

Boltzmann モデル と Volterra モデル について

京大理数学 山口昌哉

§ 0 はしがき

この研究集会で筆者は、上記の題目のもとに、主として H. E. Conner の文献 [1] について紹介した。この仕事は、quadratic population モデルについての R. D. Jenks の最近の仕事 [2], [3], これは下の様な常微分方程式系:

$$(1) \quad \frac{du_i}{dt} = \sum_{j,k} a_{jk}^i u_j u_k \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

についてのものであるが、(a_{jk}^i についての仮定は後に述べる), この仕事の結果を利用して、Boltzmann の discrete モデル:

$$(2) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = -v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B_{jk}^i u_j u_k$$

の初期値問題について、解の大局的存在をえうという趣旨の論文であつた。報告のついで、上記 Conner の論文に重大な

*

誤まりを発見し、この定理の適用の範囲は著しく狭いことに気がついた（三村昌泰氏の指摘による）、しかし其後に代りに、Jenkins の上記の仕事を方程式 (2) とむすびつけて存在定理を出るという方向は、幾分の Commer のアイデアを取入れた三村氏の仕事が可能となった。[4]、結局、方法は全く異なるが Commer の収らった結果は証明された。そこで筆者はもう一度 Jenkins の仕事と三村の方法を反省することにして、三村氏と協同で、次のような方程式系：

$$(3) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B_{j,k}^i u_j u_k, \quad (d_i \geq 0)$$

について、初期値問題の解の A priori bound を求める問題として、幾分の考察をした。問題は、「方程式 (3) の初期値問題について、 $B_{j,k}^i$ については Jenkins が定めた条件の範囲で、 d_i, v_i が任意の場合、初期値の有界性から解の有界性が保証されるためには、 $B_{j,k}^i$ にどれだけの条件をつけたらえれば十分なのか？」という問題であって、以下に Jenkins の結果と、我々の研究の結果とを報告する。尚本研究集会の田中 洋、高橋陽一郎氏が訳し筆者達に送られた、ソビエトの Godunov, Sultangazin の研究 [5] にもよれるが、上の問題を解いているものではない。

§ 1. Jenks の研究 と Examples.

Jenks [2] は, Quadratic differential system for interacting population model とし 2 次のような常微分方程式系を提案してゐる。

$$(4) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j,k}^{n,n} a_{j,k}^i x_j x_k \quad i \in \langle 1, n \rangle$$

ここで $\langle 1, n \rangle$ は $(1, 2, \dots, n)$ の略記号である。 $a_{j,k}^i$ は実定数 (n^3) であつて 2 次の条件 (1) (2) (3) をみたす。

$$(5) \quad \begin{cases} (1) & a_{j,k}^i = a_{k,j}^i & i, j, k \in \langle 1, n \rangle \\ (2) & \sum_{i=1}^n a_{j,k}^i = 0 & j, k \in \langle 1, n \rangle \\ (3) & a_{j,k}^i \geq 0 & j \neq i, k \neq i, j, k \in \langle 1, n \rangle \end{cases}$$

Jenks は (4), (5) について, n 種の個体群からなる群集について 2 のうちの 2 種が interact する場合のモデル方程式だといふ。ここで x_i は i 種の population fraction であると説明する。古典的な EXAMPLES を挙げておこう。

Ex. 1. Volterra の方程式:

Volterra の prey と predator の式で特に x_1 の種の繁殖率 (その種の x_1 が x_1 より x_1) $= 0$ とおけば [6]

を見よ), x_i は i 種の population fraction である.

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\sum_{j=1}^n C_{ij} x_j \right) x_i \quad i \in \langle 1, n \rangle$$

$$C_{ij} = -C_{ji} \quad i, j \in \langle 1, n \rangle$$

これが, Volterra の方程式の特殊型であるが, $2a_{ij}^i$
 $= 2a_{ji}^j = C_{ij}$ とおけば, 上の付定 1), 4), 11) をみたす.
 この場合 11) は等号でみたされていることに注意をむけてお
 こう. すなわち, 上の Volterra の型では, 「ある時刻に存在
 しなかった種の population が時刻の経過とともに新しく
 誕生する」とはならないわけである。」

Ex. 2. Boltzmann の discrete model. (Spatially homog)

等しい重さの, 等しい半径の球としての分子からなる一様
 なガスを考え, 個々の分子の Velocity は n 個しかないと考え
 る. つまり Velocity space E^3 を n 個の集合 B_i の合併
 とし, $x_i(t)$ は時刻 t で B_i に入る Velocity をもつ分子の
 population fraction とする. $\mu_{jk} > 0$ とし,
 $\mu_{jk} x_j x_k$ が j 種の分子と k 種の分子の衝突 (単位時間)
 の数と考える. 2 体衝突のみを考えると,

$\dot{x}_j = \mu_{jk} x_j x_k$ は Δt 時間には, j - k 衝突によつて j 分子

が i 分ちに変化する数とする。ここで $p_{j,k}^i$ は確率であつて

$$p_{j,k}^i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_{j,k}^i = 1$$

である。 Δt 時間における B_i の出入りを Δx_i とおいて計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} &= \sum_{j,k} (p_{j,k}^i \mu_{j,k} x_j x_k - p_{i,k}^j \mu_{i,k} x_i x_k) \\ &= \sum_{j,k} (p_{j,k}^i - \delta_{ij}) \mu_{j,k} x_j x_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mu_{j,k} \{ (p_{j,k}^i + p_{k,j}^i) - (\delta_{ij} + \delta_{ik}) \} x_j x_k \end{aligned}$$

