

BRS変換, B場形式そして不定計量

中大理工 西島和彦 (Kazuhiko Nishijima)

中西さんが還暦を迎えられることになりましたが、今まで中西さんのお仕事に触発されることが多くありました。ここでは特に中西さんのお仕事と関連の深かった問題について述べることに致します。

§ 1. BRS変換

BRS変換については中西・九後・小山嶋氏による古典的な仕事があるが、ここでは記号の紹介だけしておく。^{1), 2)} QCDに対する Lagrangian を次の 3 項の和とする。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} - \bar{\Psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\Psi, \quad (1.1a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = \partial_\mu B \cdot A_\mu + \frac{\alpha}{2} B \cdot B, \text{ or } \mathcal{L}'_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (1.1b)$$

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = i \partial_\mu \bar{c} \cdot D_\mu c. \quad (1.1c)$$

BRS変換は、無限小ゲージ関数を c とするか $\bar{c}$ とするかにより 2 種類のものが現われるが、前者を δ , 後者を $\bar{\delta}$ で表わすことにする。1組は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= D_\mu C, \quad \delta \psi = ig(C \cdot T)\psi, \\ \delta B &= 0, \quad \delta \bar{C} = iB, \quad \delta C = -\frac{1}{2}g(C \times C).\end{aligned}\tag{1.2}$$

そしてもう1組は

$$\begin{aligned}\bar{\delta} A_\mu &= D_\mu \bar{C}, \quad \bar{\delta} \psi = ig(\bar{C} \cdot T)\psi, \\ \bar{\delta} \bar{B} &= 0, \quad \bar{\delta} C = i\bar{B}, \quad \bar{\delta} \bar{C} = -\frac{1}{2}g(\bar{C} \times \bar{C}).\end{aligned}\tag{1.3}$$

ただし $\bar{B}$ は, $B + \bar{B} - ig(C \times \bar{C}) = 0$ により定義される。これ等の変換の生成演算子が BRS charge の Q_B と $\bar{Q}_B$ とであり, また ghost number Q_c も導入される。これ等は何れも hermiticity

$$Q_B^\dagger = Q_B, \quad \bar{Q}_B^\dagger = Q_B, \quad Q_c^\dagger = Q_c\tag{1.4}$$

を満たし, また次の関係を満たす。

$$\delta^2 = \bar{\delta}^2 = \delta\bar{\delta} + \bar{\delta}\delta = 0, \quad (\text{nilpotency})\tag{1.5}$$

$$Q_B^2 = \bar{Q}_B^2 = Q_B \bar{Q}_B + \bar{Q}_B Q_B = 0,\tag{1.6}$$

$$i[Q_c, Q_B] = Q_B, \quad i[Q_c, \bar{Q}_B] = -\bar{Q}_B.\tag{1.7}$$

後に(1.6)と(1.7)のそれぞれのカ一式を組合わせた BRS 代数の表現について考察する。

§2. B場形式

補助場 B の重要性については中西さんが繰返し述べておられるのでここではゲージ変換の生成演算子としての側面に限定して考察する。³⁾ QED に於ける Maxwell 方程式は

$$\partial_\lambda F_{\lambda\mu} = -j_\mu - \partial_\mu B\tag{2.1}$$

と書けるが, 特にその時間成分は次のようになる。

$$\operatorname{div} \vec{E} + \dot{B} = j_0. \quad (2.2)$$

ψ との交換子を考えると, $\vec{E}$ は equal-time で可換であるから $\dot{B}$ は j_0 と同様に大域的ゲージ変換の生成演算子となる。この $\dot{B}$ を一般化して, $\square \Lambda(x) = 0$ を満たすゲージ変換の生成演算子は, 中西さんにより次式で与えられている。

$$Q[\Lambda] = - \int d^3x (\Lambda(x) \dot{B}(x) - \dot{\Lambda}(x) B(x)). \quad (2.3)$$

