\psi^i|. \tag{4.3.16}$$

このとき，測定確率 $P(a|\hat{\rho})$ は，

$$P(a|\hat{\rho}) = \Sigma_i \lambda_i P(a|\psi^i). \tag{4.3.17}$$

となる．このとき，事後状態 $\hat{\rho}_a$ は明らかにすべての $|\psi^i{}_a\rangle\langle\psi^i{}_a|$ の混合で（$\psi^i{}_a$ は事前状態 ψ^i に対する事後状態である），その相対頻度は，λ_i と $P(a|\psi^i)$ に比例するから，次式で与えられる：

$$\hat{\rho}_a = \Sigma_i \lambda_i P(a|\psi^i)|\psi^i{}_a\rangle\langle\psi^i{}_a|/\Sigma_i \lambda_i P(a|\psi^i). \tag{4.3.18}$$

次に，$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ のとき，$\hat{\rho}_\Delta$ は，Δ に属するすべての a に対する $|\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ の混合で，その相対頻度は $P(a|\psi)$ に比例するから，

$$\hat{\rho}_\Delta = \int_\Delta da\, P(a|\psi)|\psi_a\rangle\langle\psi_a|/\int_\Delta da\, P(a|\psi). \tag{4.3.19}$$

となる．更に，事前状態が式（4.3.16）の混合のとき，式（4.3.18）の $\hat{\rho}_a$ を用いて，

$$\hat{\rho}_\Delta = \int_\Delta da\, P(a|\hat{\rho})\hat{\rho}_a/\int_\Delta da\, P(a|\hat{\rho}), \tag{4.3.20}$$

が得られる．したがって，操作測度 I は次式で与えられる：

$$dI(a)\hat{\rho} = P(a|\hat{\rho})\hat{\rho}_a\, da$$
$$= \Sigma_i \lambda_i P(a|\psi^i)|\psi^i{}_a\rangle\langle\psi^i{}_a|da, \quad (4.3.21)$$
$$I(\Delta)\hat{\rho} = \int_\Delta dI(a)\hat{\rho}. \quad (4.3.22)$$

これらの関係を一言で要約すれば，測定の統計を積分したものが操作測度であり，操作測度を微分すれば，測定の統計が得られる．

次に，F を与えられた測定の測定値を表す確率変数とする．すると，事前状態 $\hat{\rho}$ が与えられたときの，F の値が Δ に属するという確率事象の確率分布 $P(F\in\Delta|\hat{\rho})$ は，式 (4.3.13) から得られる：

$$P(F\in\Delta|\hat{\rho}) = \int_\Delta P(a|\hat{\rho})da = \mathrm{Tr}[I(\Delta)\hat{\rho}]. \quad (4.3.23)$$

このとき，正作用素値測度 $\Delta\to\hat{F}(\Delta)$ が一意に存在して，次の条件を満たす：

$$0 \leq \hat{F}(\Delta) \leq 1, \quad \text{かつ}, \quad \hat{F}(R) = 1, \quad (4.3.24)$$
$$\mathrm{Tr}[\hat{F}(\Delta)\hat{\rho}] = P(F\in\Delta|\hat{\rho}). \quad (4.3.25)$$

この $\hat{F}$ を操作測度 I の効果測度 (effect measure) という．操作測度 I の場合，I(Δ)が跡族作用素の空間上の完全正値な線型変換であったのに対して，$\hat{F}(\Delta)$は，Hilbert 空間上の正作用素であることに注意を要する．効果測度と操作測度の関係は，Hilbert 空間上の有界作用素の空間に作用する，I(Δ)の随伴変換 $I(\Delta)^*$ を用いて，次のように表される：

$$\hat{F}(\Delta) = I(\Delta)^* 1. \quad (4.3.26)$$

式 (4.3.25) から，測定が，ある物理量 A の検出であるとき，$\hat{F}$ は A のスペクトル測度 $\hat{A}$ に等しい．この意味で，効果測度は，物理量の概念を測定の統計の側面から一般化したものと言える．このような考えは，おもに Ludwig によって，最初に発展させられた ([L83] 参照)．

4．4．実現可能な第１種の測定の特徴付け

これまでの議論によって，次の２つの事実が明らかになった．

１．対象系と探査系の相互作用および探査系に対する検出過程からなる測定図式によって，第２の観測者は測定の統計を完全に決定することができる．

２．全ての測定は第２の観測者によって分析できるという物心平行論の要請のもとで，

第１の観測者のもつ測定の統計は，完全正値な操作測度と呼ばれる単一の数学的対象で表現される．

しかしながら，どんな完全正値な操作測度も第１の観測者の測定の統計を表すかはまだ明らかではない．この問題を以下において解決して，実現可能な第１種の測定の特徴付けを完成しよう．これまでの議論からも明らかなように，問題は，次のような厳密な数学的定式化をもつ．

Ｈを対象系を記述するヒルベルト空間とし，Ｉを対象系に対する完全正値な操作測度とする．つまり，Ｉは，４．３節の条件１．から４．を満たす任意に与えられた写像とする．そこで，問題は，次のようになる．探査系を記述するための適当なヒルベルト空間Ｋを構成して，そこに，実際に検出される探査系の物理量を記述するＫの自己共役作用素 $\hat{A}$，探査系の準備を記述するＫの状態ベクトルϕ，そして，対象系と探査系の相互作用間の合成系の時間発展を表すＨ⊗Ｋのユニタリ作用素 $\hat{U}$ を見いだして，次式が成り立つようにすること：任意のボレル集合Δとの密度作用素$\hat{\rho}$ に対して，

$$I(\Delta)\hat{\rho} = TR_K[(1\otimes d\hat{A}(\Delta))\hat{U}(\hat{\rho}\otimes|\phi><\phi|)\hat{U}^*]. \qquad (4.4.1)$$