よつて, $a_{j,k}^i = \frac{1}{2} \mu_{j,k} \{ (p_{j,k}^i + p_{k,j}^i) - (\delta_{ij} + \delta_{ik}) \}$ とおけば, 上の (1), (2), (4) を満足するのである。この場合形式的には上の Volterra の方程式もよくむあけてあるが (つまり j, k - 衝突から j, k 以外の新種 i が誕生しない場合), 一般にある時刻に存在しなかつた新しい種が生まれてくる場合も含んでいる。以下に述べる Jenks の結果のうち重要なものは EXAMPLE 1 を含みながら, ワクについて述べられる。

(従つて, そのようなものを Spatially homogenous な discrete Boltzmann equation であるう)

Q Jenks の結果 (I) Confinement of trajectory.

上に述べたように, いづれの場合も x_i はつねにこの意味づけ: population fraction ということから R^n にあける次の集合 P (probability simplex とよぶ) は重要である。

$$P : \begin{cases} x_i \geq 0 & i \in \langle 1, n \rangle \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

定理 1 (Jenks) 方程式系 (4) において, (5) の条件が満たされるならば P から出た解 $x(t)$ は常に P を出ない。

証明 (5) の条件 1), 2), 3) のうち, 特に 2) が満たされてなければ上のようなことはあるが, (4) は global な解をもたないことは次の三村の例でわかる。

例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u^2 + 3v^2 \\ \frac{dv}{dt} = 3u^2 - v^2 \end{cases}$$

1), 3) は満たしているが, 2) は満たしていない。

$$\frac{d}{dt}(u-v) = +4v^2 - 4u^2 = -4(v+u)(u-v)$$

であるから, $u(0) = v(0)$ とおくと, 局所- $\frac{1}{2}$ 性より $u(t) = v(t)$

$$\frac{du}{dt} = 2u^2, \quad \frac{dv}{dt} = 2v^2$$

これは非負の初期値に対して有限時間で爆発する有名な例である。

定理の証明はえず, (4) と (1) について加えて

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = 0, \quad x_i(0) \in P.$$

よって, $\sum_{i=1}^n x_i(0) = 1$ かつ $\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1$

次に $x(0) \in P$ から $x_i(t) \geq 0$ ($\forall i \in \langle 1, n \rangle$) が保証される必要十分条件は, $x_i(0) = \eta_i$ とかくと $\eta \in P$ である,

F_i は P の $x_i = 0$ の Face とすると, $\frac{dx_i}{dt} \geq 0$ となり,

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} a_{j,k}^i \eta_j \eta_k \geq 0 \quad (\eta \in F_i)$$

このためには (1) は十分条件であるから証明がおわる。

OJenks の結果 (II) P における critical pt の存在.

次に, (4) において右辺 $\sum_{j,k} a_{j,k}^i \eta_j \eta_k = 0$ ($\forall i \in \langle 1, n \rangle$) となるような点 η が P に存在したとき η は (4) の critical pt となる。これが実際 P に存在するを示す。

lemma. η は P の任意の点とすると, $\dot{x}_i(\eta) = \sum_{j,k} a_{j,k}^i \eta_j \eta_k$ なる記号を用いると, ある正数が存在して, $\forall \eta \in P$ について二次的不等式が成立する。

$$0 \leq \eta_i + \frac{1}{b} \dot{x}_i(\eta) \leq 1 \quad i \in \langle 1, n \rangle$$

証明. 次のように定数 m, l を定める.

$$m = \max_{j \in \langle 1, n \rangle} \sup_{\eta \in P} |\dot{x}_j(\eta)|,$$

$$l = \max_{i \in \langle 1, n \rangle} \left\{ 2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}^i| + |a_{ii}^i| \right\}$$

今 $\eta_i \leq \frac{1}{2}$ の場合は, (1) と $\dot{x}_i(\eta)$ の定義より

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(\eta) &\leq 2m(1-\eta_i), \quad \dot{x}_i(\eta) \geq 2 \sum_{j \neq i} a_{ij}^i \eta_j \eta_i + a_{ii}^i \eta_i^2 \\ &\geq -l \eta_i \end{aligned}$$

又 $\eta_i \geq \frac{1}{2}$ の場合は, $u = \max_{i \in \langle 1, n \rangle} \left\{ 2 \sum_{k \neq i} |a_{ik}^i| + \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} a_{jk}^i \right\}$

と (2) $\dot{x}_i(\eta) \geq -2m\eta_i, \quad \eta_j \leq 1-\eta_i \quad (j \neq i)$ より

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(\eta) &\leq 2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}^i| \eta_j \eta_i + \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} a_{jk}^i \eta_j \eta_k \\ &\leq u(1-\eta_i) \end{aligned}$$

よって, $b = \max \{ 2m, l, u \}$ とすると

$$-b\eta_i \leq \dot{x}_i(\eta) \leq b(1-\eta_i)$$

かつねに成り立ち. lemma は証明された.

