

# Characteristic varieties of highest weight modules and primitive quotients

東北大理 谷崎 修之 (Toshiyuki Tanisaki)

## 30. 序

**0.1** 本稿では, 半単純 Lie 環の最高 weight 加群及び包絡環の primitive quotient の特性多様体について述べる。特に包絡環の primitive ideal はその特性多様体により特徴付けられるのではないかとする Borho-Brylinski の問題 ([BoB]) について考察する。

**0.2** まず話の出発点となる Beilinson-Bernstein 同値について述べる。  $G \in \mathbb{C}$  上の連結半単純 Lie 群,  $\mathfrak{g}$  とその Lie 環,  $U(\mathfrak{g})$  と  $\mathfrak{g}$  の包絡環とする。また  $X \in G$  の旗多様体とし  $\mathcal{O}_X \in X$  上の線形微分作用素のなす環の層とある。  $G$  の  $X$  への自然な作用により環準同型写像  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  が導かれる。よって  $U(\mathfrak{g})$ -加群  $M$  に対して  $\mathcal{O}_X$ -加群 (の層)  $\mathcal{O}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$  が定まる。

**Prop. 0.1** ([BeB]) 対応  $M \mapsto \mathcal{O}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$  は, 自明な中心指標を持つ有限生成  $U(\mathfrak{g})$ -加群のなす  $\mathbb{C}$  上の abel 圏と, 連接的  $\mathcal{O}_X$ -加群のなす  $\mathbb{C}$  上の abel 圏の同値を導く。■

**0.3** 有限生成  $U(\mathfrak{g})$ -加群  $M$  に対してその随伴多様体 (associated variety)  $V(M)$  が,  $\mathfrak{g}$  の双対空間  $\mathfrak{g}^*$  の部分代数

多様体として定義される。以下しばしば Killing 形式により  $\mathfrak{g}^+$  と  $\mathfrak{g}$  を同一視して  $V(M)$  を  $\mathfrak{g}$  の部分代数多様体と見る。また直接的  $\otimes_X$ -加群  $M$  に対してその特性多様体 (characteristic variety)  $Ch(M)$  が余接束  $T^*X$  の部分代数多様体として定義される。 $V(M)$ ,  $Ch(M)$  の定義は例えば [BoB2] を参照されたい。自明な中心指標をもつ有限生成  $U(\mathfrak{g})$ -加群  $M$  に対して  $Ch(\otimes_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M)$  を単に  $Ch(M)$  と書く。 $Ch(M)$  と  $V(M)$  の関係は次のとおり。 $T^*X \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{g}^+ \cong \mathfrak{g} \in G \times X$  の作用から導かれる自然な写像とする (moment map)。このとき,

Prop. 0.2 ([BoB2])  $M$  が自明な中心指標をもつ有限生成  $U(\mathfrak{g})$ -加群なら,  $V(M) = \sigma(Ch(M))$  である。」

0.4 以下の目的は, 自明な中心指標をもつ既約な最高 weight 加群  $L$ , ある  $\mathfrak{h}$  は自明な中心指標をもつ  $U(\mathfrak{g})$  の primitive ideal  $I$  による  $U(\mathfrak{g})$  の商  $U(\mathfrak{g})/I$  によってその随伴多様体及び特性多様体を考察する事である。 $V(U(\mathfrak{g})/I)$  がどうなるかは知られていない (Prop. 2.6, Joseph, 註 4, Borho-Brylinski)。 $V(L)$  を全ての  $L$  によって求める事と,  $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$  を全ての  $I$  によって求める事は同値である (Prop. 1.4, Borho-Brylinski)。よって問題は

Problem 0.3 自明な中心指標をもつ既約最高 weight 加群  $L$  に対して  $Ch(L)$  を決定せよ。」

Problem 0.4 自明な中心指標をもつ  $U(\mathfrak{g})$  の primitive ideal  $I$  に対して  $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I)$  を決定せよ。」

$I$  に与えた事から Problem 0.3 が解ければ Problem 0.4 も解ける事になる。

0.5  $G$  が  $A_m$  型 のときには Problem 0.3, 0.4 の答は予想と一致しており  $m \leq 5$  で確かめられている (3.3.1)。しかし一般の場合の予想はまだない。

本稿では Problem 0.3, 0.4 に関して知られている幾つかの部分的結果を組み合わせて,  $G$  の rank が 3 以下のときに  $\text{Ch}(L)$  及び  $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I)$  を決定する。Borho-Brylinski ([BoB2]) は  $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I)$  が常に既約であること予想したが, 我々の計算から  $B_3, C_3$  型で反例が存在する事もわかる。また本稿ではこの Borho-Brylinski 予想の一つの修正案を提出する (Conjecture 4.1)。これが正しいければ次の予想が正しい事わかる。

Conjecture 0.5 自明な中心指標を持つ  $U(\mathfrak{g})$  の primitive ideal 全体の集合を  $\mathcal{X}_0$  とする。

(i)  $I_1, I_2 \in \mathcal{X}_0$  に対して  $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_1) = \text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_2)$  ならば  $I_1 = I_2$  である。

(ii)  $\mathcal{X}_0$  と  $\bigsqcup_{\mathfrak{o} \in \text{Nilp}_{\text{sp}}} \overline{\text{Irr}(\text{CONM}^+)}$  の間に自然な一対一対応がある。そこで  $\text{Nilp}_{\text{sp}}$  は  $\mathfrak{g}$  の特殊巾零共役類の集合 (3.2.3),

$\mathfrak{m}^+$  は  $G$  の  $\mathfrak{u}$  と  $\mathfrak{o}$  の Borel 部分群の unipotent radical の Lie 環,  
 $\text{Irr}(\overline{\mathfrak{O}(\mathfrak{m}^+)})$  は  $\overline{\mathfrak{O}(\mathfrak{m}^+)}$  の既約成分の集合である。■

### §1. 特性多様体

[1.1]  $G$  の Borel 部分群  $B$  及び  $B$  に含まれる  $G$  の極大 Torus  $H$  をとり固定する。  $\mathfrak{o}, \mathfrak{g}$  をそれぞれ  $B, H$  の Lie 環とする。  
 $\Delta$  を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  の root 系,  $\Delta^+$  を  $\mathfrak{o}$  に対応する正 root の全体として  
 $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \in \mathfrak{g}^+$  とおく。  $W \in \text{Weyl}$  群とする。  $w \in W$  に  
 対して  $-w\rho - \rho$  は最高 weight に持つ Verma 加群  $M_w$ ,  $\Sigma$  の  
 既約成分  $L_w$  とする。 自明な中心指標をもつ有限生成  $\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ -  
 加群であって  $B$ -作用をもつものからなる abel 圏を  $\mathcal{O}_0$  と  
 書く。  $M_w, L_w$  は  $\mathcal{O}_0$  の対象で,  $\mathcal{O}_0$  の Grothendieck 群  $K(\mathcal{O}_0)$   
 は,

$$K(\mathcal{O}_0) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[M_w] = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[L_w]$$