この数学の問題は，von Neumann が彼の観測理論のなかで解決した問題とよく似ている．実際 von Neumann が解決した問題はこの問題の特殊な場合である． von Neumann の議論とわれわれの一般的な議論との関係を明らかにするために，この関係について述べておこう．

$$X = \Sigma_i \; x_i |x_i><x_i| \qquad (4.4.2)$$

を縮退のない固有値，$\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$，をもつ物理量とする．物理量 X の再現可能な測定の統計は次のように仮定されている：

$$\begin{aligned} &\text{測定確率：} \quad P(\{x_i\}|\psi) = |<x_i|\psi>|^2 , \\ &\text{状態遷移：} \quad \psi \to \psi[x_i] = |x_i>. \end{aligned} \qquad (4.4.3)$$

ただし，固有値以外の実数 a に対しては，$P(\{a\}|\psi) = 0$ であり，$\psi[a]$ は任意とする．この統計に対する操作測度は，式 (4.3.18) から，

$$I(\Delta)\hat{\rho} = \Sigma\, |x_i><x_i|\hat{\rho}|x_i><x_i|, \quad (\text{和の範囲は } x_i \in \Delta) \qquad (4.4.4)$$

となる．von Neumann の証明は，この操作測度が，式(4.4.1)を満たすようにできることを示している．実際，探査系の空間として，Ｋを基底 $\{\ldots, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \ldots\}$

をもつヒルベルト空間とし，探査系の準備をψ_0，探査系の物理量を $A = \Sigma_i \ x_i \ | \psi_i >< \psi_i |$ とする．このとき，対象系と探査系の相互作用による時間発展 U を次のようなH⊗Kのユニタリ作用素とする：任意の状態 $\psi = \Sigma_k \ c_k \ |x_k>$ に対して，

$$\hat{U}|\psi \otimes \psi_0> = \Sigma_k \ c_k \ |x_k> \otimes |\psi_k>. \qquad (4.4.5)$$

このとき，式(4.4.4)で定義されたIが式（4.4.1）を満たすことが示される．

さて，我々の問題は，前節の条件1．－4．で規定された，抽象的なIが与えられたときに，やはり，式(4.4.1)を満たすようなK，ϕ，$\hat{A}$，$\hat{U}$ を構成することである．このような数学的構成は，Naimark の非直交的単位の分解を直交的単位の分解に拡張する定理や，Stinespring の完全正値写像を準同型写像に拡張する定理と同様の手法により，[084] において，得られた．すなわち，次の定理が得られる．

<u>定理1．任意の完全正値操作測度は実現可能な第1種の測定の統計を表す．</u>

この定理は，ある目的のために，ある統計をもつ測定器が有効であるという統計的考察がなされたときに，そのような測定器が物理的に実現可能かどうかを判定するために利用することができる．

そのような議論の一例として，Gordon と Louisell によって考えられた測定の統計が実現可能であることを示そう．$\{\Psi_a\}$ と $\{\Phi_a\}$ を実径数 a をもつ波動関数の族とする．記号で $\{|\Psi_a><\Phi_a|\}$ と書かれる，Gordon-Louisell の測定とは，次のような測定の統計をもつものである：任意の事前状態ψに対して，

$$\begin{aligned} &\text{測定確率：} \quad P(a|\psi) = |<\Phi_a|\psi>|^2 , \\ &\text{状態遷移：} \quad \psi \rightarrow \Psi_a . \end{aligned} \qquad (4.4.6)$$

Gordon-Louisell の測定の特徴的性質は，事後状態Ψ_aが測定値 a だけに依存して，事前状態ψにはまったくよらないということである．測定確率が正規な確率分布を表すために，$\{\Phi_a\}$は，次のように正規化されていなければならない：

$$\int |\Phi_a><\Phi_a| da = 1. \qquad (4.4.7)$$

一方，Ψ_aは単位ベクトルである．式（4.4.6）で与えられた測定の統計は次の操作測度を定義する：

$$I(\Delta)\hat{\rho} = \int_\Delta |\Psi_a><\Phi_a|\hat{\rho}|\Phi_a><\Psi_a| da. \qquad (4.4.8)$$

次の計算により，この操作測度は完全正値であることがわかる：ベクトルの有限列ξ_1

$,\xi_2,\ldots,\xi_n$ と $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ に対して，

$$\begin{aligned}&\Sigma_{i,j}\langle\xi_i|dI(a)(|\eta_i\rangle\langle\eta_j|)|\xi_j\rangle\\&\quad=\Sigma_{i,j}\langle\xi_i|\Psi_a\rangle\langle\Phi_a|\eta_i\rangle\langle\eta_j|\Phi_a\rangle\langle\Psi_a|\xi_j\rangle\,da\\&\quad=|\Sigma_i\langle\xi_i|\Psi_a\rangle\langle\Phi_a|\eta_i\rangle|^2\\&\quad\geqq 0.\end{aligned}\tag{4.4.9}$$

よって，定理１から次の定理がえられる．

定理２．Gordon-Louisell の測定は実現可能である．

前述のように，Gordon-Louisell の測定は，事後状態を事前状態とは独立に制御するという特質をもっている．このことを位置の測定に応用すると，位置測定に伴う状態遷移を任意に制御することが可能であるという結論が得られる．