定理2 (Jenks) (4) は (5) の条件のもとに P 上 1- ϵ と $\epsilon/2$ の critical point を持つ。

証明. 助変数 h を持つ, mapping:

$$\sigma(h, \gamma) = \gamma + h \dot{x}(\gamma) = \gamma + h \left(\sum_{j,k} a_{j,k}^i \gamma_j \gamma_k \right)$$

を考へる。上の lemma より $h = \frac{1}{\epsilon}$ とし、 $\sigma(\frac{1}{\epsilon}, \gamma)$ は P から P への mapping である。Brouwer の不動点定理から、 $\xi \in P$ が存在して、

$$\xi_i = \xi_i + \dot{x}_i(\xi) \quad \text{である。よって、}$$

$$\sum_{j,k} a_{j,k}^i \xi_j \xi_k = 0 \quad (\forall i \in \langle 1, n \rangle).$$

○ Jenks の結果(Ⅲ). Internal Critical point の存在。

次に上記の critical pt が P の内部 $\dot{P}$ にすべて存在するための条件をしらべよう。これはもしこの I.C.P. が安定であれば $t \rightarrow +\infty$ のとき、すべての種の population が 0 になるような終極状態をもつことであるから重要である。そして、

Volterra のような system では絶対にそうならないことが証明される。この結果を紹介するためには次の Strongly connected (irreducibility) の概念が必要である。

定義 I と J は $\langle 1, n \rangle$ の部分集合で $I \cup J = \langle 1, n \rangle$, $I \cap J = \emptyset$ となるように、 $\exists i \in I, \exists j, k \in J$ で $a_{j,k}^i \neq 0$ なるもの

のが存在するとき, $\{a_{jk}^i\}$ は strongly connected であるといふ。

定理3 (Jenks).

方程式 (4) と条件 (5) のもとに, ^{考え} すべての critical pt が $\dot{P}$ にあるための条件 (必要十分) は $\{a_{jk}^i\}$ は strongly connected である。

証明 (十分性) C.P. である ξ が ある F_i にあつてゐる。

$$I = \{i \in \langle 1, n \rangle, \mid \xi_i > 0\}$$

$$\text{とすると, } 0 = \dot{x}_i(\xi) = \sum_{j,k} a_{jk}^i \xi_j \xi_k \quad (j, k \in I).$$

$$\forall i \in \complement I, \quad (1) \text{ により } a_{jk}^i \geq 0, \quad a_{jk}^i = 0 \quad \forall j, k \in I.$$

よつて, $\complement I$ と I によつて, $\{a_{jk}^i\}$ が strongly connected であることになる。

(必要性) $\{a_{jk}^i\}$ が not strongly connected としよう。 $\exists I \subset \langle 1, n \rangle, \quad I \neq \langle 1, n \rangle$ とすれば,

$$\forall i \in \complement I, \quad \forall j, k \in I \quad a_{jk}^i = 0.$$

$$\sum_{i \in I} a_{jk}^i = 0 \quad (2) \text{ より.}$$

よつて, $\{a_{jk}^i\}$ において, j, k をあつて I に制限 (2 考えても可)

(2) (1) が成立する。 Th 2 によつて, P_I (P の I への制限) に C.P. が存在する。 これは P 上の critical point であつて

あり, しかも $\dot{x}_i = 0$ ($i \in CI$) であるから, P の Bound
any critical point である. 証明おわり.

例 特別な場合として

$$(6) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_j d_{ij} x_j^2 \quad i \in \langle 1, n \rangle$$

つまり $a_{jk}^i = \delta_{jk} d_{ij}$ となる特殊な場合である. 条件
 $\sum_{i=1}^n d_{ij} = 0$, $d_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$) をつければ (5) をみたす. 更に行列 $[d_{ij}]$ が irreducible の場合 つまり,
 I, J が $\langle 1, n \rangle$ の真部分集合で且つ $I \cup J = \langle 1, n \rangle$, $I \cap J = \emptyset$
のとき, 必ず $\exists i, j$ が存在して $d_{ij} > 0$ となる場合は
定理 3 の条件にある strongly connected であり, 定理に
より必ず $\dot{P}$ 内は I.C.P. をもつ. 定理 3 ではいくつも I.
C.P. をもつことを排除できないがこの特殊型については唯
一つの I.C.P. がある. これは Perron Frobenius の定理に
よる. 何故なら, 今 $d > 0$ を十分大にとって, 行列 $A = [d_{ij}]$
に対し $A + dI$ を考えると, irreducibility は不変であ
り且つ, 各 entry が非負の non negative irreducible
な行列ができる. Perron Frobenius の定理により, 最大の
絶対値の固有値 (Frobenius 根) は正で simple である.