そこで QED における B 場と同様な役割を果たすものを QCD で見付けるためにはどうしたら良いか? それには QED で

$$\delta \bar{\delta} A_\mu = i \partial_\mu B \quad (2.4)$$

が成立つことに注目すると, (2.1) は次のように書ける。

$$\partial_\lambda F_{\lambda\mu} = -j_\mu + i \delta \bar{\delta} A_\mu. \quad (2.5)$$

この式は多成分の式と見做せば QCD でも成立つし, かつ

$$\partial_\mu (\delta \bar{\delta} A_\mu) = 0. \quad (2.6)$$

この表式がゲージ変換の生成演算子であることから, QED では次の Ward-高橋恒等式が成立つ。

$$\partial_\mu \langle \delta \bar{\delta} A_\mu(x), \psi(y), \bar{\psi}(z) \rangle = ie (\delta^4(x-y) - \delta^4(x-z)) S_F(y-z). \quad (2.7)$$

これに対応する式は QCD で "同じ仕組み" の議論に應用された。

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \langle \delta \bar{\delta} A_\lambda^a(x), \psi^a(y), \bar{\psi}^b(z) \rangle \\ &= ig T_{\alpha\beta}^a (\delta^4(x-y) - \delta^4(x-z)) S_F(y-z), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \langle \delta \bar{\delta} A_\lambda^a(x), A_\mu^b(y), A_\nu^c(z) \rangle \\ &= g f_{abc} (\delta^4(x-y) - \delta^4(x-z)) D_{F\mu\nu}(y-z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

§3. 不定計量

§1の最後に述べられたBRS代数の表現を求めるためには不定計量が必要となる。詳しくは中西さんの総合報告⁴⁾を見ていただくことにして、ここでは最少限必要な事項について述べておく。先づ線形ベクトル空間 $\mathcal{V}$ を考えて、2つのベクトルの内積 $\langle k|l\rangle$ を導入する。 $\mathcal{V}$ は縮退していないとしてこの中に基底の完全系 $\{|e_j\rangle\}$ を導入すると、任意のベクトル $|x\rangle$ が一意的に次のように展開されるとする。

$$|x\rangle = \sum_j x_j |e_j\rangle. \quad (3.1)$$

線形演算子 T のこの完全系に関する表現 t の定義は

$$T|e_j\rangle = \sum_k |e_k\rangle t_{kj}. \quad (3.2)$$

また計量行列 η は

$$\eta_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle, \quad \eta^\dagger = \eta. \quad (3.3)$$

ここで基底の変換

$$|e'_j\rangle = \sum_k |e_k\rangle u_{kj}, \quad (\det u \neq 0) \quad (3.4)$$

を導入すると、 t と η とは次のように変換される。

$$t' = u^{-1} t u, \quad \eta' = u^\dagger \eta u. \quad (3.5)$$

さて行列要素 $\langle e_i | T | e_j \rangle = (\eta t)_{ij}$ に対し、エルミートの T では

$$\eta t = (\eta t)^\dagger = t^\dagger \eta. \quad (3.6)$$

行列 t とベクトル $|x\rangle$ との積は次式で定義する。

$$t|x\rangle = \sum_{i,j} t_{ij} x_j |e_i\rangle. \quad (3.7)$$

特に τ が T の表現ならば $T|x\rangle = \tau|x\rangle$ が成立する。後の便利のために列ベクトル $|x\rangle$ と行ベクトル $\langle x|$ とを導入すると $\langle x|y\rangle = (x, \eta y)$ が成立することに注意しておく。

