

n -tournament の定義可能性 と量記号の消去

学習院大 本 橋 信 義

X を無限集合, n を正の整数とすると $X^{[n]}$ で X の相異なる n 個の元からなる集合全体をあらわす。 $X^{[n]}$ の元の表示を見やすくするために前もって linear order $<$ が X の上に与えられているものとし, $X^{[n]}$ の元は $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, x_1 < x_2 < \dots < x_n$ の形であらわされているものとする。 S_n で $\{1, 2, \dots, n\}$ の上の permutation 全体の集合をあらわす。 X 上の n -ary relation R について,

R is connected over $X \iff$ For any $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X^{[n]}$
there is a $\sigma \in S_n$ such that $\langle x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} \rangle \in R$

R is antisymmetric $\overline{X} \iff$ For any $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X^{[n]}$
there is a $\sigma \in S_n$ such that $\langle x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} \rangle \notin R$

と定義する (Ehrenfeucht [2] による)。 A を無限集合, R を A の上の n -ary relation とするとき R が A の上の n -tournament であるとは、 A の無限部分集合 X が存在して

R を X の上に制限すると R が *connected and antisymmetric over X* となることと定義する (Baumgartner [1] による)。従って無限集合上の linear order は 2-tournament であり、1-tournament は存在しないことになる。この n -tournament について良く知られた結果として Ehrenfeucht [2] の

- (I) { First order theory T が非可算濃度で categorical
 ならば、いかなる n -tournament も T の model の中では
 定義できない。

がある。この定義の結論は theory T が *totally transcendental* な場合にも成り立つことが Morley によって示されている。

([4] 参照)。本講演では、まず次の二つの事実を示す。

$R, R_1, \dots, R_k$ を無限集合 A 上の n -ary relations とする。 $1 \leq i < j \leq n$ に対して R_j^i は R の i 成分と j 成分を入れかえてできる relation とする。すると

- (II) { I) R が n -tournament $\Rightarrow A^n - R$ も n -tournament.
 II) $R_1 \cup \dots \cup R_k$ が n -tournament $\Rightarrow$ ある $1 \leq i \leq k$ について、 R_i が n -tournament.
 III) $R_1, \dots, R_k$ が n -tournament $\Rightarrow$ ある $1 \leq i \leq k$ について、 R_i が n -tournament.
 IV) R が n -tournament $\Rightarrow R_j^i$ も n -tournament.
 V) $R \times A$ が $(n+1)$ -tournament $\Rightarrow R$ は n -tournament

- (III) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Unary functions と unary relations しかもたない} \\ \text{first order structure 中ではいかなる } n\text{-tournament} \\ \text{も open formula では定義できない。} \end{array} \right.$

この二つの事実から、我々は、

- (IV) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Unary functions と unary relations しかもたない} \\ \text{first order structure 中である } n\text{-tournament} \\ \text{が定義できたとすれば、その structure は量記号の} \\ \text{消去を許さない。} \end{array} \right.$

を得る。McNaughton [5] によると $\text{structure } \langle A, f, U \rangle_{\mathcal{L}A}$,
ここで A は無限集合, f は A の上の unary function, $\mathcal{L}$ は量記
号の消去を許すことかわかるから、

- (V) $\left\{ \begin{array}{l} \langle A, f, U \rangle_{\mathcal{L}A} \text{ 中ではいかなる } n\text{-tournament も} \\ \text{定義できない。} \end{array} \right.$

が得られる。(V) を筆者は上記のような考察から得たので
あるが、この結果は既に Baumgartner によって Notice of A.M.S.
に発表されていた。([1] 参照)。(V) から我々は、 ω を
自然数全体とすると

(VI) $\langle \omega, f, U \rangle_{\mathcal{L}\omega}$ の中で通常の大-小関係は定義できない。
を得る。これを用いると McNaughton の結果

(VII) $\langle \omega, f, U \rangle_{\mathcal{L}\omega}$ の中で加法は定義できない。
が得られる。一方 Hartig [3] によると

(VII) $\left\{ \begin{array}{l} \omega \text{ の上の 2つの unary functions } f, g \text{ をうまく取} \\ \text{ると, } \langle \omega, f, g \rangle \text{ の中で加法と乗法が共に定義できる。} \end{array} \right.$

が成り立つから (VII) はある意味で最良の結果だと言える。

以上が n -tournament について筆者の予許にある事実のすべてである。最後に、linear order と unary relations をもった structure についての次のような予想を提出して本講演を終えたいと思う。

(IX) $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ を無限集合, } < \text{ を } A \text{ 上の linear order, } f \text{ を } A^2 \text{ から} \\ A \text{ への bijection とするとき, } f \text{ は } \langle A, <, \cup \rangle_{\cup \subseteq A} \\ \text{の中では定義できない。} \end{array} \right.$

この予想 (IX) が、教育大の江田君や、埼玉大の花沢君達の研究している。

(X) $\left\{ \begin{array}{l} K \text{ を infinite cardinal, } < \text{ をその上の通常の order と} \\ \text{するとき, } K^2 \text{ から } K \text{ への canonical bijection は} \\ \langle K, <, \cup \rangle_{\cup \subseteq K} \text{ の中では定義出来るか?} \end{array} \right.$

という問題を special case として含むことは明らかである。

References

- [1] J.E. Baumgartner, Undefinability of n -ary relations from unary functions, *Notice of A.M.S.*
- [2] A. Ekrenfencht, On theories categorical in power, *Fund. Math.*, 44 (1957), 241-248.
- [3] K. Hartig, Einstellige Funktionen als Grundbegriffe der elementaren Zahlentheorie, *Z. Math. Logic. Grundlagen Math.* 5 (1959), 209-215.
- [4] M. Morley, Categoricity in powers, *Trans. A.M.S.*, 114 (1965), 514-538.
- [5] R. McNaughton, Undefinability of addition from one unary operation, *Trans. A.M.S.*, 117 (1965), 329-337.