これは、すべての component が正の固有ベクトル ξ をもつ、
固有値を λ とすると、

$$[A + dI] \xi = \lambda \xi$$

$u = (1, 1, \dots, 1)$ をベクトルを左からかけると、等(42)

により,
$$d \xi = \lambda \xi$$

となり $\xi > 0$ より $d = \lambda$ である。 $A \xi = 0$ となる。

$$\eta_i = \frac{\sqrt{\xi_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\xi_i}} \quad \text{と おく と,}$$

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \eta_j^2 = 0$$

明らかに、この η_i 以外に解はない。固有値が simple であるから。

注意 1. Th. 3 の仮定, strong connectivity がある場合でも

I, C, P が唯一つとは、限らないことは次の例がある。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 + x_2^2 & -8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 & -12x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 \\ \dot{x}_3 = & -4x_3^2 + 20x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 \end{cases}$$

この system は 2 つの I, C, P をもつ。1 つは degenerate saddle で、1 つは stable node である。

注意2. 上の定理で Jenks の求めたのは, あべ" の C. P. が I. C. P. であるための条件であって, さらに Strong connectivity であった. したがって (6) の更には $n=2$ の特殊な場合である.

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2^2 - u_1^2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_1^2 - u_2^2 \end{cases}$$

には適用できるが,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = -u_1 u_2 \end{cases}$$

のような Volterra system は排除されているのである.

これは I. C. P. をもたない.

○ Jenks の結果 (IV) Asymptotic stability of I. C. P.

以下では internal critical point の stability についての結果を述べよう. Stability については多くの定義があるが, ここでは2つだけ述べておこう, ([7] を見るといい).

定義 I. C. P. $\bar{x}$ が asymptotically stable であるとは,

$\delta > 0$ が存在して, $\eta_0 \in P$ について,

$$\|x(\eta_0, t_0) - \bar{x}\| < \delta \text{ ならば } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(\eta_0, t) = \bar{x} \text{ とな}$$

るときをいう。

定義. I, C, P が asymptotically stable in the large とは, P の有限個の点 η_0 をのぞいて, すべての

$\eta_0 \in P$ について $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(\eta_0, t) = \bar{x}$ が成立するときをいう。

以下, この節では $\bar{x}$ は (4) の 1 つの I, C, P とする。

これに対し 2 次の行列 $R_{\bar{x}}$ を考察する。 $R_{\bar{x}} = [r_{ij}]$

として,

$$(9) \quad r_{ij} = 2 \sum_{k=1}^n a_{jk}^i \bar{x}_k$$

あきらかに, $R_{\bar{x}} \cdot \bar{x} = 0$, 又 $R_{\bar{x}}$ の列の和は 0 である。この

行列は $x = \bar{x} + y$ とおいて (4) をおきなおしたとき,

y に関する 1 次の係数行列として下のように出てくる。

$$(10) \quad \frac{dy}{dt} = R_{\bar{x}} y + O(\|y\|) \quad \|y\| \rightarrow 0$$

しかし, y は $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ という関係をもつので (10) は 1 つの constrained system である。次の安定性定理は証明なしに述べておこう。

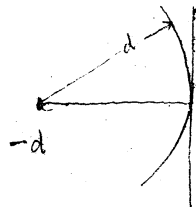
定理4 (Jenks) (4) の I. C. P Σ は行列 R_Σ が 0 stable のとき, asymptotically stable であり, R_Σ が unstable のとき unstable である。

註. C_i ($i \in \langle 1, n \rangle$) は固有値をもつ行列 M が 0 stable であるとは, いくつかの $C_i = 0$ であり, $j \neq i$ なる C_j について $\operatorname{Re}(C_j) < 0$ の場合をいふ, 一方 C_i のうちには一つでも $\operatorname{Re}(C_i) > 0$ なるものが存在するとき unstable とよむ。

系1. Σ を (4) の I. C. P とし, 行列 R_Σ が irreducible であり, off diagonal element ≥ 0 であるならば, Σ は asymptotically stable である。

証明 再び Perron Frobenius の定理である。

$d > 0$ を十分大とすると, $R_\Sigma + dI$ は irreducible かつ non negative, P. F Theorem を適用すると前記は $\lambda = -d$ となり, d は Frobenius 根となる。simple である。 R_Σ については 0 が simple でありその他の固有値を λ とすると, $\lambda + d$ は $R_\Sigma + dI$ の d 以外の固有値となり d は絶対値最大であったから, $|\lambda + d| \leq d$ となる。よって, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ となるほかはない。



系2. 特に方程式 (6) において, $[d_{ij}]$ が irreducible
 且 $d_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$) ならば "唯一つの I.C.P. ξ は Asymptotically stable" である。

何故なら $R_{\xi} = 2 d_{ij} \xi_j$ であるからである。系1による。
 更にこの場合 (6) に対しては次のような Liapunov
 function:

$$V(\eta) = \frac{1}{6} \sum_i (\eta_i^3 - \xi_i^3) / \xi_i^2$$

が用いられて, ξ は asymptotically stable in the large とする。(Jenks [2] を見よ)

§2. Quadratic interaction をもつ偏微分方程式系について,

簡単のため, 空間1次元で考える。ここで問題にあるのは次のような偏微分方程式系である。 $d_i \geq 0$ として,

$$(11) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B_{j,k}^i u_j u_k \quad i \in \langle 1, n \rangle$$

つまり, n 種の個体群 population が 2 種ごとの interaction
 をもって変化すると同時に空間的にも移動する場合である。
 このような現象は無数にある。例えば §1 で述べた Boltzmann

am モデルにしても, spatially inhomogeneous が自然
であって, $\mathbf{v}$ という velocity の分母は p_i という speed
で移動している筈であってその場合には,

$$(12) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B_{j,k}^i u_j u_k \quad i \in \langle 1, n \rangle$$