§4. BRS代数の表現

Q_B と iQ_c との表現行列を q, n と書くと, エルミート性は

$$\eta q = q^\dagger \eta, \quad \eta n = -n^\dagger \eta. \quad (4.1)$$

そして BRS 代数に対応する関係は

$$[n, q] = q, \quad q^2 = 0, \quad q^{\dagger 2} = 0. \quad (4.2)$$

上の (4.1) と (4.2) を満たす q, n, η の行列表現を求めよう。そのためには基底の変換 (3.4) を利用して η を標準形に選ぶ。

$$\eta^2 = 1. \quad (4.3)$$

以下ではゲージ理論の結果を利用して次の要請を置く。

要請 1. n の固有値スペクトルはすべての整数よりなる。

そしてこの要請に従って n を対角形に選ぶ。(4.1)より

$$n^\dagger = n, \quad \eta n = -n \eta. \quad (4.4)$$

従って (4.2) より

$$[n, q^\dagger] = -q^\dagger. \quad (4.5)$$

すると次のような Casimir 演算子 Δ が見付かる。

$$\Delta = q^\dagger q + q q^\dagger, \quad (4.6)$$

$$[\Delta, q] = [\Delta, q^\dagger] = [\Delta, n] = [\Delta, \eta] = 0. \quad (4.7)$$

従って Δ の固有値により表現を分類できる。先づ (4.6) から明

らみであるが、 Δ の固有値は正定値であるから λ^2 と書くことにする。 Δ と η との可換性から異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することが示される。すなわち

$$\Delta|x_1\rangle = \lambda_1^2|x_1\rangle, \Delta|x_2\rangle = \lambda_2^2|x_2\rangle, (\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2) \quad (4.8)$$

$$\longrightarrow \langle x_1|x_2\rangle = 0. \quad (4.9)$$

次に固有値 λ^2 の値によって2つの表現を導入する。

BRS-重項

固有値 λ^2 が0となるようなベクトルの集合 $\mathcal{U}_S$ をBRS-重項空間と呼ぶことにする。

$$\mathcal{U}_S = \{ |s\rangle \mid \mathcal{U} \ni |s\rangle, \Delta|s\rangle = 0 \}. \quad (4.10)$$

(4.6)から明らかたようにこの空間の任意のベクトル $|s\rangle$ は

$$q|s\rangle = 0, \quad q^\dagger|s\rangle = 0 \quad (4.11)$$

を満たすし、 η と Δ との可換性より $\eta|s\rangle$ も $\mathcal{U}_S$ に属する。

$$\eta\mathcal{U}_S = \{ \eta|s\rangle \mid \mathcal{U}_S \ni |s\rangle \} = \mathcal{U}_S, \quad (4.12)$$

さて η の固有値は(4.3)により ± 1 であるが、 (-1) を除くために次の要請を導入する。

要請2. BRS-重項空間は正定値空間である。

しからば $\mathcal{U}_S$ の中では $\eta=1$ のみが可能であり、(4.4)より n の固有値を N とするとこの部分空間では $N=0$ のみが可能であり、従って $\mathcal{U}_S$ を特徴付ける性質は

$$q\mathcal{U}_S = q^\dagger\mathcal{U}_S = n\mathcal{U}_S = \{0\}, \quad \eta\mathcal{U}_S = \mathcal{U}_S. \quad (4.13)$$

BRS = 重項

固有値 λ^2 が 0 でないバクトルの作る線形空間 $\mathcal{U}_D$ を BRS = 重項空間と呼ぶと, (4.9) を考慮して

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_S \oplus \mathcal{U}_D, \quad \mathcal{U}_S \perp \mathcal{U}_D. \quad (4.14)$$

と書くことは出来る。更に parent space と daughter space とを次のように定義する。

$$\mathcal{U}_p = q^\dagger \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}_d = q \mathcal{U}. \quad (4.15)$$

すると $q, q^\dagger$ と $\eta, \eta^\dagger$ の交換関係より

$$\eta \mathcal{U}_d = \mathcal{U}_p, \quad \eta \mathcal{U}_p = \mathcal{U}_d. \quad (4.16)$$

そこで $\lambda^2 \neq 0$ の時は $\Delta |x\rangle = \lambda^2 |x\rangle$ とする $|x\rangle$ を次のように分解する。

$$|x\rangle = q \left(\frac{q^\dagger}{\lambda^2} |x\rangle \right) + q^\dagger \left(\frac{q}{\lambda^2} |x\rangle \right) \equiv |d\rangle + |p\rangle. \quad (4.17)$$