定理３．単位ベクトルのボレル可測な任意の族 $\{\Psi_a\}$ に対して，次の測定の統計は実現可能である：任意の波動関数 ψ に対して，

$$\begin{aligned}&\text{測定確率：}\quad P(a|\psi)=|\psi(a)|^2,\\&\text{状態遷移：}\quad \psi\to\psi_a=\Psi_a.\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

この測定は，Gordon-Louisell の測定 $\{|\Psi_a\rangle\langle a|\}$ に対応し，その操作測度と効果測度は，

$$I(\Delta)\hat{\rho}=\int_\Delta da|\Psi_a\rangle\langle a|\hat{\rho}|a\rangle\langle\Psi_a|,\tag{4.4.11}$$

$$\hat{F}(\Delta)=\int_\Delta da|a\rangle\langle a|,\tag{4.4.12}$$

となる．

５．ＳＱＬを打破する測定

これまでの節で，ＳＱＬにまつわる問題がどんなものかということを紹介し，量子力学から量子力学の測定について何がいえるかということを議論してきた．そこから得られた一つの結論は，完全正値操作測度によって記述される測定の統計はすべて実現可能だということだった．この最後の節で，ＳＱＬを打破する自由質点の測定が実現可能であることを示そう．

５．１．近似測定の統計

Ｉ を完全正値操作測度とする．すると， Ｉ はある測定の統計を表していると考えられる．では，どんなときに Ｉ が与えられたある物理量の測定であると考えられるのだろうか．以下において，この問題の典型的な場合として，いつ与えられた操作測度が自由度１の質点の位置の測定と見なせるかという問題を考察しよう．われわれの解析は，前節で約束した精度と分解能の数学的定義に導き，ＳＱＬの数学的に厳密な定式化を与える．

教科書に出ている位置測定の記述では，その統計は次のように特徴付けられている：

$$\text{測定確率：}\quad P(a|\psi) = |\psi(x)|^2 , \tag{5.1.1}$$

$$\text{状態遷移：}\quad \psi \to \psi_a = |a\rangle . \tag{5.1.2}$$

しかし，この両方の条件を満たす操作測度は存在しないことが証明される．一般に，離散的でない物理量に対して再現可能な操作測度は存在しないことが証明されている[084]．ここで，操作測度 Ｉ が再現可能とは，

$$\mathrm{Tr}[\,I(B\cap C)\rho\hat{}\,] = \mathrm{Tr}[\,I(B)I(C)\rho\hat{}\,], \tag{5.1.3}$$

が任意の密度作用素 $\rho\hat{}$ と Borel 集合 Ｂ， Ｃ に対して成立することをいう．（式(5.1.1)と(5.1.2)からこの条件が得られる．）従って，実現可能な位置の測定はすべて近似測定である．近似測定という言葉の意味を明らかにするためには，測定の正確さに関する誤差基準の精密な議論が必要である．そこで，３．２節で導入した，精度と分解能という二つの概念に，その正確な定義を与えよう　精度を定義するときに出会うの一つの困難は，測定値の分布から雑音による因子を取り出すことである（多分，この困難のゆえに精度と分解能という区別について，これまで，文献中でまったく論じられることがなかったのであろう）． Ｉ を操作測度とし， $F\hat{}$ をその効果測度とする．

Ｉ が位置の物理量のある近似測定を記述していると考えられるための必要条件を考えよう．最初の条件は，$F\hat{}$ が位置の物理量と両立すること，すなわち，任意の Borel 集合 Δ に対して，

$$[x\hat{},F\hat{}(\Delta)] = 0, \tag{5.1.4}$$

が成り立つことである．この条件は，この測定から得られる情報（例えば測定値がΔに属するというような）が，位置に関する本来の情報と<u>両立可能</u>（compatible）でなければならないということで正当化されるであろう．この条件のもとで，次の式を満たす核関数 G(a,x) が存在する：

$$dF\hat{}(a) = da \int dx\ G(a,x)|x><x|. \qquad (5.1.5)$$

たとえ，測定器が位置を近似的にしか測定しないとしても，その測定値の分布 $P(a|\psi)$ は位置の分布 $|\psi(x)|^2$ と関係付けられていることが期待される．実際，式 (5.1.5) から，この関係が次のように表されることがわかる：

$$P(a|\psi) = \int dx\ G(a,x)|\psi(x)|^2 . \qquad (5.1.6)$$

ここで，$G(a,x)$ は特定の波動関数 $\psi(x)$ からは独立で，よって，測定値に含まれる雑音の成分を表していると考えられる．明らかに，任意のψに対して，$P(a|\psi) = |\psi(a)|^2$ が成立する（すなわち，無雑音の場合）ための必要充分条件は，$G(a,x) = \delta(a - x)$ となることである．おおよそ，$G(a,x)$ は質点の測定のときの位置が x であるという条件のもとでの，測定値 a が得られる条件付確率密度である．よって，この場合の精度 $\varepsilon(x)$ は，

$$\varepsilon(x)^2 = \int da\ (a - x)^2\ G(a,x), \qquad (5.1.7)$$

で与えられるべきである．従って，質点の事前状態が ψ のとき，この測定の<u>精度</u>(precision) $\varepsilon(\psi)$ は次式で与えられる：

$$\varepsilon(\psi)^2 = \int dx\ \varepsilon(x)^2\ |\psi(x)|^2 . \qquad (5.1.8)$$

