

接触力の影響による降伏応力の発生とレオロジー転移

東京大学 総合文化研究科 大槻道夫¹, 佐々真一
東京大学 地震研究所 波多野 恭弘

1 はじめに

粉体のレオロジー特性に関して、これまで多くの研究が行われている。粉体のレオロジー特性で特徴的なことは、粒子同士の衝突の際に起こるエネルギーの散逸が重要な役割を果たす点である。この粉体のレオロジー特性に関して、我々は二つの問題を設定し、それに関する研究を行った [1]。

一つ目の問題は、体積分率に対する粉体のレオロジー特性の変化に関するものである。粉体のレオロジー特性としては、低密度で粒子間の接触が殆どなく、接触力の影響が弱い場合に観測されるバグノルド則が良く知られている [2]。バグノルド則とは、剪断応力 σ がひずみ速度の 2 乗に比例するという性質で、物性に関わる時間スケールとして、ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ だけが効果を及ぼす場合に成立する [3]。このような低密度で観測されるレオロジー特性が、高密度になって接触力の影響が強くなると、どのように変化するか、ということが第一の問題である。

二つ目の問題は、圧縮粉体層のレオロジー特性に関するものである。最近になって、一定圧力 p の加えられた圧縮粉体層において、圧力によって無次元化されたひずみ速度 $I = \sqrt{m/(pa)}\dot{\gamma}$ と σ/p の間に

$$\frac{\sigma}{p} \simeq I^\phi \quad (1)$$

という関係が成り立つことが、波多野の離散要素法のシミュレーションで発見されている [4]。ここで、 a は最大粒子半径である。図 1 に示されているように指数 ϕ は $1/5$ と矛盾しない値となっている。この圧縮粉体層で観測されるべき的なレオロジー特性が、どのように理解されるか、ということが第二の問題である。

これらの間に答えるために、まず体積一定の粉体のシミュレーションを行い、密度変化によるレオロジー特性の変化を調べてみた。次いで、このシミュレーションで観測されるレオロジー特性と良く似た性質を持つガラス状物質のレオロジー特性の理論解析を参考にして、粉体のレオロジー特性の理論解析を行った。最後に、体積一定の系の結果をもとに、圧縮粉体層でのレオロジー特性の解釈を行った [1]。

¹E-mail:otsuki@jiro.c.u-tokyo.ac.jp

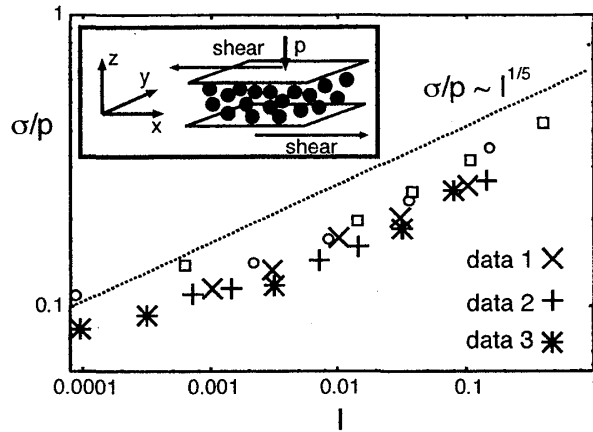


図 1: σ/p と I の関係。この結果は本研究で用いたモデルと似たモデルで得られている。主な違いは (i) z 方向の壁が一定圧力で押されている (ii) 剪断速度が上下の壁を動かすことで直接与えられている、という点である。詳しくは図の中の模式図を参照。パラメータの値は $L_x/a = L_y/a = 25$ 、 $N = 10800$ 、 $\eta/\sqrt{km} = 1.0$ 。 $pa/k = 1.92 \times 10^{-3}$ (data 1), 3.75×10^{-5} (data 2), $pa/k = 4.35 \times 10^{-3}$ かつ $L_x/a = L_y/a = 15$ (data 3)。さらに、正方形と円形の点は図 2 のデータから $pa/k = \Pi = 1.25 \times 10^{-3}$ (square symbol) と 5.4×10^{-5} (circle symbol) の点をプロットしたものである。