と分解される。

[1.2]  $B$  の unipotent radical の Lie 環  $\mathfrak{u} \in \mathfrak{m}^+$  とする。  
 また  $X = G/B$  の  $B$ -軌道への分解  $X = \bigsqcup_{w \in W} X_w$  ( $X_w = BwB/B$ )  
 とする。  $M \in \mathcal{O}_0$  ならば  $V(M)$  は  $\mathfrak{m}^+$  の部分代数多様体である。  
 すると  $\text{Ch}(M) \subset \delta^+(V(M)) \subset \delta^+(\mathfrak{m}^+) = \bigsqcup_{w \in W} T_{X_w}^+ X = \bigcup_{w \in W} \overline{T_{X_w}^+ X}$ 。こ  
 こで  $T_{X_w}^+ X$  は  $X_w$  の余法束とする。 特性多様体の包含性により  
 $\text{Ch}(M)$  の任意の既約成分はある  $w \in W$  に対する  $\overline{T_{X_w}^+ X}$  と一致

ある。  $\text{Ch}(M)$  の各既約成分  $\gamma$  の重複度  $\varepsilon = m(\gamma, w)$  として考えると,  $M$  の特性 cycle (characteristic cycle)  $\underline{\text{Ch}}(M) \in \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}_{\geq 0} [\overline{T_{X_w}^+ X}]$  が定義される。  $\underline{\text{Ch}}$  の加減法性により,  $\underline{\text{Ch}}$  は  $\mathbb{Z}$ -線形写像

$$K(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\underline{\text{Ch}}} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z} [\overline{T_{X_w}^+ X}]$$

に与えられる。  $\underline{\text{Ch}}(L_w) = \sum_{y \in W} m(y, w) [\overline{T_{X_y}^+ X}]$  により  $m(y, w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  と定め  $\Sigma(w) = \{y \in W \mid m(y, w) > 0\}$  とおくと,  $\text{Ch}(L_w) = \bigcup_{y \in \Sigma(w)} \overline{T_{X_y}^+ X}$  である。

**[1.3]** Prop. 0.1 により,  $\mathcal{O}_X$  は, 直接和  $\mathcal{O}_X$ -加群であり,  $\mathbb{C}$ -作用をもち  $\mathcal{O}_X$  を含む abel 圏  $\mathcal{M}$  と同値である。 §1.2 により  $\mathcal{M}$  の対象が holonomic になる事は明らかだが,  $\pm 3$  に regular holonomic になる事がわかる ([BK])。 実際  $\partial X_w = \overline{X_w} - X_w$  とおくと,  $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} L_w \cong \pi^* (\mathcal{B}_{X_w} |_{X - \partial X_w})$  である。  $\pi^* (\mathcal{B}_{X_w} |_{X - \partial X_w}) = H_{X_w}^{\text{codim } X_w} (\mathcal{O}_{X - \partial X_w})$ ,  $\pi^* (\mathcal{B}_{X_w} |_{X - \partial X_w})$  は  $\mathcal{O}_{X - \partial X_w}$  の minimal extension である。

$W$  は a Bruhat order  $\leq$  と書く ( $y \leq w \iff X_y \subset \overline{X_w}$ )。 また  $W$  の単純鏡影の全体  $S$  とする。  $w \in W$  に対して  $L(w) = \{s \in S \mid sw < w\}$ ,  $R(w) = \{s \in S \mid ws < w\} = L(w^{-1})$  とおく。

### Lemma 1.1

- (i)  $w \in \Sigma(w)$  であり  $m(w, w) = 1$ 。
- (ii)  $y \in \Sigma(w)$  ならば  $y \leq w$ 。
- (iii)  $y < w$  とする。  $X_y$  は  $\overline{X_w}$  中の non-singular  $\mathbb{A}^1$  である。

$m(y, w) = 0$ . 特に  $w$  が  $W$  の放物型部分群の最长元なる  $z(w) = \{w\}$ .

(iv)  $y \in z(w)$  ならば  $\mathcal{L}(y) \supset \mathcal{L}(w)$ .  $\blacksquare$

(証明) (i), (ii), (iii) は  $\bigotimes_{\mathbb{Q}} L_w \cong \pi(B_{X_w}|_{X-\partial X_w})$  により明か.

(iv) は次から従う.  $B$  を含む放物型部分群で Levi part の Weyl 群が  $W_1 = \langle \mathcal{L}(w) \rangle$  となるもの  $\in P$  とすると,  $X$  の  $P$ -軌道への分解は  $X = \bigsqcup_{y \in W_1 \backslash W} (P_y B / B)$  で与えられる, これは  $X$  の Whitney stratification にある. また  $X_y$  が  $P_y B / B$  中で open にあるための条件は  $\mathcal{L}(y) \supset \mathcal{L}(w)$  である.  $\blacksquare$

**1.4**  $G$  の  $X \times X$  への対角型作用の軌道分解は  $X \times X =$

$\bigsqcup_{w \in W} D_w$  ( $D_w = G \cdot (eB, wB)$ ) で与えられる.  $X \times X$  から第一成分への射影により  $X \times X \cong X = G/B$  上の fiber 束を思いつき,

$X \times X \cong G^B \backslash X$ , また  $D_w = G^B \backslash X_w$  である. したがって直接的

$\bigotimes_{X \times X}$ -加群であって  $G$ -作用をもつもののつくる abel 圏を

$\mathcal{N}$  と書くと,  $\mathcal{N} \xrightarrow{i^*} \mathcal{M}$  である. ここで  $X \xleftarrow{i} X \times X$  は

$i(gB) = (eB, gB)$  により与えられるものとする.  $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w \in \mathcal{N}$

と  $i^*(\mathcal{M}_w) = \bigotimes_{\mathbb{Q}} M_w$ ,  $i^*(\mathcal{L}_w) = \bigotimes_{\mathbb{Q}} L_w$  により定める.