$|d\rangle$ は明らかに $\mathcal{U}_d$ に属し, $|p\rangle$ は $\mathcal{U}_p$ に属するから

$$\mathcal{U}_D = \mathcal{U}_d \oplus \mathcal{U}_p. \quad (4.18)$$

また定義から明らかに次の空間は 0 バクトルのみからなる。

$$q \mathcal{U}_d = q^\dagger \mathcal{U}_p = \{0\}. \quad (4.18)$$

さて Δ と n とは可換であるから $\mathcal{U}_p$ のバクトルで

$$\Delta |p\rangle = \lambda^2 |p\rangle, \quad n |p\rangle = N |p\rangle \quad (4.19)$$

を満たすバクトルを $|p, N\rangle$ と書くことにすると

$$q |p, N\rangle \equiv \lambda |d, N+1\rangle \in \mathcal{U}_d, \quad (4.20)$$

$$q^\dagger |d, N+1\rangle = \lambda |p, N\rangle. \quad (4.21)$$

$|p, N\rangle$ と $|d, N+1\rangle$ とは BRS 二重項を形成することになる。
また (4.4) と (4.16) より次の新しい二重項を導入できる。

$$\eta|p, N\rangle \equiv |d', -N\rangle, \quad \eta|d, N+1\rangle \equiv |p', -N-1\rangle. \quad (4.22)$$

これが BRS 二重項になることは方程式が成立することからである。

$$Q|p', -N-1\rangle = \lambda|d', -N\rangle, \quad Q^\dagger|d', -N\rangle = \lambda|p', -N-1\rangle. \quad (4.23)$$

この4つのベクトルが BRS 代数の1つの既約表現 quartet を与えることになる。図式的には次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} |p, N\rangle & \xrightleftharpoons[\eta^\dagger]{\eta} & |d, N+1\rangle \\ \uparrow \eta & & \downarrow \eta \\ |d', -N\rangle & \xrightleftharpoons[\eta]{\eta^\dagger} & |p', -N-1\rangle \end{array}$$

さて上の二重項と下の二重項との関係は対称的であるから、
以後 $N \geq 0$ として $|p\rangle, |d\rangle$ を $|p^j\rangle, |d^j\rangle$ として $|p'\rangle, |d'\rangle$ を
 $|p_j\rangle, |d_j\rangle$ のように番号を上下に付けて区別する。 $\mathcal{O}_d$ である
いは $\mathcal{O}_p$ に属するベクトルは 0 である。例えば $\mathcal{O}_d$ に
属する $Q|x\rangle$ というベクトル $|y\rangle$ のノルムは

$$\langle y|y\rangle = \langle x, Q^\dagger \eta Q x\rangle = \langle x, \eta Q^2 x\rangle = 0.$$

しかしながら $\mathcal{O}_p$ のベクトルと $\mathcal{O}_d$ のベクトルとの内積は

$$\langle p^j|d_j\rangle = \langle p^j, \eta \eta p^j\rangle = \langle p^j, p^j\rangle > 0.$$

そこで右辺が 1 になるように p^j を規格化しておけば

$$\langle p^j|d_j\rangle = \langle p^j|Q_B|p_j\rangle = \langle d^j|p_j\rangle = 1. \quad (4.24)$$

他の quartet に対しては Schmidt の直交法を用いて

$$\langle p^i | d_j \rangle = \langle p_i | d^j \rangle = \delta_{ij}. \quad (4.25)$$

ところで Δ の固有値 λ^2 は基底の選び方に依存する。すなわち基底の変換 (3.4) に対し Δ の変換は固有値を変えるようなものとなるからである。ただ $\lambda^2 = 0$, $\lambda^2 \neq 0$ という性質は不変である。実際上の基底に対しては

$$Q_B | p^i \rangle = \lambda_i | d^i \rangle, \quad Q_B | p_i \rangle = \lambda_i | d_i \rangle \quad (4.26)$$