2 モデル

扱うモデルは、質量 m の粉体粒子を N 個含んだ 3 次元の系である。系の長さは x 、 y 、 z 方向に L_x 、 L_y 、 L_z とする。 $\mathbf{v} = (\gamma z, 0, 0)$ という剪断速度を与えるために Lees-Edwards 境界条件を用いた [5]。粒子の直径は $0.7a$ 、 $0.8a$ 、 $0.9a$ 、 a として、それぞれの個数を $N/4$ とした。粒子間の距離がそれぞれの粒子半径 r_1 と r_2 の合計よりも小さくなったときに粒子間相互作用が働くとする。粒子間相互作用としては弾性による力 $k(\delta r - (r_1 + r_2))$ と粘性力 $\eta \delta \mathbf{v}$ を考える。ここで、 δr は粒子間距離であり、 $\delta \mathbf{v}$ は粒子の相対速度である。問題を簡単にするために、接線方向の力は考えないことにする。ここでは特に、 $L_x/a = L_y/a = L_z/a$ 、 $N = 1728$ 、 $\eta/\sqrt{km} = 1.0$ の場合を考える。すると、コントロールパラメータは体積分率 $\nu \equiv N\pi a^3/(6L_x L_y L_z)$ と無次元化された剪断速度 $\Gamma \equiv \gamma\sqrt{m/k}$ のみとなる。以下では、無次元化した剪断応力 $\Sigma = \sigma a/k$ と無次元化した z 方向の圧力 $\Pi = pa/k$ を測定する。剪断応力と圧力の微視的標識は [5] に書いてある。

3 レオロジー転移

Σ と Π の (Γ, ν) に対する依存性を $\Sigma = f_\sigma(\Gamma, \nu)$ と $\Pi = f_\pi(\Gamma, \nu)$ と表す。図 2 は幾つかの ν において、これらを Γ の関数として表している。これらのグラフは体積分率に、臨界値 ν_c が存在し、臨界値以下ではバグノルド則が成立し、臨界値以上では降伏応力が発生することを示している。また、臨界点においては $\Gamma \rightarrow 0$ の極限において以下のベキ乗則が

成立する。

$$f_{\sigma}(\Gamma, \nu_c) \simeq \Gamma^{\alpha} \quad (2)$$

$$f_p(\Gamma, \nu_c) \simeq \Gamma^{\beta} \quad (3)$$

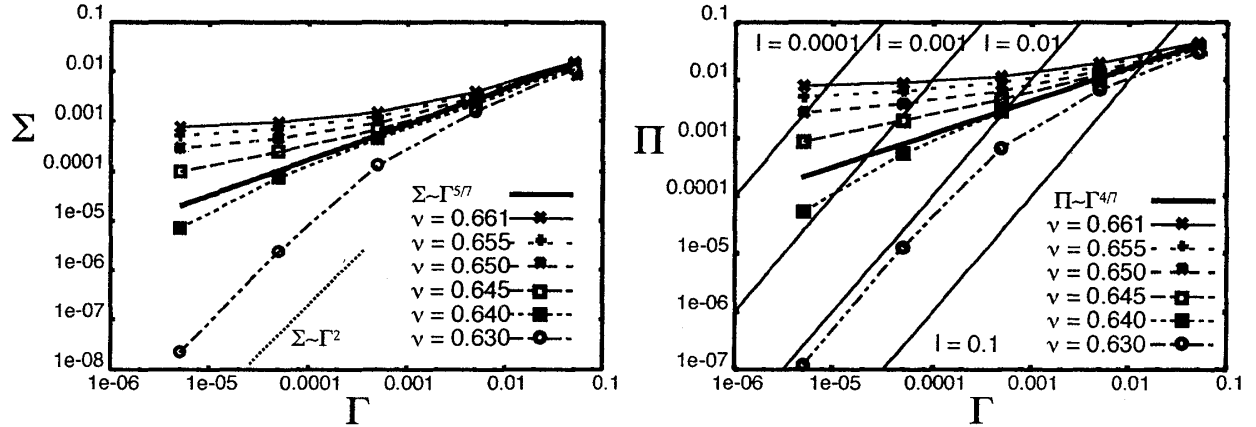


図 2: 左: 幾つかの ν における Σ の Γ 依存性。太い直線は、後の次元解析で得られる臨界点でのべき乗則 $\Sigma \propto \Gamma^{5/7}$ を表す。 $\nu = 0.630$ では $\Gamma \leq 10^{-4}$ でバグノルド則が見られる [2]。右: 幾つかの ν における Π の Γ 依存性。太い直線は、後の次元解析で得られる臨界点でのべき乗則 $\Pi \propto \Gamma^{4/7}$ を表す。さらに他の直線は I 一定の線を表す。これらの直線は一定圧力下における σ/p の I 依存性を理解するのに役立つ。