という型になり, これは Carleman が提唱した discrete
Boltzmann モデルである。又 H.E. Comer が上記 Jenks
の研究を用いて, (12) の初期値問題の大局解を出そうとし
たわけである。一方, 1階微分の次のような場合には,
いくつかの例について三村が, 又或る程度一般の場合にも,
山口, 三村, 梶原の共同の研究 [8] [9] によつて, A priori
bound を発見する = と, したがつて大局的な解の存在が示
されている。そこで, Jenks に似た $B_{j,k}^i$ の仮定に更に十
分条件をつけ加えることによつて, (11) の方程式の初期値
問題をしらべようというのがこの報告の後半になる。

§2. 偏微分方程式系

ここでは, 次の方程式系を考える。

$$(13) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \phi_i \frac{\partial u_i}{\partial x^2} + p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} a_{j,k}^i u_j u_k$$

a_{jk}^i についての仮定は、次のイ、ロ、ハとする

$$(イ) \quad a_{jk}^i = a_{kj}^i$$

$$(ロ) \quad \sum_i a_{jk}^i \leq 0$$

$$(ハ) \quad a_{jk}^i \geq 0 \quad (j \neq i, k \neq i)$$

(13) の初期値問題も考慮にあたって、最初次の $u = u$ を仮定する。 u_i の初期値を $g_i(x)$ とし、

$$(14) \quad 0 \leq g_i(x) \leq 1$$

としよう。そして (14) という初期値に於て (13) の解を $u_i(x, t)$ とすれば、 $0 \leq u_i(x, t) \leq 1$ が $t > 0$ について満たされる a_{jk}^i の条件を求める。

三つの方法で (13) を差分にする。ただし、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は前進差分商、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ は中心差分商、 $\frac{\partial}{\partial x}$ は次の差分商 D_x で置きかえ、更に人工的な項 $S^i(u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p})$ をつけ加える。実行すると、 (k : 時間間隔、 h : 空間間隔)

$$\frac{u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p}}{k} = d_i \frac{u_i^{n,p+1} - 2u_i^{n,p} + u_i^{n,p-1}}{h^2} + p D_x u_i^{n,p} + S^i(u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p})$$

$$+ \sum a_{j,k}^i u_j^{n,p} u_k^{n,p} - S^i (u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p})$$

ここで D_x は 次のものがある。

$$D_x u_i^{n,p} = \begin{cases} \frac{u_i^{n,p+1} - u_i^{n,p-1}}{2h} & (d_i > 0) \\ \operatorname{sgn} p_i \frac{u_i^{n,p+\frac{p_i}{|p_i|}} - u_i^{n,p}}{h} & (d_i = 0) \end{cases}$$

k を両辺にかかると,

$$\begin{aligned} u_i^{n+1,p} &= u_i^{n,p} + d_i \frac{k}{h^2} (u_i^{n,p+1} - 2u_i^{n,p} + u_i^{n,p-1}) \\ &\quad + k p_i D_x u_i^{n,p} + k \sum a_{j,k}^i u_j^{n,p} u_k^{n,p} \\ &\quad - k S^i (u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p}) \end{aligned}$$

ここで $d_i \neq 0$ (~~かつ~~) のときは, D_x の定義より,

$$\begin{aligned} u_i^{n+1,p} &= \frac{1}{1+kS^i} \left[\left(\frac{k}{h^2} d_i + \frac{k p_i}{2h} \right) u_i^{n,p+1} + \left(1 - 2 \frac{k d_i}{h^2} \right) u_i^{n,p} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k}{h^2} d_i - \frac{k p_i}{2h} \right) u_i^{n,p-1} \right] + k \sum_{j,k} a_{j,k}^i u_j^{n,p} u_k^{n,p} + k S^i u_i^{n,p} \end{aligned}$$

と表わす。更に $d_i = 0$ のときには,

$$u_i^{n+1,p} = \frac{1}{1+kS^i} \left[\left\{ \left(1 - \operatorname{sgn} p_i \frac{k}{h} p_i\right) u_i^{n,p} + \frac{k}{h} \operatorname{sgn} p_i \cdot p_i u_i^{n,p + \frac{p_i}{|k|}} \right\} \right. \\ \left. + k \sum_{j,k} a_{j,k}^i u_j^{n,p} u_k^{n,p} + k S^i u_i^{n,p} \right]$$

下線と和した部分の評価のために次の仮定を考へる。

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{すなわち } 0 \leq \eta_i \leq 1 \text{ なる } \eta \text{ に対して,} \\ \sum_{j,k} a_{j,k}^i \eta_j \eta_k \leq S^i (1 - \eta_i) \end{array} \right.$$

がなりたつような $S^i \geq 0$ が存在する。

今 $d_i > 0$ により、 $\frac{k}{h^2} d_i \leq \frac{1}{2}$ 、 $d_i = 0$ のとき $\frac{k}{h} p_i \leq 1$ とし、且つ

もしこの仮定がみたされるならば、 S^i を大きくとって、

$$\forall p \quad 0 \leq u_i^{n,p} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_i^{n+1,p} \leq 1$$