$\mathcal{L}_w \cong \pi(B_{D_w}|_{X \times X} - \partial D_w)$  がわかる.  $\mathcal{M} \in \mathcal{N}$  ならば  $\text{Ch}(\mathcal{M}) \subset$

$\bigcup_{w \in W} \overline{T_{D_w}^+(X \times X)}$  である.  $Z_w = \overline{T_{D_w}^+(X \times X)}$  とおくと §1.2 と同様に

$\mathcal{K}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\text{Ch}} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[Z_w]$  が定まり

$$\begin{array}{ccc}
 K(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[Z_w] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K(\mathcal{O}_0) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[\overline{T_{X_w} X}]
 \end{array}$$

は可換である。ここで左のタテ方向の写像は  $\mathcal{V} \xrightarrow{i^*} \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{O}_0$  により導かれる同型写像、右のタテ方向の写像は  $[Z_w] \mapsto [\overline{T_{X_w} X}]$  により定まる  $\mathbb{Z}$ -線型写像である。特に  $\underline{\text{Ch}}(\mathcal{L}_w) = \sum_{y \in W} m(y, w) [Z_w]$  となる。さて  $X \times X \xrightarrow{\delta} X \times X$  ( $g_1 B, g_2 B$ )  $\mapsto$  ( $g_2 B, g_1 B$ ) は  $G$ -作用を保つ同型写像で  $j(\mathcal{O}_w) = \mathcal{O}_{w^{-1}}$ 。

よって  $j^*(\mathcal{L}_w) = \mathcal{L}_{w^{-1}}$ 。よって

$$\begin{array}{ccc}
 K(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[Z_w] \ni [Z_w] \\
 j^* \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 K(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[Z_w] \ni [Z_{w^{-1}}]
 \end{array}$$

が可換な事が次の如くなる。

Lemma 1.2  $m(y, w) = m(y^{-1}, w^{-1})$ 。特に  $\Sigma(w) = (\Sigma(w^{-1}))^{-1}$ 。

よって  $y \in \Sigma(w)$  ならば  $R(y) \supset R(w)$  である。

**[1.5]** Weyl 群の左 cell 等価概念について復習する ([J1], [KL1] 参照)。  $K(\mathcal{O}_0)$  中で  $[L_w] = \sum_{y \in W} a(y, w) [M_y]$  とある。整数  $a(y, w)$  は (少なくとも原理的には) 計算可能である (Kashdan-Lusztig 予想 [KL1], [BeB], [BK] により証明された)。そこで  $a(w) = \sum_{y \in W} a(y, w) y \in \mathbb{C}[W]$  とおくと、 $\mathbb{C}[W] = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C} a(w)$ 。  $\{a(w) \mid w \in W\}$  のある部分集合で張られ

よって  $\mathbb{C}[W]$  の部分空間を " $Q$ -基底型部分空間" と呼ぶ。

$w \in W$  に対して  $Q(w)$  を含む  $Q$ -基底型部分空間のうちで  $W$  の左作用 に関して不変な最小のもの  $\bar{V}_w^L$  と書く。また  $W$  上の

preorder  $\preceq$  及び同値関係  $\sim$  を,  $[w] \preceq [y] \iff \bar{V}_w^L \supset \bar{V}_y^L$ ,  $[w] \sim [y] \iff \bar{V}_w^L = \bar{V}_y^L$  により定める。  $\sim$  の同値類を左 cell といい、

$V_w^L := \bar{V}_w^L / \sum_{\bar{V}_y^L \subsetneq \bar{V}_w^L} \bar{V}_y^L$  を  $W$  の表現を左 cell 表現という。

$w$  を含む左 cell を  $C_w^L$  と書く。  $C_w^L$  に対応して  $V_w^L$  の基底が定まる。下線部の  $W$  の左作用 を  $W$  の右作用 (あるいは  $W \times W$  の両側作用) に置き換えて,  $\bar{V}_w^R, \preceq_R, \sim_R, V_w^R, C_w^R$  (あるいは  $\bar{V}_w^{LR}, \preceq_{LR}, \sim_{LR}, V_w^{LR}, C_w^{LR}$ ) が全く同様に定義される。

1.4 と同様の議論から (あるいは Kazhdan-Lusztig 予想から)  $Q(y, w) = Q(y^{-1}, w^{-1})$  が成り立つので  $[w] \preceq [y] \iff [w^{-1}] \preceq [y^{-1}]$  また  $[w] \sim [y] \iff [w^{-1}] \sim [y^{-1}]$  である。  $W$  の既約表現の同型類の集合を  $\hat{W}$  と書く。  $W$  の既約表現は全て自己双対的なので  $W \times W$ -加群として  $\mathbb{C}[W] \cong \bigoplus_{\sigma \in \hat{W}} (\sigma \otimes \sigma)$  である。 したがって  $[w] \sim_{LR} [w^{-1}]$  が成り立つ。

**[1.6]** 自明な中心指標をもつ  $U(\mathfrak{g})$  の primitive ideal 全体の集合を  $\mathcal{X}_0$  とする。 すなわち  $\mathcal{X}_0 = \{ \text{Ann } M \mid M \text{ は自明な中心指標を持つ既約 } U(\mathfrak{g})\text{-加群} \}$ , ここで  $\text{Ann } M = \{ u \in U(\mathfrak{g}) \mid u \cdot M = 0 \}$  である。  $I_w = \text{Ann } L_w$  とおくと Duflo [D] により  $\mathcal{X}_0 = \{ I_w \mid w \in W \}$  が知られている。 さらに,

「Prop. 1.3 ([J1], [V])  $I_w \subset I_y \Leftrightarrow w \preceq y$ , 特に  $I_w = I_y \Leftrightarrow w \sim y$  である。」

よって  $\mathcal{X}_0 \simeq W/\sim$  である。

[1.7]  $T^*X$  は  $X = G/B$  上の fiber 束として  $G^{\mathbb{R}^+ m^+}$  と自然に同型である。 $I_w$  は  $U(\mathfrak{g})$  の両側 ideal なので  $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_w)$  は  $T^*X$  の  $G$ -不変部分代数多様体である。

「Prop. 1.4 ([BoB2])  $\text{Ch}(U(\mathfrak{g})/I_w) = G^{\mathbb{R}^+} V(L_{w^{-1}})$  ( $\forall w \in W$ )」  
よって次がわかる。

「Corollary 1.5 ([J3], [BoB2])  $w \preceq_{\mathbb{R}} y \Rightarrow V(L_w) \supset V(L_y)$ ,  
特に  $w \sim y \Rightarrow V(L_w) = V(L_y)$ 」