同様の考察によって，質点の事前状態が ψ のとき，測定の<u>分解能</u>（resolusion）$\sigma(\psi)$ が次式で与えられる：

$$\sigma(\psi)^2 = \int da\ \sigma(a)^2\ P(a|\psi), \qquad (5.1.9)$$

ここに，

$$\sigma(a)^2 = \int dx(a - x)^2\ |\psi_a(x)|^2 . \qquad (5.1.10)$$

である．

近似測定のための第２の必要条件は，測定値の平均値が事前状態における平均位置に一致するという意味で，雑音が<u>不偏</u>（unbiased）であるという条件で，次式で表される：任意の ψ に対して，

$$\int dx\ x\ P(x|\psi) = <\psi|\hat{x}|\psi>. \qquad (5.1.11)$$

$\Delta(\psi)$ を質点の事前状態 ψ に対する測定値の不確定さ（標準偏差）とし，$\Delta x(\phi)$ を質点の状態 ϕ の位置の不確定さとする．そのとき，一般に次の定理が成り立つ．

定理４．Ｉ を１自由度系の操作測度とする．式（5.1.4）と（5.1.11）で表現される両立可能性と不偏性の条件のもとで，次の関係が成立する：

$$\varepsilon(\psi)^2 = \Delta(\psi)^2 - \Delta x(\psi)^2 , \tag{5.1.12}$$

$$\sigma(\psi)^2 = \int da\, P(a|\psi)\Delta x(\psi_a)^2 + \int da\, P(a|\psi)(a - \langle\psi_a|\hat{x}|\psi_a\rangle)^2 . \tag{5.1.13}$$

また，ε_{max} を $\varepsilon(\psi)$ の ψ 全体における最大値とすると，$\varepsilon_{max} = 0$ であるための必要充分条件は，$P(x|\psi) = |\psi(x)|^2$ が，任意の ψ に対して，成立することである．

この定理は両立可能性と不偏性の条件が近似的位置測定を特徴付ける適切な条件になっていることを示している．この条件を満たす測定については，測定の近似的性質について，精度 ε と分解能 σ を用いて，更に詳しい特徴付けが可能である．そこで以下では，操作測度 Ｉ が両立可能性の条件（5.1.4）と不偏性の条件（5.1.11）を満たすとき，近似的位置測定（approximate position measurement）の操作測度と呼ぶことにする．

さて次に，ＳＱＬの数学的定式化を与えよう．Ｉ を１自由度系の操作測度とする．自由質点 m が，操作測度 Ｉ で記述される２回の同一な測定の合間に，時間 τ にわたって，ユニタリな時間発展をすると仮定する．$\hat{U}_\tau$ をその時間発展のユニタリ作用素とし，自由質点は第１回の測定の直前に状態 ψ にあるとする．すると，その測定の直後（時刻 $t = 0$ ）には，質点は，確率 $P(a|\psi)da$ で，事後状態 ψ_a にある．この測定値 a に基づいて，観測者は時刻 $t = \tau$ に行われる第２回の測定の測定値に対する予測 h(a) を決定する．すると，この予測の不確定さの２乗は，

$$\Delta(\tau,\psi,a)^2 = \int dx(x - h(a))^2 \; P(x|\hat{U}_\tau\psi_a). \tag{5.1.14}$$

通常，h(a) の決定にあたって，次の平均値予測の方策が採用される：

$$h(a) = \langle\psi_a|\hat{x}(\tau)|\psi_a\rangle, \tag{5.1.15}$$

ここに，

$$\hat{x}(\tau) = \hat{U}_\tau^{+} \hat{x}(0) \hat{U}_\tau = \hat{x} + \hat{p}\tau/m. \qquad (5.1.16)$$

この反復測定の，事前状態 ψ および時間間隔 τ に対する，予測の不確定さ $\Delta(\tau, \psi)$ は，第1回の測定値すべてにわたる $\Delta(\tau, \psi, a)$ の2乗平均として定義される：

$$\Delta(\tau, \psi)^2 = \int da\ \Delta(\tau, \psi, a)^2\ P(a|\psi). \qquad (5.1.17)$$

このとき，ＳＱＬは，次の関係を主張する：任意の事前状態 ψ に対して，

$$\Delta(\tau, \psi)^2 \geq \hbar\tau/m. \qquad (5.1.18)$$

さて，操作測度 Ｉ が近似的位置測定の操作測度であれば，式 (5.1.13) から，

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, \psi, a)^2 &= \Delta(\hat{U}_\tau \psi_a)^2 \\ &= \varepsilon(\hat{U}_\tau \psi_a)^2 + \Delta x(\tau)(\psi_a)^2, \end{aligned} \qquad (5.1.19)$$

となり，したがって，

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, \psi)^2 &= \int da\ P(a|\psi)\left(\varepsilon(\hat{U}_\tau \psi_a)^2 + \Delta x(\tau)(\psi_a)^2\right) \\ &= [\varepsilon(\hat{U}_\tau \psi_a)^2] + [\Delta x(\tau)(\psi_a)^2], \end{aligned} \qquad (5.1.20)$$

である．ここで，ブラケットは $P(a|\psi)$ による平均を表す．

さて，３．２節の Caves の議論 ((3.2.3) 式参照) を洗練して，次のようなＳＱＬのための充分条件を得る．

定理５．Ｉ を精度 ε の近似的位置測定の操作測度とする．任意の事前状態 ψ に対して，

$$[\Delta x(\psi_a)^2] \leq [\varepsilon(\hat{U}_\tau \psi_a)^2] \qquad (5.1.21)$$