が示されるであらう。よって、(*) が満足されるためには

$a_{j,k}^i$ はどのようなものであればよいのか? (なければならぬのか?) を求めてみよう。たとえば次のものは十分条件である。

$$(*) (*) \quad \sum_{j,k} a_{j,k}^i \eta_j \eta_k \leq \sum_{j \neq i} p_{i,j} (\eta_j - \eta_i)$$

とみたす $p_{i,j} \geq 0$ が存在する。但し、 $p_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{j,k}^i \eta_k$,

もし, $(**)$ が成り立たないならば, $\delta^i = (n-1) \max_j p_{ij}$ とおけば $(*)$ が成り立たれる. $\tilde{z} = z^{**}$ に対する $\uparrow$ 条件を求めると,

$$(15) \quad \sum_{j \in J_i} (2a_{ji}^i + \sum_{k \neq i} a_{kj}^i) \leq -a_{in}^i$$

$T: T \subset J_i$ は $2a_{ji}^i + \sum_{k \neq i} a_{kj}^i > 0$ となる j の集合である. $J_i \subset \{1, n\}$.

まとめると,

命題 (14) の仮定のもとに, (13) の解を $u_i(t, x)$ とすれば, a_{jk}^i について (15) が成り立たれるならば, p_i, d_i の大きさに制約がかけられ, かつ $0 \leq u_i(t, x) \leq 1$ が保たれる.

より一般的な初期値をあたえるために, 方程式に未知変数変換をおこなう.

$$(16) \quad \xi_i v_i = u_i \quad \xi_i > 0 \text{ (定数)}$$

すると, v_i は次の方程式 (17) を満たす.

$$(17) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = d_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + p_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \sum_{j, k} \frac{a_{jk}^i}{\xi_i} \xi_j \xi_k v_j v_k$$

$$\tilde{a}_{jk}^i = a_{jk}^i \frac{\xi_j \xi_k}{\xi_i}$$

よって、(17) は (13) と同じ形である。よって $\tilde{a}_{jk}^i$ に条件 (15) をつければ、(13) については、 $0 \leq g_i(x) \leq \xi_i$ から $0 \leq u_i(x, t) \leq \xi_i$ がええことになる。更に (15) を $\tilde{a}_{jk}^i$ において、 a_{jk}^i の条件 (18) になる。

$$(18) \quad \sum_{j \in J_i} (2a_{ji}^i \xi_j \xi_i + \sum_{k \neq i} a_{kj}^i \xi_j \xi_k) \leq -a_{ii}^i \xi_i^2$$

この条件は ξ_i について正の齊次である。結局、まとめると、
定理 (18) をみたす、 ξ ($\xi_i > 0 \quad \forall i$) が存在すれば、
 有界な初期値 $0 \leq g_i(x) \leq M_i$ の解について、 M_i' ($i=1, 2, \dots, n$) が存在して、
 $0 \leq u_i(x, t) \leq M_i'$ が保証される。

注意1. M_i に対して、適当な $p > 0$ をとり $p\xi_i \geq M_i$ とできる、 $p\xi_i = M_i'$ とおいて上の推論をおこなう。

注意2. この定理には、 p_i, α_i について条件が課されていないといえることに注意しておく。

系1 $\sum_{j,k} a_{jk}^i \xi_j \xi_k = 0$ となる ξ ($\xi_i > 0 \quad \forall i$) が存在し、行列 L_ξ :

$$(19) \quad L_{\xi} = \left[2a_{jj}^i \xi_i + \sum_{k \neq i} a_{jk}^i \xi_k \right] \xi_j$$

• すべての off diagonal element が 非負であるならば, 上の定理とあわせて結論がなりたつ。

たとえば, $\{a_{jk}^i\}$ が §1 の Jensen の意味で strongly connected 且つ (1), (2), (1') をみたし 更に L_{ξ} の off diagonal ≥ 0 であるならばよい。更に 特別にすれば,

系 2 行列 $[d_{ij}]$ irreducible 且つ $\sum_{i=1}^n d_{ij} = 0$

$d_{ij} \geq 0 \ (i \neq j)$ とし, $a_{jk}^i = \delta_{jk} d_{ij}$ とおけば

$L_{\xi} = [d_{ij} \xi_j^2]$ であり, 上の結論が次の方程式系に成立する。

$$\begin{aligned} (20) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} &= p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{k \neq i} a_{ik}^i u_k^2 \\ &= p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j \neq i} d_{ij} u_j^2 - d_{ii} u_i^2 \end{aligned}$$

$n=2$ の場合は, Carleman^[10] が提唱した, エネルギー法

3:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2^2 - u_1^2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1^2 - u_2^2 \end{cases}$$

は上の (20) に含まれてゐる。 ([10] [11] を参照)

§ 3. Volterra type の方程式系についての注意

§ 1 では常微分方程式系：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j,k} a_{ijk} u_j u_k$$

の初期値問題について、Confinement が成立することを示した。この例として、

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_1 u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = -u_1 u_2 \end{cases}$$

も含まれてゐる。次のような偏微分方程式についてはどうなるだろうか。

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} u_1 u_2 + a_{22} u_2^2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = +\frac{\partial u_2}{\partial x} - a_{12} u_1 u_2 - a_{22} u_2^2 \end{cases}$$