## §2. Weyl 群の表現との関係

[2.1]  $\mathfrak{g}$  の巾零共役類の集合を  $\text{Nilp}$  と書く。  $0 \in \text{Nilp}$  に対して,  $0$  上の  $G$ -作用を持つ既約局所系と同型類の集合を  $\mathcal{J}_0$  と書く。  $x \in 0 \in \mathfrak{u}$  と固定するとき,  $\mathcal{J}_0$  は  $A(x) = Z_{G(x)}/Z_{G(x)}^\circ$  の既約表現の同型類の集合  $\hat{A}(x)$  と自然に一対一に対応する。  $\psi \in \mathcal{J}_0 \xleftrightarrow{\sim} \hat{A}(x) \ (\xi \leftrightarrow \chi_\xi)$  とする。  
 $\dim X = d$  とおくと  $X_x = \{gB \in X \mid x \in g \cdot m^+\}$  は純次元  $d_0 := d - \frac{1}{2} \dim 0$  を持つ。  $X_x$  の top homology 群  $H_{2d_0}(X_x) = (H_c^{2d_0}(X_x, \mathbb{C}))^*$  には  $W$  の作用が定義され,  $A(x)$  の自然な作用と可換である (Springer 表現, [Spr] 参照)。  $W \times A(x)$ -

加群として  $H_{2d_0}(X_x) = \bigoplus_{\xi \in \mathcal{J}_0} (T_{(0,\xi)} \otimes \chi_\xi)$  ( $T_{(0,\xi)}$  は  $W$ -加群) と分解できるとし,  $T_{(0,\xi)}$  は (0) または既約  $W$ -加群になる。ここで  $\mathcal{J}_0 = \{\xi \in \mathcal{J}_0 \mid T_{(0,\xi)} \neq (0)\}$  とおくとし,

$\sqcup_{0 \in \text{Nilp}} \mathcal{J}_0 \longrightarrow \widehat{W} \quad (\mathcal{J}_0 \ni \xi \mapsto T_{(0,\xi)} \in \widehat{W})$  は全単射である。

$\xi = (0)$  のとき, および  $\chi_\xi$  が単位表現のときは明らかに

$T_{(0,\xi)} \neq (0)$ 。  $\psi \in \text{Sp}(0)$  と書く。

一般に純次元代数多様体  $Y$  の既約成分の集合を  $\text{Irr}(Y)$  と書く。  $D = \{(y, gB) \in O \times X \mid y \in g\mathfrak{m}^+\}$  は  $X = G/B$  上の fiber 束とみられ  $D \cong G^B \times (\text{Con}\mathfrak{m}^+)$ ,  $O = G/Z_G(x)$  上の fiber 束とみられ  $D \cong G^{\mathbb{Z}_G(x)} \times X_x$  である。  $\mathcal{J}_0 \subset \text{Irr}(X_x)$  から  $\text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+}) \simeq \text{Irr}(\text{Con}\mathfrak{m}^+) \simeq \text{Irr}(CD) \wedge$  の全射

$$(2.1) \quad \text{Irr}(X_x) \xrightarrow{\mathcal{R}} \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})$$

が定義され, 各点  $a$  近傍は  $\psi$  と  $\psi$  の  $A(x)$ -軌道になる。

$\mathcal{J}_0 \subset \text{Irr}(X_x) / \sim_{A(x)} \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})$ 。  $\text{Sp}(0) = H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$  上の  $\psi$ ,  $\psi \in \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})$  に対して  $\mathcal{J}_\psi := \sum_{C \in \mathcal{R}^{-1}(\psi)} [C] \in H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$  とおくと,  $\{\mathcal{J}_\psi \mid \psi \in \text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+})\}$  は  $\text{Sp}(0)$  の基底になる。特に

$\dim \text{Sp}(0) = \#(\text{Irr}(\overline{\text{Con}\mathfrak{m}^+}))$  である。

**[2.2]**  $w \in W$  に対して Joseph の Goldie rank 多項式

$([J_2]) \in P_w$  とする。 および  $P_w = \sum_{y \in W} a(y, w)(y^{-1}p)^{m_w}$

$\in S^{m_w}(\mathfrak{g}^+)$ 。 ここで  $m_w$  は  $w$  が non-zero になる最小の非負整数, また  $S^{m_w}(\mathfrak{g}^+)$  は  $\mathfrak{g}^+$  の  $m_w$  次対称テンソルのなる空間

である。

Prop. 2.2 ([J2])

$$(i) \mathbb{C}P_w = \mathbb{C}P_y \iff w \sim_L y$$

$$(ii) w \sim_L y \text{ ならば } m_w = m_y.$$

$$(iii) \sigma(w) := \sum_{y \in \mathbb{C}P_w} \mathbb{C}P_y \text{ は } W\text{-不変であり、軌約である。}$$

$$(iv) \sigma(w) = \bigoplus_{y \in \mathbb{C}P_w / \sim} \mathbb{C}P_y$$

$$(v) \dim \operatorname{Hom}_W(\sigma(w), S^m(\mathfrak{g}^+)) = \begin{cases} 0 & m < m_w \\ 1 & m = m_w \end{cases}$$

$$(vi) \sigma(w) \cong \sigma(y) \iff w \sim_L y \quad \blacksquare$$

よって  $W/\sim_L \hookrightarrow \hat{W}$  が  $w \mapsto \sigma(w)$  により定まる。この像を  $\hat{W}_{sp}$  と書く。  $\hat{W}_{sp}$  は Lusztig により定義された “特殊表現” の全体と一致する ([BV1, 2])。

[2.3] ある  $O \in \operatorname{Nilp}$  に対して  $\overline{O \cap \mathfrak{m}^+}$  の軌約成分に存在するような  $\mathfrak{m}^+$  の部分代数多様体と、( $O$  に付随した) 軌道的多様体 (orbital variety) と言う。  $w \in W$  に対して  $Y^r(w) = \overline{B \cdot \mathfrak{m}^+ \cap w^{-1} \mathfrak{m}^+}$ ,  $Y^r(w) = \overline{B \cdot \mathfrak{m}^+ \cap w \mathfrak{m}^+}$  とおく。また  $O_w^{or} \in \operatorname{Nilp}$  と  $\overline{O_w^{or}} = \overline{G \cdot \mathfrak{m}^+ \cap w \mathfrak{m}^+}$  により定める。  $Y^r(w)$ ,  $Y^r(w)$  は  $O_w^{or}$  に付随した軌道的多様体である。また任意の軌道的多様体は、ある  $w \in W$  に対する  $Y^r(w)$  と一致する ([Et])。