が成立すれば，この測定に対して，ＳＱＬが成り立つ：すなわち，任意の事前状態ψに対して，

$$\Delta(\tau, \psi)^2 \geq \hbar\tau/m, \qquad (5.1.22)$$

が成り立つ．

実際，不確定性関係 (3.2.4) を用いて次の評価が得られる．

$$\begin{aligned}\Delta(\tau,\psi)^2 &= [\varepsilon\ (U\hat{}_\tau\psi_a)^2\ ] + [\Delta x(\tau)(\psi_a)^2\ ] \\ &\geqq [\Delta x(0)(\psi_a)^2\ ] + [\Delta x(\tau)(\psi_a)^2\ ] \\ &\geqq [2\Delta x(0)(\psi_a)\Delta x(\tau)(\psi_a)] \\ &\geqq \hbar\tau/m. \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

上の定理から，測定の誤差に関して，精度の概念がＳＱＬの導出に本質的に関連していることがわかる．

もし次の簡単な関係

$$\sigma(\psi)^2 \leqq [\varepsilon(U\hat{}_\tau\psi_a)^2\ ]. \tag{5.1.24}$$

が精度と分解能の間に成立すれば，定理５の仮定（5.1.21）は式（5.1.13）から得られる．よって，このときは，Caves の議論のように条件（5.1.24）からＳＱＬが導かれる．このようにして，ＳＱＬに想到するわれわれの直観は次の言明に支えられていると言えるであろう：（１）どんな近似測定も雑音と状態遷移に関して両立可能性と不偏性の条件を満たしている．（２）測定の分解能は精度を越えない．しかしながら，最初の言明が正しいと認められても，実現可能なすべての測定が２番目の言明を満たすことは，全然，明らかではない．ともかく，ＳＱＬを打破する測定装置を設計するには，測定精度より分解能の方が大きい位置測定の相互作用を見いださなければならない．ところが，von Neumann が観測の理論を創設して以来，位置の測定のための相互作用は，von Neumann 自身によって構成された，たった一つしか知られていない．つぎの分節では，この von Neumann のモデルを分析して，残念ながらこのモデルではＳＱＬが成立していることを確認しよう．そして，その次の分節で，ＳＱＬを打破する，新しいモデルを構成する．

５．２．近似的位置測定の von Neumann によるモデル

[C85] で，Caves は近似的位置測定の von Neumann [N55] によるモデルが定理５の仮定を満たし，ＳＱＬが成立していることを示した．von Neumann のモデルの対象系と探査系の相互作用は単純な線型的結合であり，いくつかの量子非破壊測定のモデル [C80] でも利用されているので，Caves によるこの結果をわれわれの枠組で再現してみよう．

このモデルは第２の観測者の記述によって提示される．探査系は，座標 Q，運動量 P をもつ１自由度系であって，座標 x，運動量 p をもつ，対象系（自由質点）と同様である．対象系と探査系の結合は時刻 $t=-\tau^-$ から $t=0$ （ $0 < \tau^- << \tau$ ）の間行われ，相互作用 Hamiltonian $Kx\hat{}P\hat{}$ で表される．ここに， K は結合定数で，対象系と探査系の自由 Hamiltonian が無視できるほど強いと仮定する．ここで，単位系は $K\tau^-$

= 1 となるように選ぶ．すると，$\Psi_0(x,Q) = f(x,Q)$ とおけば，Schroedinger 方程式の解は，

$$\Psi_t(x,Q) = f(x,Q - Ktx), \tag{5.2.1}$$

である．結合が行われる直前の時刻 $t=-\tau^-$ において，自由質点の未知の波動関数を $\psi(x)$ とし，探査系は波動関数 $\Phi(Q)$ の状態に準備されているとする．簡単のため，$\langle\Phi|\hat{Q}|\Phi\rangle = \langle\Phi|\hat{P}|\Phi\rangle = 0$ と仮定する．全系の波動関数は，$\Psi_0(x,Q) = \psi(x)\Phi(Q)$ である．相互作用の終わり（$t=0$）には，全系の波動関数は，

$$\Psi(x,Q) = \hat{U}\Psi_0(x,Q) = \psi(x)\Phi(Q - x). \tag{5.2.2}$$

となる．

測定の統計を得るために次のことを思い出しておこう．この測定の結果（x の推定値）は，測定値と呼ばれる値 Q^- であって，これは，探査系の物理量 Q の検出によって得られる．（この検出は，全体としては巨視的な測定装置のうちで，検出器と呼ばれる，引き続く部分と時刻 $t=0$ において，探査系が結合されることによりなされる．）したがって，測定値 Q^- が得られる確率（すなわち，この測定の測定確率）は，Born の統計公式により，

$$P(Q^-) = \int dx\, |\Psi(x,Q^-)|^2 = \int dx\, |\psi(x)|^2\, |\Phi(Q^- - x)|^2 . \tag{5.2.3}$$

となる．自由質点の，$Q = Q^-$ の場合における，事後状態を表す波動関数 $\psi(x|Q^-)$（時刻 $t=0$ における）は，$\psi(x,Q)$ を評価することにより，（正規化の因子を除いて）次のように求められる：

$$\begin{aligned}\psi(x|Q^-) &= \Psi(x,Q^-)/P(Q^-)^{1/2} \\ &= \psi(x)\Phi(Q^- - x)/P(Q^-)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