$g_1(x), g_2(x) \in u_1, u_2$ の初期値とすれば、

「 g_2 が $L_1(-\infty, +\infty)$ 且つ有界、 g_1 は有界な関数または非負の連続関数のとき、 $u_1(t, x), u_2(t, x)$ は有界に収束する」ことが示し得る。

証明: 補助的に

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad w(x, 0) = g_2(x)$$

を考へる。比較定理より

$$0 \leq u_2(x, t) \leq w(x, t) = g_2(x+t)$$

一方 u_1 に関する方程式は

$$u_1(x, t) = e^{a_{12} \int_0^t u_2(x-t+\tau, \tau) d\tau} \times \left\{ a_{22} \int_0^t u_2^2(x-t+\tau, \tau) e^{-a_{22} \int_0^\tau u_2(x-t+\xi, \xi) d\xi} d\tau + g_1(x-t) \right\}$$

この中で u_2 は g_2 に関する不等式より、次式が成り立つ

$$\int_0^t g_2(x-t+\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g_2(s) ds \leq \|g_2\|_1$$

又、一方

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial x} = -a_{22} z^2 \quad z(x, 0) = g_2$$

$$x \text{ 固定, } u_2(x, t) \leq z(x, t)$$

特性値による種分を考へると,

$$Z(x, t) \leq \frac{1}{a_{22}t + \frac{1}{G_2}}$$

$$G_2 = \max_{-\infty < x < +\infty} g_2.$$

よつて,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 d\tau < +\infty$$

よつて, 上の $u_1(x, t)$ の式を上から押さへると,

$$0 \leq u_1(x, t) \leq e^{a_{12} \|g_2\|_1} \{ a_{22} G_2 + G_1 \}$$

$$0 \leq u_2(x, t) \leq G_2$$

と"う, 評価が"えられる。

これから"、 $g_2 \in L_1$ と"う条件が"ない場合はと"うなるか。次の簡単な系に"つ"て見よう。

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_1 u_2 \end{cases}$$

" g_1, g_2 はと"てに有界, 且つ, g_1 が bounded away from zero ならば $0 < \delta < g_1(x)$ ならば", $u_1(x, t)$ $u_2(x, t)$ はと"てに有界である。

証明. (22) を用いて,

$$u_1(x, t) = g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t u_2(x-t+\tau, \tau) d\tau \right\}$$

$$u_2(x, t) = g_2(x+t) \exp \left\{ - \int_0^t u_1(x+t-\tau, \tau) d\tau \right\}$$

$$w \in \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(x_0) = g_1(x)$$

$$u_1(x, t) \geq g_1(x-t) \geq \delta > 0$$

$$\begin{aligned} (*) \quad u_1(x, t) &\leq g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t g_2(x-t+\tau) e^{-\int_0^\tau \delta d\sigma} d\tau \right\} \\ &\leq g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t g_2(x-t+\tau) e^{-\delta \tau} d\tau \right\} \leq +\infty \\ &\leq G_1 \exp \left\{ G_2 \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \right\} \end{aligned}$$

一方, 同様にして,

$$0 \leq g_1(x) \leq G_1, \quad 0 \leq g_2(x) \leq G_2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

(22) の解 $u_1(x, t), u_2(x, t)$ は $t \rightarrow +\infty$ のとき非有界となりうる。」

例 1 $g_2(x) \equiv 1, \quad g_1(x) \geq 0, \quad g_1(x) \leq M.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(s) e^{-\frac{s}{2}} ds < +\infty$$

且, $\exists x_n \rightarrow -\infty, \quad g_1(x_n) > \exists \delta > 0$

$$u_1(x, t) = g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t u_2(x-t+\tau, \tau) d\tau \right\}$$

$w_1(x, t)$ とし, 次の初期値問題の解をとる:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1, \quad w_1(x, 0) = g_1(x)$$

$0 \leq u_2(x, t) \leq 1$ であるから, 比較定理より

$$0 \leq u_1(x, t) \leq w_1(x, t) \quad (t \geq 0)$$

である。

$$v_2(x, t) = g_2(x+t) \exp \left\{ - \int_0^t w_1(x+t-\tau, \tau) d\tau \right\}$$

とすれば $v_2(x, t) \leq u_2(x, t)$

よって, $w_2(x, t) = g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t v_2(x-t+\tau, \tau) d\tau \right\}$

とすれば,

$$u_2(x, t) \leq u_1(x, t)$$

$$t = 3/2, \quad v_2^-(x, t) = g_1(x-t)e^t \quad t \text{ and } x \gg 1$$

$$w_2(x, t) = g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t v_2(x-t+\tau, \tau) d\tau \right\}$$

$$= g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t g_2(x-t+2\tau) e^{-\int_0^\tau g_1(x-t+2\tau-2\sigma) e^\sigma d\sigma} d\tau \right\}$$

$$\cong g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x-t+2\tau-2\sigma) e^\sigma d\sigma} d\tau \right\}$$

$$\cong g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t e^{-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{s}{2}} ds} \cdot e^{\frac{x-t+2\tau}{2}} d\tau \right\}$$

$$\cong g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t e^{\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(x+t)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{s}{2}} ds} d\tau \right\}$$

$$\cong g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t e^{-\frac{1}{2} e^{\frac{x+t}{2}} \cdot \kappa} d\tau \right\}$$

$$\cong g_1(x-t) \exp \left\{ e^{-\frac{1}{2} e^{\frac{c}{2}} \cdot \kappa} \cdot t \right\}$$

$$\cong g_1(c-2t) \exp \left\{ e^{-\frac{1}{2} e^{\frac{c}{2}} \cdot \kappa} \cdot t \right\} \quad \begin{aligned} x+t &= c \\ \kappa &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{s}{2}} ds \end{aligned}$$