柏原, Gabber の純次元性定理 ([J3, 4] 参照) により  $V(L_w)$  は純次元である。また  $V(L_w) = \delta(\operatorname{Ch}(L_w)) = \bigcup_{y \in Z(w)} \delta(\overline{\bigwedge_{X_y} X}) = \bigcup_{y \in Z(w)} Y^r(w)$

にあり,  $V(L_W)$  の既約成分は軌道的多様体である。

Joseph [J3] は軌道的多様体 (ある  $\mathfrak{h}$  はあり一般に  $\mathfrak{m}^+$  の  $\mathfrak{h}$ -不変部分代数多様体)  $Y$  に対して  $P_Y \in S^{d-\dim Y}(\mathfrak{g}^+)$  を定義して ( $Y \in \overline{\text{Irr}(\text{Con } \mathfrak{m}^+)}$ )  $\dim Y = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{O}$ ,  $d \geq d - \dim Y = d_0$ ).

Prop. 2.3 ([J3])  $P_{W^{-1}} = \sum_{Y \in \overline{\text{Irr}(V(L_W))}} l_Y P_Y$  ( $\exists l_Y > 0$ )

± Borho-MacPherson [BM] にあり

$$\dim \text{Hom}_W(\text{Sp}(\mathfrak{O}), S^m(\mathfrak{g}^+)) = \begin{cases} 0 & m < d_0 \\ 1 & m = d_0 \end{cases}$$

が知られる。

Prop. 2.4 ([H])  $W$ -加群としての単純準同型

$\text{Sp}(\mathfrak{O}) \rightarrow S^{d_0}(\mathfrak{g}^+)$  が  $\mathfrak{O}_Y \mapsto P_Y$  ( $Y \in \overline{\text{Irr}(\text{Con } \mathfrak{m}^+)}$ ) にあり

定まる。

Prop. 2.2, 2.3, 2.4 にあり  $\widehat{W}_{\text{Sp}}$  は  $\text{Nilp} \xrightarrow{\text{Sp}} \widehat{W}$  の像に入る事から。  $\text{Nilp}_{\text{Sp}} = \{\mathfrak{O} \in \text{Nilp} \mid \text{Sp}(\mathfrak{O}) \in \widehat{W}_{\text{Sp}}\}$  に入る巾零共役類を特殊巾零共役類と云う。  $W/\sim_{\text{LR}} \xrightarrow{\sim} \text{Nilp}_{\text{Sp}} (w \mapsto \mathfrak{O}_w^{\text{LR}})$  が  $\text{Sp}(\mathfrak{O}_w^{\text{LR}}) = \sigma(w)$  にあり定まる。 以下以上の議論から,

Prop. 2.5  $\text{Irr}(V(L_W)) \subset \overline{\text{Irr}(\mathfrak{O}_w^{\text{LR}} \cap \mathfrak{m}^+)}$  ( $\forall w \in W$ )

± Prop 0.2, 1.4, 2.5 にあり

Prop 2.6 (Borho-Brylinski, Joseph, Hotta 尚 [KT], [Gi] 参照)

$$V(U(\mathfrak{g})/I_w) = \overline{\mathfrak{O}_w^{\text{LR}}} \quad (\forall w \in W)$$

$V(U(\mathfrak{g})/I_w)$  の既約性は, ほぼ Borho にあり予想 ±

た。また [BoB1] で case by case の証明が与えられ、その後上のより統一的証明を得られた。尚 Joseph [J4] は Prop. 1.4 を用い、BII の方法により Prop. 2.6 を示した。

また Prop. 0.2, 2.5 により次の従う。

Lemma 2.7 
$$V(L_w) = \bigcup_{y \in Z(w)} Y^r(y) = \bigcup_{\substack{y \in Z(w) \\ O_y^{pr} = O_w^{LP}}} Y^r(y)$$

2.4  $Z = \bigcup_{w \in W} Z_w$  ( $Z_w = \overline{V_{D_w}^+(X \times X)}$ ) は純次元  $2d$  を持つ ( $d = \dim X$ )。[KL2] により  $H_{4d}(Z)$  には  $W \times W$ -加群の構造が与えられる。  $W \times W$ -加群として  $H_{4d}(Z) \xrightarrow{f} \mathbb{C}[W]$  が  $f([Z_e]) = e$  により定まる。  $f([Z_w]) = b(w)$  とおくと、  $\{b(w) \mid w \in W\}$  は  $\mathbb{C}[W]$  の基底になる。

Lemma 2.8 ([KL2])  $s \in S, w \in W$  とする。

(i)  $sw < w$  ならば  $sb(w) = -b(w)$

(ii)  $sw > w$  ならば  $sb(w) = b(w) + b(sw) + \sum_{sy < y < sw} \delta_s(y, w) b(y)$ ,

ここで  $\delta_s(y, w)$  はある非負整数である。

$\mathbb{C}[W]$  の部分空間であって  $\{b(w) \mid w \in W\}$  のある部分集合により張られるものを  $b$ -基底型部分空間と呼ぶ。 §1.5 の議論で  $a$ -基底型部分空間の代わりに  $b$ -基底型部分空間を用いる事により、  $\overline{V}_w^+, \overline{\Sigma}, \sim, V_w^+, \mathcal{C}_w^+, \dots, \mathcal{C}_w^{LP}$  に対応するものが定義される。これを  $\overline{V}_w^0, \overline{\Sigma}, \sim, V_w^0, \mathcal{C}_w^0, \dots, \mathcal{C}_w^{pr}$  とする。

Lemma 2.9 ([KL2])  $x \in \mathcal{O} \in \text{Nilp}$  とするとし,

$\bigoplus_{\mathcal{O}_x^{\text{gr}} \subset \mathcal{O}} \mathbb{C} b(w)$  ( $\subset \mathbb{C}[W]$ ) は  $W \times W$ -不変で,  $W \times W$ -加群として

$$\left( \bigoplus_{\mathcal{O}_x^{\text{gr}} \subset \mathcal{O}} \mathbb{C} b(w) \right) / \left( \bigoplus_{\mathcal{O}_x^{\text{gr}} \subset \mathcal{O}} \mathbb{C} b(w) \right) \cong (H_{2d_0}(\mathcal{O}_x) \oplus H_{2d_0}(\mathcal{O}_x))^{A(\mathcal{O}_x)} \\ \cong \bigoplus_{\beta \in \beta_0} (\tau_{(\mathcal{O}, \beta)} \oplus \tau_{(\mathcal{O}, \beta)}) \quad \blacksquare$$