事後波動関数 (5.2.4) は，もちろん，式 (4.2.10) から直接求めることもできる．この測定の操作測度 I を求めるために，もし，事前状態が混合 $\hat{\rho}$ ならば，事後状態 $\hat{\rho}_{Q^-}$ は次の関係を満たすことに注意しよう：

$$\begin{aligned}dI(Q^-)\hat{\rho} &= \hat{\rho}_{Q^-}P(Q^-|\hat{\rho})\, dQ^- \\ &= \Psi(Q^-1 - \hat{x})\hat{\rho}\Psi(Q^-1 - \hat{x})^+\, dQ^-.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

したがって，この測定の操作測度 I を得る：

$$I(\Delta)\rho\hat{} = \int_{\Delta} dI(Q^{-})\rho\hat{}$$
$$= \int_{\Delta} dQ^{-} \Psi(Q^{-}1 - x\hat{})\rho\hat{}\Psi(Q^{-}1 - x\hat{})^{+}. \quad (5.2.6)$$

これから，効果測度は次のようになる：

$$F\hat{}(\Delta) = \int_{\Delta} dF\hat{}(Q^{-}),$$
$$dF\hat{}(Q^{-}) = dQ^{-} |\Psi(Q^{-}1 - x\hat{})|^{2}$$
$$= dQ^{-} \int dx\, |\Psi(Q^{-} - x)|^{2} |x><x|. \quad (5.2.7)$$

式 (5.2.7) から明らかに，この測定は両立可能性の条件 (5.1.4) を満たし，その核関数は $G(Q^{-},x)$ は次のように書かれる．

$$G(Q^{-},x) = |\Psi(Q^{-} - x)|^{2}. \quad (5.2.8)$$

次の計算から，不偏性の条件 (5.1.11) が成立することがわかる：

$$\int dQ^{-}\, Q^{-}P(Q^{-}|\psi) = \int dQ^{-}\, dx\, Q^{-}|\psi(x)|^{2} |\Phi(Q^{-}-x)|^{2}$$
$$= \int dx\, x|\psi(x)|^{2}$$
$$= <\psi|x\hat{}|\psi>. \quad (5.2.9)$$

したがって，この測定は近似的位置測定のための条件を満たしている．この測定の精度 $\varepsilon(\psi)$ は次のようになる：

$$\varepsilon(\psi)^{2} = \int dx\, |\psi(x)|^{2} \int dQ^{-}\, (Q^{-}-x)^{2} |\Psi(Q^{-}-x)|^{2}$$
$$= \int dQ^{-},a^{2} |\Psi(Q^{-})|^{2}$$
$$= <\Psi|Q\hat{}^{2}|\Psi>. \quad (5.2.10)$$

定義と式 (5.2.3),(5.2.4) から，この測定の分解能，$\sigma(\psi)$ は次のようになる：

$$\sigma(\psi)^{2} = \int dQ^{-}\, P(Q^{-}|\psi) \int dx\, (Q^{-}-x)^{2} |\psi(x|Q^{-})|^{2}$$
$$= \int dQ^{-}dx(Q^{-}-x)^{2} |\Psi(Q^{-}-x)|^{2} |\psi(x)|^{2}$$
$$= <\Psi|Q\hat{}^{2}|\Psi>. \quad (5.2.11)$$

ΔQ を測定直前の探査系の物理量の不確定さとする，すなわち，$(\Delta Q)^{2} = <\Phi|Q\hat{}^{2}|\Phi> - <\Phi|Q\hat{}|\Phi>^{2}$ ．すると，von Neumann のモデルでは，ちょうど次のようになっていることがわかった：任意の ψ に対して，

$$\varepsilon = \varepsilon(\psi) = \Delta Q ,$$
$$\sigma = \sigma(\psi) = \Delta Q .$$

よって，次の計算より（式（5.1.13）参照），定理５の仮定が成立していることがわかる：

$$[\varepsilon(\hat{U}_\tau \psi_{Q^-})^2] = \Delta Q = \sigma(\psi)$$
$$= [\Delta x(\psi_{Q^-})^2] + [(Q^- - \langle \psi_{Q^-} | \hat{x} | \psi_{Q^-} \rangle)^2]$$
$$\geqq [\Delta x(\psi_{Q^-})^2].$$

以上から，von Neumann のモデルではＳＱＬが成立することが示された．

５．３．ＳＱＬを打ち破る測定の実現

さて，Yuen の提案［Y83］に戻ろう．彼の着想は，もし，測定がすべての測定値 a について，自由質点を収縮状態 ψ_a にするならば，次の関係が得られるということである．

$$\Delta x(\tau)(\psi_a) \ll (\hbar\tau/2m)^{1/2} \ll \Delta x(0)(\psi_a). \qquad (5.3.1)$$

したがって，もし，この測定が次のようなよい精度をもつならば，ＳＱＬは打ち破られる：

$$\varepsilon(\hat{U}_\tau \psi_a) \ll (\hbar\tau/2m)^{1/2}. \qquad (5.3.2)$$

実際，式（5.1.20）と式（5.3.1),(5.3.2）を合わせることにより，次の関係を得る：

$$\Delta(\tau,\psi)^2 = [\varepsilon(\hat{U}_{-\tau} \psi_a)^2] + [\Delta x(\tau)(\psi_a)]^2$$
$$\ll \hbar\tau/m \qquad (5.3.3)$$