このレオロジー特性は、ガラス状物質のレオロジー特性と良く似ている。ガラス状物質に関しては、文献 [6] で、そのレオロジー特性を記述する方程式が解析的に導出されている。そこで、そのガラス状物質の解析の知見を用いて、式 (2) と (3) で示されているべき乗則のべき指数の解析的な計算を行った。詳しい計算方法は文献 [1] に記してあるので、ここでは詳細を省く。結果として、指数 $\alpha = 5/7$ 、 $\beta = 4/7$ という値が計算される。これらの値が示すべき乗則は、図 2 に示されており、この解析計算による指数の値が、シミュレーションのものと調和的であるといえる。

4 圧縮粉体のレオロジー特性の解釈

最後に、上で得られた定積条件下での結果をもとに定圧条件下で見られるべき乗則を解釈する。まず、臨界点で成立する式 (2) と (3) から式 (1) の指数が以下のように見積もれる。

$$\phi = \frac{2(\alpha - \beta)}{2 - \beta} \quad (4)$$

先に求めた指数 $\alpha = 5/7$ と $\beta = 4/7$ から、指数 $\phi = 1/5$ が求まる。この ϕ の値は数値計算の結果と一致する。しかし、このべき乗則は定積条件下の臨界点におけるものであり、定圧条件下でのものではない。

定圧条件下での定量的な挙動を考察するために、定圧条件下での体積分率と剪断応力を $\nu = g_\nu(\Gamma, \Pi)$ と $\Sigma = g_\sigma(\Gamma, \Pi)$ と表す。そして、図2から、これらの関数を求める。最初に、図2の右の図の上の点 (Γ, Π) から、体積分率が求まる。ここで、この体積分率が定圧条件下の Π と Γ のもとで実現し、剪断応力もこの体積分率のもとでの図2の左の図での定積条件下の値と一致すると仮定する。ちなみに、ここで用いた仮定が成立することは数値計算によって確認している。

この仮定により、定圧条件下での体積分率を Γ の関数として求めることで、 σ/p の I 依存性が得られる。参照のために、図2の左の図に $I = \text{const.}$ の線を引いておいた。例として図2の右の図で $\Pi = 10^{-3}$ の場合を考えてみる。この場合、十分小さい Γ では体積分率は臨界値よりも大きい。これは $I \leq 10^{-3}$ で $\nu \geq 0.650$ の場合に成り立つ。図2の左の図において、この場合剪断応力はほとんど一定の値を示す。一方、 $10^{-3} \leq I \leq 10^{-1}$ の区間では、 $\Pi = 10^{-3}$ の場合臨界状態に非常に近い。そのため、この領域では σ/p が臨界状態の場合のように振る舞うことが期待され、その挙動が式(1)で表されるようになると考えられる。

上記の議論から考えて、一様剪断状態での σ/p の I 依存性は以下のように考えられる。

$$\sigma/p \approx \text{const.} \quad \text{for } I \ll I_0 \quad (5)$$

$$\approx I^{1/5} \quad \text{for } I_0 < I < I_1 \quad (6)$$

ここで、 I_0 と I_1 は圧力に依存する定数であり、極端に大きな圧力や小さな圧力の場合には、上記の振る舞いは観測されないと考えられる。図1で観測されるべき乗則が成立する領域がどの程度あるかを確かめるために、図2から見積もった定圧条件下での $(I, \sigma/p)$ のデータを図1に書いておいた。上記の考察から期待されたようにべき乗則は $\Pi = 1.25 \times 10^{-3}$ の場合にはきちんと成立している。さらに、図2を見る限りでは臨界状態よりも密度がかなり低い $\Pi = 5.4 \times 10^{-5}$ の場合でさえもべき乗則が見られる。これほど広い領域でべき乗則が観測される理由はまだわかっていない。

参考文献

- [1] T. Hatano, M. Otsuki, and S. Sasa, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 023001 (2007).
- [2] R. A. Bagnold, Proc. R. Soc. London A **225**, 49 (1954).
- [3] N. Mitarai and H. Nakanishi, Phys. Rev. Lett. **94**, 128001 (2005).
- [4] T. Hatano, e-print cond-mat/0612360.
- [5] D. J. Evans and G. Morris, *Statistical mechanics of Nonequilibrium Liquids*, (Academic, London, 1990).
- [6] M. Otsuki and S. Sasa, J. Stat. Mech. L10004 (2006).