Lemma 2.9 と同様の証明で次がわかる。

Lemma 2.10  $\gamma$  が軌道的多様体ならば,  $\bigoplus_{\gamma^p(w) \subset \gamma} \mathbb{C} b(w)$

(resp.  $\bigoplus_{\gamma^r(w) \subset \gamma} \mathbb{C} b(w)$ ) は  $W$  の左作用 (resp. 右作用) で不変である。

特に  $w \approx_{\mathbb{Z}} y$  (resp.  $w \approx_{\mathbb{Z}} y$ ) ならば  $\gamma^p(w) \supset \gamma^p(y)$

(resp.  $\gamma^r(w) \supset \gamma^r(y)$ ) である。  $\blacksquare$

次の Lemma の成立の可能性は Joseph により筆者に指摘された。証明は appendix に参照。

Lemma 2.11

i)  $w \approx_{\mathbb{Z}} y \iff \gamma^p(w) = \gamma^p(y)$

ii)  $w \approx_{\mathbb{Z}} y \iff \gamma^r(w) = \gamma^r(y)$

iii)  $w \approx_{\mathbb{Z}} y \iff \mathcal{O}_w^{\text{gr}} = \mathcal{O}_y^{\text{gr}} \quad \blacksquare$

2.5  $X \times X \times X \xrightarrow{P_{ij}} X \times X$  は (i, j) 成分への射影とする。

$K(\mathcal{N})$  上の積を

$$[\eta_1] \cdot [\eta_2] = \sum_i (-1)^i [H^i(\bigcup_{\mathcal{O}_{X \times X \times X}} (P_{12}^* \eta_1) \otimes (P_{23}^* \eta_2))] \\ (\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{N})$$

により与えられると,  $K(\mathcal{N})$  は  $\mathbb{Z}$  上の algebra になり,  $\mathbb{Z}$ -algebra

と  $\mathbb{C}$  の同型  $K(Y) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[W]$  が  $[m_w] \leftrightarrow w$  により定まる ([LV]). 特に  $K(Y)$  は  $W \times W$ -加群になる。

Prop. 2.12 ([KT], [T2])

$$K(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{Ch}} H_{4d}(Z) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C}[Z_w]$$

は  $W \times W$ -加群として  $\mathbb{C}$  の同型対象である。

$$\text{Ch}(me) = [Ze] \text{ なる } a \text{ で, 24 は}$$

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{\text{Ch}} & H_{4d}(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \text{f} \\ \mathbb{Z}[W] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[W] \end{array}$$

が可換である事と同値である。さらに 24 は次とも同値。

Lemma 2.13  $a(w) = \sum_{y \in W} m(y, w) b(y)$

### §3. 具体例

#### 3.1 $A_n$

次の予想 3.1 2.11 ([KT], [BoB2]).

Conjecture 3.1  $G$  が  $A_n$  型なる任意の  $w \in W$  に対して  $\text{Ch}(L_w) = \overline{T_{X,w}^+ X}$ 。すなわち  $\Sigma(w) = \{w\}$ 。

Conjecture 3.2  $G$  が  $A_n$  型なる任意の  $w \in W$  に対して  $V(L_w) = Y(w)$ 。

Conjecture 3.1 から Conjecture 3.2 が従う事は明らか。  
また Conjecture 3.1 は [K12] 中のある予想と同値である事が

Lemma 2.13 からわかる。上の予想は  $m \leq 5$  で確かめられている。

[3.2]  $V(L_m)$  for  $C_2, C_3$

$$T_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_m(\mathbb{C}), \quad J_m = \begin{bmatrix} 0 & T_m \\ -T_m & 0 \end{bmatrix} \in M_{2m}(\mathbb{C})$$

$$\mathfrak{g} = \{x \in M_{2m}(\mathbb{C}) \mid {}^t x J_m + J_m x = 0\}$$

$$\mathfrak{b} = \{\mathfrak{g} \text{ に含まれる } \pm \text{ 対角行列} \} \quad \mathfrak{m}^+ = \{x \in \mathfrak{b} \mid \text{対角成分が全て } 0\}$$

とあると、 $\mathfrak{g}$  は  $C_m$  型の単純 Lie 環、 $\mathfrak{b}$  は  $\mathfrak{g}$  の Borel 部分環、 $\mathfrak{m}^+$  は  $\mathfrak{b}$  に対応する Borel 部分環の unipotent radical の Lie 環である。また Weyl 群  $W$  は  $2m$  個の文字  $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  の置換  $w$  で  $w(i) = -w(i)$  ( $\forall i$ ) を満たすものの全体と同一視される。  $w(i) = a_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) のとき  $w = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  と書く。

$$s_1 = (-1, 2, 3, \dots, m), \quad s_2 = (2, 1, 3, 4, \dots, m), \quad \dots, \quad s_m = (1, 2, \dots, m-2, m, m-1)$$

とあると  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  が単純鏡影全体になる。

自然数  $m$  の分割の集合を  $P_m$  と書く。すなわち  $P_m =$

$$\{(1^{m_1} 2^{m_2} \dots m^{m_m}) \mid \sum_{i=1}^m i m_i = m\}.$$

また  $P_{2m}^c = \{(1^{m_1} 2^{m_2} \dots) \in P_{2m} \mid$

$i$  が奇数ならば  $m_i$  は偶数  $\}$  とおく。  $\alpha = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots) \in P_m$  に対して、

$M_m(\mathbb{C})$  中の巾零行列であってその Jordan 標準形における  $i$  次 Jordan block の数が  $m_i$  個であるようなものの全体を  $C_\alpha$  と書く。

よく知られているように、 $\alpha \in P_{2m}^c$  に対して  $C_\alpha \cap \mathfrak{g}$  が空でない

ための条件は、 $\alpha \in P_{2m}^c$  とある事である。また  $\alpha \in P_{2m}^c$  に対して

$C_\alpha = C_\alpha \cap \mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{g}$  中の一つの巾零共役類をなす。  $\alpha \geq \beta$