では，以下において，このような測定の統計が Gordon-Louisell の測定によって，実現されることを示そう．

$|\mu\nu 0\omega\rangle$ を $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$ をみたす，一つの収縮状態とし，Ψ_a を $\langle x|\Psi_a\rangle = \langle x - a|\mu\nu 0\omega\rangle$ によって定義する．すると，$\{\Psi_a\}$ は，$\langle x\rangle = a$ および $\langle p\rangle = 0$ を満たす収縮状態 $|\mu\nu a\omega\rangle$ の族となり，これは，定理３の仮定を満たす．よって定理３から，以下のような Gordon-Louisell の測定$\{|\mu\nu a\omega\rangle\langle a|\}$の統計が実現可能である：

測定確率： $P(a|\psi) = |\langle a|\psi\rangle|^2$, (5.3.4)

状態遷移： $\psi \rightarrow \psi_a = |\mu\nu a\ \omega\rangle$. (5.3.5)

そこで，この測定の反復測定をするときの予測の不確定性 $\Delta(\tau)$ を調べてみよう．式 (4.4.12) と (5.3.4) から，この測定は両立可能性の条件 (5.1.4) と不偏性の条件 (5.1.11) を満たす．更に，これは位置の物理量の完全な精度をもつ測定である，すなわち，任意のψに対して，$G(a,x) = \delta(a - x)$ を満たす．式 (5.1.20)，(3.1.16)，(3.1.17) から，

$$\begin{aligned}\Delta(t,\psi)^2 &= \int da\ P(a|\psi)\,(\varepsilon(\hat{U}_t\ \psi_a)^2 + \Delta x(t)(\psi_a)^2)\ ,\\ &= \int da\ P(a|\psi)\ \Delta x(t)(\psi_a)^2\ ,\\ &= (1/4\xi)(\hbar\tau/m) + (2\hbar/m\omega)(|\mu+\nu|\omega/2)^2\,(t-\tau)^2\ .\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

ここに，

$$\tau = 2\xi/(\omega|\mu+\nu|^2) = \xi\hbar m/\Delta p(0)^2\ . \tag{5.3.7}$$

したがって，$t=\tau$ と充分大きい ξ に対して，

$$\Delta(\tau,\psi)^2 = (1/4\xi)(\hbar\tau/m) \ll \hbar\tau/m. \tag{5.3.8}$$

となる．

したがって，実現可能な測定である Gordon-Louisell の測定 $\{|\mu\nu a\ \omega\rangle\langle a|\}$ は，ＳＱＬを打ち破る測定であることが示された．以下，この分節の残りでは，この測定を実現する対象系と探査系の結合を表す相互作用 Hamiltonian を与えよう．

そのモデルの記述は，5.2 節で与えた von Neumann の測定のモデルと平行的である．自由質点（対象系）は，座標 Q と運動量 P をもつ１自由度の対象系と結合される．結合は時刻 $t = -\tau^-$ から $t=0$ ($0 < \tau^- \ll \tau$) の間で行われ，質点と探査系の自由 Hamiltonian が無視できるほど強いとする．われわれは，この結合に，次の相互作用 Hamiltonian を選ぶ：

$$H = (K\pi/3\sqrt{3})\{2(\hat{x}\hat{P} - \hat{Q}\hat{p}) + (\hat{x}\hat{p} - \hat{Q}\hat{P})\}, \tag{5.3.9}$$

ここに， K は結合定数で，$K\tau^-=1$ となるように選ばれている．このとき，$\Psi_0(x,Q) = f(x,Q)$ とおけば，Schroediner 方程式の解は，次のようになる：

$$\Psi_t(x,Q) = f\left((2/\sqrt{3})\{x\ \sin[(1 - Kt)\pi/3] + Q\ \sin[Kt\pi/3]\}\right),$$

$$(2/\sqrt{3})\{-x\ \sin[Kt\pi/3] + Q\ \sin[(1+Kt)\pi/3]\}\ ).\quad (5.3.10)$$

この結合が行われる直前の時刻 $t=-\tau^-$ において，自由質点の未知の波動関数を $\psi(x)$ とし，探査系は収縮状態 $\Phi(Q) = <Q|\mu\nu 0\omega>$ に準備されているとする．よって，全系の波動関数は，$\Psi_0(x,Q) = \psi(x)\Phi(Q)$ である．ここで，この状態での期待値は，$<\hat{Q}>_0 = <\hat{P}>_0 = 0$ である．相互作用終了の時刻 $t=0$ に，全系の波動関数は，

$$\Psi(x,Q) = \psi(Q)\Phi(Q-x). \quad (5.3.11)$$

となる．この時刻に，Q の値 Q^- が，測定器の引き続く段階にある探査系の物理量の検出器によって得られ，この値で x の値が推定される．したがって，この測定の測定値として値 Q^- を得る確率密度 $P(Q^-|\psi)$ が次式で与えられる：

$$P(Q^-|\psi) = \int dx\ |\Psi(x,Q^-)|^2 = |\psi(Q^-)|^2\ . \quad (5.3.12)$$

この測定の直後（$t=0$）における自由質点の波動関数 $\psi_{Q^-}(x) = \psi(x|Q^-)$ は，（正規化の因子を除いて，）次のようになる：

$$\begin{aligned}\psi(x|Q^-) &= [1/P(Q^-|\psi)^{1/2})]\Psi(x,Q^-)\\ &= [\psi(Q^-)/|\psi(Q^-)|]\Phi(Q^- - x)\\ &= C<x|\mu\nu Q^-\omega>. \end{aligned}\quad (5.3.13)$$