以上のことを用いて、次の方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = p_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_1 u_2 \end{cases}$$

$p_1 \neq p_2$ であるならば、超音速が伝わる。

例 2. 同い (22) の方程式系について、次の初期値を考へよ

$$\begin{aligned} g_1(x) &\equiv 1 & x \leq 0 \\ &\equiv 0 & x > 0 \\ g_2(x) &\equiv 0 & x \leq 0 \\ &\equiv 1 & x > 0 \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = g_1(x-t) \exp \left\{ \int_0^t u_2(x-t+\tau, \tau) d\tau \right\} \quad (x \leq t)$$

$$u_2(x, t) = g_2(x+t) \exp \left\{ - \int_0^t u_1(x+t-\tau, \tau) d\tau \right\} \quad (x > -t)$$

$$u_1(x, t) \geq \exp \left\{ \int_0^t e^{-\int_0^\tau g_1(x-t+2\tau-2\sigma) e^\sigma d\sigma} d\tau \right\}$$

$$u_1(t, t) \geq \exp \left\{ \int_0^t e^{-\int_0^\tau g_1(2\tau-2\sigma) e^\sigma d\sigma} d\tau \right\}$$

$$u_1(t, t) \equiv \exp \int_0^t e^0 d\tau = e^t$$

となる。 unbounded τ がある。

したがって、常微分方程式系の場合と、大要事情が τ となることは τ がわかる。

参考文献

- [1] H. E. Conner : Some general properties of a class of Semi-linear hyperbolic systems analogous to the Differential-Integral Equations of gas dynamics.

Jour. of differential eq.
10, p188-203 (1971)

- [2] R. D. Jenks, : Quadratic differential systems for interactive population models.

Jour. of differential eq.
5, (1969)

- [3] R. D. Jenks : Irreducible Tensors and Associated Homogeneous Nonnegative Transformations.

Jour. of differential eq. 4. p 566-572
(1968)

[4] 三村昌泰 現象の数学セミナーで発表

[5] S. K. Godunov, U. M. Sultangazin.

On the discrete models of kinetic equation
of Boltzmann. Y.M.H. 26, 3 (159) (1971).

(田中 洋, 高橋陽一郎 英訳)

[6] 山口昌哉 '非線型現象の数学', 朝倉書店 1972.

[7] L. Cesari: Asymptotic behavior and stability
problems in ordinary differential equations

Acad. Press, Inc. New York 1963.

[8] M. Mimura, Y. Kametaka, M. Yamaguti.

On a certain difference scheme for some
semilinear diffusion system.

Proc. of Japan Acad. 47. 4
(1971).

[9] 慶高, (三村, 山口)

非線型拡散系について

Computation & Analysis Seminar JAPAN Vol. 2-3.
1970.

[10] T. Carleman, "Problèmes mathématiques de la théorie cinétique des gaz"

Almqvist and Wiksell Upsala 1957.

[11] I. I. Kolodner, "On the Carleman's model for the Boltzmann Equation and its generalizations" Ann. Mat. Pura. Appl. 63 (1963), 11

* 追記 E. P. Comer の論文 [1] は, $\frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j,k} B_{j,k}^i u_j$

u_k の型の方程式系を考えている。彼は $B_{j,k}^i$ に次の条件

件 a) $B_{j,k}^i = B_{k,j}^i$, b) $B_{j,k}^i \geq 0 \quad \forall j, k \neq i, B_{j,k}^i \leq 0 \quad \forall j, \text{ or } k = i$

c) $\sum_i B_{j,k}^i = 0$ (b) の後半を $\leq$ の $\geq$ に変えれば (c) は $\sum_i B_{j,k}^i = 0$ となる))

を課して, mapping $B(u) = \sum_{j,k} B_{j,k}^i u_j u_k$ が $C(\bar{R}, R^n)$

から $C(\bar{R}, R^n)$ への mapping とし "kinetic" とある。と

" $u = v \in B(u)$ が (a), (b), (c) を満たす" と定義し, 次の

Lemma 1 (p198) を述べている。

Lemma 1. Suppose $B(u)$ is a kinetic map on $C(\bar{R}, R^n)$

Then, given any bounded set E , there exist a

positive (diagonal) operator D on $C(\bar{R}, R^n)$

for which $(B+D)(u)$ is monotone on E .

ここで operator A が monotone とは, 2つの non negative vector u, v について,

$$u \leq v \quad \Rightarrow \quad B(u) \leq B(v)$$

がなりたつことであり, また $u \geq 0$ とは $u_i \geq 0$ のこと

で $u_i \geq 0$ を意味する。あるいは (a) (b) (c) をみたす B_j の v の lemma をみたさないものがある。

一方, わたしの条件 (20) は次の system (uniform scattering see [1]) を cover している。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2^2 - u_1 u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = u_1 u_2 - u_2^2 \end{cases}$$