場合  $\text{Nil}_p \simeq P_{2m}^C$ 。また  $\sigma \in P_{2m}^C$  に対し  $\overline{O_\sigma} = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{g}$  が知られている。よって  $\overline{O_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \overline{O_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+ = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+$ 。  $\sigma \in P_m$  に対し、  $M_m(\mathbb{C})$  上の多項式関数の族  $\{f_i^\sigma \mid i \in I_\sigma\}$  であって  $\overline{C_\sigma} = \{x \in M_m(\mathbb{C}) \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$  なるものが、[T3]で具体的に与えられている。よって  $\sigma \in P_{2m}^C$  のとき、  $\overline{O_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \{x \in \mathfrak{m}^+ \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$  となる。この事を用いて  $C_2, C_3$  のとき軌道的多様体を具体的に計算すると次のとおり。  $\text{Nil}_p$  と  $P_{2m}^C$  ( $m=2,3$ ) と同一視し、  $(1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$  に対応する巾零共役類に付随する軌道的多様体を  $(1^{m_1} 2^{m_2} \dots)_1, (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)_2, \dots$  により表わす。

ci)  $C_2$

$$\text{Nil}_p = \{(4), (2^2), (1^2 2), (1^4)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & a & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(4)_1 = \mathfrak{m}^+$     •  $(2^2)_1 = \{a=0\}$ ,  $(2^2)_2 = \{d=0\}$
- $(1^2 2)_1 = \{a=0, c^2 - bd = 0\}$     •  $(1^4)_1 = \{0\}$

cii)  $C_3$

$$\text{Nil}_p = \{(6), (24), (1^4 2), (3^2), (2^3), (1^2 2^2), (1^4 2), (1^6)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & b & f & e & d \\ 0 & 0 & c & h & g & e \\ 0 & 0 & 0 & k & k & f \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mid a, \dots, k \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(6)_1 = m^+$
- $(24)_1 = \{a=0\}$ ,  $(24)_2 = \{c=0\}$ ,  $(24)_3 = \{e=0\}$
- $(1^24)_1 = \left\{ a=0, \det \begin{bmatrix} b & f & e & d \\ c & h & g & e \\ 0 & k & h & f \\ 0 & 0 & -c & -b \end{bmatrix} = 0 \right\}$ ,  $(1^24)_2 = \left\{ \begin{array}{l} c=0 \\ h^2 - gk = 0 \end{array} \right\}$
- $(3^2)_1 = \{c=0, a^2g + 2abk + b^2e = 0\}$ ,  $(3^2)_2 = \{a=e=0\}$   
 $(3^2)_3 = \{e=0, ag + 2bk - 2cf = 0\}$
- $(2^3)_1 = \{a=b=c=0\}$ ,  $(2^3)_2 = \{a=e=0, bk - cf = 0\}$   
 $(2^3)_3 = \{c=0, h^2 - gk = 0, ag + bk = 0, ah + be = 0\}$
- $(1^22^2)_1 = \{a=b=c=0, f^2g + h^2d + e^2k - gkd - 2chf = 0\}$   
 $(1^22^2)_2 = \{c=k=h=g=0\}$   
 $(1^22^2)_3 = \left\{ \begin{array}{l} a=e=0, bk - cf = 0, f^2g + h^2d - 2chf = 0 \\ b^2g + c^2d - 2bce = 0, bgf + chd - cef - beh = 0 \end{array} \right\}$
- $(1^42)_1 = \left\{ \begin{array}{l} a=b=c=0, fg - eh = fh - ke = fe - kd = 0 \\ f^2 - kd = e^2 - gd = h^2 - gk = 0 \end{array} \right\}$
- $(1^6)_1 = \{0\}$

軌道的多様体の 包含関係は表1, 表2 を参照する。

$Y^l(w)$  (resp.  $Y^r(w)$ ) は  $m^+ \cap w^- m^+$  (resp.  $m^+ \cap w^- m^+$ ) を含む最小の軌道的多様体であり簡単に計算できる(表8, 表10)。

次に  $w$  の  $\bar{w}$  cell, 両側 cell は次の通り。

ci)  $C_2$   $s = s_1$ ,  $t = s_2$  とおく。 $C_1 = \{e\}$ ,  $C_{21} = \{t, ts, tst\}$   
 $C_{22} = \{s, st, sts\}$ ,  $C_3 = \{stst\}$  の4つの cell であり、 $C_1$ ,

$C_2 = C_{21} \cup C_{22}$ ,  $C_3$  の 3 つの両側 cell である。

ii)  $C_3$  表 10 の番号 57 11 を用いる。

- $C_1 = \{1\}$
- $C_{21} = \{5, 9, 11, 33, 34\}$ ,  $C_{22} = \{3, 13, 17, 18, 25\}$ ,  $C_{23} = \{2, 19, 20, 29\}$
- $C_{31} = \{26, 43, 44\}$ ,  $C_{32} = \{10, 35, 36\}$ ,  $C_{33} = \{30, 47, 48\}$
- $C_{41} = \{27, 41, 42\}$ ,  $C_{42} = \{31, 45, 46\}$ ,  $C_{43} = \{15, 37, 38\}$
- $C_{51} = \{7, 21, 22, 28\}$ ,  $C_{52} = \{4, 14, 16, 39, 40\}$ ,  $C_{53} = \{6, 12, 23, 24, 32\}$
- $C_6 = \{8\}$

の 4 つの両側 cell であり,  $C_1$ ,  $C_2 = C_{21} \cup C_{22} \cup C_{23}$ ,  $C_3 = C_{31} \cup C_{32} \cup C_{33}$ ,  $C_4 = C_{41} \cup C_{42} \cup C_{43}$ ,  $C_5 = C_{51} \cup C_{52} \cup C_{53}$ ,  $C_6$  の 6 つの両側 cell である。

$\overline{w}$  の導出 cell の集合  $I$  の順序関係は表 5, 表 7 のとおり。

以  $I$  の準順序  $\alpha$  をとて  $V(L_w)$  を決定する。

ii)  $C_2$   $w = e, s, t, stst$  のとき  $\overline{X}_w$  は non-singular (実際  $= 4$  は  $W$  の parabolic 型部分群の最長元である。)。おと  $= \alpha$  のとき  $V(L_w) = Y^r(w)$  (Prop 1.1, Lemma 2.7)。Cor 1.5 にあ)

$$V(L_w) = \begin{cases} (4)_1 & w \in C_1 \\ (2^2)_1 & w \in C_{21} \\ (2^2)_2 & w \in C_{22} \\ (1^4)_1 & w \in C_3 \end{cases}$$

ii)  $C_3$   $w = 1, 9, 17, 2, 10, 41, 4, 8$  は parabolic 型部分群の最長元  $\alpha$  として  $V(L_w) = Y^r(w)$ 。おと  $V(L_w) = (6)_1$  for  $w \in C_1$ ,