ここに，C ($|C|=1$) は，定数の位相因子である．

このようにして，この測定の統計が次のように得られた：

測定確率：　$P(Q^-|\psi) = |\psi(Q^-)|^2$,　(5.3.14)

状態遷移：　$\psi \to \psi_{Q^-} = |\mu\nu Q^-\omega>$.　(5.3.15)

これは，この測定が Gordon-Louisell の測定 $\{|\mu\nu Q^-\omega><Q^-|\}$ を実現していることを示している．

以上で，ＳＱＬを打ち破る測定の存在と，その測定を実現する相互作用の明示的な記述を得て，予告したすべてのことが示されたことになる．この解析から，ＳＱＬのように，自由質点を監視する際の精度を制限するような，不確定性原理から導かれる量子力学的限界が存在するという議論は，まったく理論的根拠をもたないことが明らかにされた．つまり，われわれの議論の明らかな論理的帰結は，ＳＱＬが存在するといういかなる証明も，量子力学の基本原理からは，不可能であるということである．このことは，この理論的根拠に基づいて，ＳＱＬを打ち破る実際的な装置を設計するという興味ある

問題を提出するであろう．この方向の研究は，まだ本格的には進められていないようであるが，Kerr cell と フィードバック・ループによって，従来の干渉計を改良してＳＱＬを打破できるとする興味ある研究が，Bondurant [B86] によって発表されている．従来の干渉計の動作が，von Neumann のモデルによって，簡潔に解析されたのと同様の意味で，Kerr cell とフィードバック・ループの働きが，われわれが示した Gordon-Louisell の測定を実現させる相互作用 Hamiltonian に現れる付加項とどのように対応しているかを明らかにすることは興味ある問題であろう．そのような対応関係の存在は，われわれの相互作用が，線型的結合のうちで，ＳＱＬを打ち破る効果をもつもののなかでもっとも典型的なものであるという，この報告では紹介できなかった数学的根拠から支持される．言い替えれば，測定の相互作用におけるＳＱＬを打ち破る効果は，単純な線型的結合のうちにすでに解析され得る効果であることが今や明かとなったからである．これらの問題に関する詳論は，また別の機会に紹介する予定である．

謝辞．この報告に関する研究に対して，関数解析学，量子物理学，電子工学などの分野の実に多くの研究者の方々から，有益な御批評，御意見をいただきました．とりわけ，梅垣寿春先生，柳瀬睦男先生，荒木不二洋先生，小嶋泉氏，熊倉功二氏，広田修氏からは，一貫した御指導，御助言，暖かいお励ましをいただきました．ここに，心よりお礼を申し上げる次第です．

参考文献

[W79] R. Weiss, in Sources of Gravitational Radiation, edited by L. Smarr (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979).

[B74] V. B. Braginsky and Yu. I. Vorontsov, Ups. Fiz. Nauk 114, 41 (1974) [Sov. Phys. Usp. 17, 644 (1975)].

[C80] C. M. Caves, K. S. Throne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, Rev. Mod. Phys. 52, 341 (1980).

[Y83] H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. 51, 719 (1983).

[W84] K. Wodkiewicz, Phys. Rev. Lett. 52, 787 (1984); H.P. Yuen, ibid. 52, 788 (1984).

[L84] R. Lynch, Phys. Rev. Lett. 52, 1729 (1984); H.P. Yuen, ibid. 52, 1730 (1984).

[L85] R. Lynch, Phys. Rev. Lett. 54, 1599 (1985).

[C85] C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. 54, 2465 (1985).

[N55] J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955). [量子力学の数学的基礎，

井上健，広重徹，恒藤敏彦訳，みすず書房，１９５７]

[F65] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics III, (Addison, Reading, MA, 1965)

[D76] E. B. Davies, Quantum Theory of Open Systems, (Academic, London, 1976).

[H82] A. S. Holevo, Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory (North-Holland, Amsterdom, 1982).

[B82] A. Barchielli, L. Lanz and G. M. Prosperi, Nuovo Cimento B 72, 79 (1982).

[B83] A. Barchielli, L. Lanz and G. M. Prosperi, Found. Phys. 13, 779 (1983).

[L83] G. Ludwig, Foundations of Quantum Mechanics I and II (Springer, Berlin, 1983).

[K83] K. Kraus, States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory (Springer, Berlin, 1983).

[O84] M. Ozawa, J. Math. Phys. 25, 79 (1984).

[O85a]M. Ozawa, Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ. 21, 279 (1985).

[O85b]M. Ozawa, J. Math. Phys. 26, 1948 (1985).

[O86] M. Ozawa, J. Math. Phys. 27, 759 (1986).

[O88] M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 60, 385 (1988).

[O88b]M. Ozawa, in Sqeezed and Nonclassical Light, edited by P. Tombesi and E.R. Pike, (Prenum, New York, 1988).

[N86] W. -T. Ni, Phys. Rev. A 33, 2225 (1986).

[A65] E. Arthurs and J.L. Kelly, Jr, Bell Syst. Tech. J. 44(4), 725 (1965).

[YU] H. P. Yuen, Northwestern University, Evanston, IL, (unpublished).

[G66] J. P. Gordon and W. H. Louisell in Physics of Quantum Electronics, edited by P. L. Kelly, B. Lax and P. E. Tannenwald (McGraw-Hill, New York, 1966).

[C86] C. M. Caves, Phys. Rev. D 33 1643 (1986).

[S86] B. L. Schumaker, Phys. Rep. 135, 317 (1986).

[B86] R. S. Bondurant, Phys. Rev. A 34, 3927 (1986).