であるが、次のように基底を変えてみよう。

$$|\bar{d}^i \rangle = \sqrt{\lambda_i} | d^i \rangle, \quad |\bar{p}_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} | p_i \rangle. \quad (4.27)$$

そして $|\bar{d}_i \rangle, |\bar{p}_i \rangle$ も同様に定義すると

$$Q_B |\bar{p}^i \rangle = |\bar{d}^i \rangle, \quad Q_B |\bar{p}_i \rangle = |\bar{d}_i \rangle \quad (4.28)$$

となって λ^2 はすべて 1 となってしまふ。ただし $\lambda_i \neq 0$ 。この変換 (4.27) は (4.25) を変えない変換である。従って $\mathcal{U}$ 内の基底の組を次のような標準形に選べる。

1) $\mathcal{U}_S$ での基底の組 $\{|s_i \rangle\}$

$$\langle s_i | s_j \rangle = \delta_{ij}, \quad Q_B |s_i \rangle = 0. \quad (4.29)$$

2) $\mathcal{U}_D$ での基底の組 $\{|d_i \rangle, |d^i \rangle, |p_i \rangle, |p^i \rangle\}$

$$\langle p_i | d^j \rangle = \langle p^i | d_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \text{他はすべて } 0. \quad (4.30)$$

$$Q_B |p^i \rangle = |d^i \rangle, \quad Q_B |p_i \rangle = |d_i \rangle. \quad (4.31)$$

さて $\mathcal{U}_S, \mathcal{U}_p$ という空間は基底の選び方に依存する。しかし $\mathcal{U}_d$ と初めて定義される $\mathcal{U}_{phys}$ は基底の選び方に依らぬ。

$$\mathcal{U}_{phys} = \mathcal{U}_S \oplus \mathcal{U}_d. \quad (4.32)$$

すなわち $\Gamma\mathcal{U}_d$ と $\Gamma\mathcal{U}_{phys}$ は基底を用いずに定義できるからで、

$$\Gamma\mathcal{U}_d = \{ Q_B |x\rangle \mid \Gamma\mathcal{U} \ni |x\rangle \}, \quad (4.33)$$

$$\Gamma\mathcal{U}_{phys} = \{ |x\rangle \mid \Gamma\mathcal{U} \ni |x\rangle, Q_B |x\rangle = 0 \}, \quad (4.34)$$

$\Gamma\mathcal{U}_d$ は Q_B -coboundary, $\Gamma\mathcal{U}_{phys}$ は Q_B -cocycle であり, また

$$\mathcal{H}_{phys} = \Gamma\mathcal{U}_{phys} / \Gamma\mathcal{U}_d \quad (4.35)$$

は Q_B -cohomology である。実際は基底を変えることにより

$\Gamma\mathcal{U}_S$ には $\Gamma\mathcal{U}_d$ が, $\Gamma\mathcal{U}_p$ には $\Gamma\mathcal{U}_S$ と $\Gamma\mathcal{U}_d$ とが混ってくることを示せる。⁵⁾ また $\Gamma\mathcal{U}_S$ に対する射影演算子 $P(\Gamma\mathcal{U}_S)$ を

$$P(\Gamma\mathcal{U}_S) = \sum_i |s_i\rangle \langle s_i| \quad (4.36)$$

で定義すれば, $|f\rangle, |g\rangle \in \Gamma\mathcal{U}_{phys}$ に対して次式が示せる。

$$\langle f | g \rangle = \langle f | P(\Gamma\mathcal{U}_S) | g \rangle. \quad (4.37)$$

文献

- 1) N.Nakanishi and I.Ojima, "Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity", World Scientific(1990), Singapore.
- 2) T.Kugo and I.Ojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 66(1979)1.
- 3) K.Nishijima, Prog. Theor. Phys. 74(1985)889.
- 4) N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 51(1972)1.
- 5) K.Nishijima, Prog. Theor. Phys. 80(1988)897, 905.