$V(L_W) = (24)_1$  for  $W \in C_{21}$ ,  $V(L_W) = (24)_2$  for  $W \in C_{22}$ ,  $V(L_W) =$   
 $(24)_3$  for  $W \in C_{23}$ ,  $V(L_W) = (3^2)_2$  for  $W \in C_{32}$ ,  $V(L_W) = (2^3)_1$  for  
 $W \in C_{41}$ ,  $V(L_W) = (1^2 2^2)_2$  for  $W \in C_{52}$ ,  $V(L_W) = (1^6)_1$  for  $W \in C_6$   
 である。また  $V(L_W) \supset Y^r(W)$  である。  $V(L_W) \supset (3^2)_1$   
 for  $W \in C_{31}$ ,  $V(L_W) \supset (3^2)_3$  for  $W \in C_{33}$ ,  $V(L_W) \supset (2^3)_2$  for  
 $W \in C_{42}$ ,  $V(L_W) \supset (2^3)_3$  for  $W \in C_{43}$ ,  $V(L_W) \supset (1^2 2^2)_1$  for  $W \in$   
 $C_{51}$ ,  $V(L_W) \supset (1^2 2^2)_3$  for  $W \in C_{53}$  である。  $W \in C_{31}$  のとき  
 $(3^2)_1$  は  $V(L_W)$  の既約成分であり、 $\in$  の他の既約成分がある  
 とする。  $W \in C_{31}$  は  $(3^2)_2$  または  $(3^2)_3$  である。  $C_{22} \cong C_{31}$  である。  
 $W \in C_{31}$ ,  $Y \in C_{22}$  とすると  $V(L_W) \subset V(L_Y) = (24)_2$ 。 表 2 により  
 $V(L_W) = (3^2)_3$  for  $W \in C_{31}$  がわかる。 以下同様の論法で  $C_{11}$   
 である。  $C_{42}$  と  $C_{32}$  に対して  $V(L_W) = (2^3)_2$  for  $W \in C_{42}$ 。  $C_{51}$  と  
 $C_{41}$  に対して  $V(L_W) = (1^2 2^2)_1$  for  $W \in C_{51}$ 。  $C_{52}$  と  $C_{31}$ ,  $C_{52}$   
 と  $C_{23}$  に対して  $V(L_W) = (1^2 2^2)_2$  for  $W \in C_{52}$ 。  $C_{53}$  と  $C_{42}$  対  
 して  $V(L_W) = (1^2 2^2)_3$  for  $W \in C_{53}$ 。  $C_{43}$  と  $C_{31}$ ,  $C_{43}$  と  $C_{51}$  対  
 して  $V(L_W) = (2^3)_3 \cup (2^3)_1$ 。  $C_{33}$  と  $C_{23}$  に対して  $V(L_W) =$   
 $(3^2)_3$ 。 または  $V(L_W) = (3^2)_3 \cup (3^2)_2$  for  $W \in C_{33}$ 。  $W = 30 \in C_{33}$  と  
 する。  $V(L_W) = (3^2)_3 \cup (3^2)_2$  と仮定すると、ある  $Y \in \Sigma(W)$  に対し  
 $(\supset Y^r(Y) = (3^2)_2$  と仮定すればよい。  $Y \in W$  で  $Y \leq W$  かつ  
 $Y^r(Y) = (3^2)_2$  と仮定する。  $Y = 10$  だけである。  $C = 3$  である。  
 計算により  $X_Y$  は  $\overline{X_W}$  中で non-singular である事がわかる。

( $Y=10, W=30$ )。  $\delta \supset \tau$   $Y=10 \notin \tau(W)$ 。従って  $\tau \in \tau(L_W) = (3^2)$  for  $W \in C_{33}$  以上で全ての  $W \in W$  に対し  $\tau \in \tau(L_W)$  が決定された。

(表 10)

**3.3**  $\tau(L_W)$  for  $B_3$

$K = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ 1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{g} = \{x \in M_4(\mathbb{C}) \mid xK + Kx = 0\}$  は  $B_3$  型の

単純 Lie 環で  $\mathfrak{b} = \{\mathfrak{g}$  に含まれる上三角行列  $\}$  は  $\mathfrak{g}$  の Borel 部分環, また

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b & g & e & d & 0 \\ 0 & 0 & c & f & 5 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -R & -R & -g \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, \dots, R \in \mathbb{C} \right\}$$

である。Weyl 群  $W$  は  $C_3$  型の Weyl 群と同じで,  $\tau$  cell 両側 cell も  $C_3$  型のと看做してよい。巾零共役類の集合  $\text{Nilp}$  は,  $7$  の分割であって even part の数が偶数であるものの全許と同一視してよい。すなわち  $\text{Nilp} = \{(7), (1^2 5), (1^3 3^2), (2^2 3), (1^4 3), (1^3 2^2), (1^7)\}$ 。軌道的多様体は次のとおり。

- $(7)_1 = \mathfrak{m}^+$
- $(1^2 5)_1 = \{a=0\}$ ,  $(1^2 5)_2 = \{c=0\}$ ,  $(1^2 5)_3 = \{R=0\}$
- $(1^3 3^2)_1 = \{a=R=0\}$ ,  $(1^3 3^2)_2 = \{c=0, aR+bR=0\}$ ,  $(1^3 3^2)_3 = \{R=0, R^2+2cf=0\}$
- $(2^2 3)_1 = \{a=R=0, (bf-ce)^2 + 2(5g-eR)(bR-cg)=0\}$

$$(2^3 3)_2 = \left\{ \begin{array}{l} c=0, \quad 2R^2d + 2fRg - 2eRk - af^2 = 0 \\ aR + bR = 0, \quad 2Rfg + 2Rkd - 2eR^2 + bf^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(2^3 3)_3 = \{a=b=c=0\}$$

$$\bullet (1^4 3)_1 = \{a=R=0, \quad bR - gc = bf - ec = gf - eR = 0\}$$

$$(1^4 3)_2 = \{c=R=k=f=0\}$$

$$(1^4 3)_3 = \{a=b=c=0, \quad eR - dR - gf = 0\}$$

$$\bullet (1^3 2^2)_1 = \left\{ \begin{array}{l} a=R=0, \quad bR - gc = bf - ec = gf - eR = 0 \\ Rg + 2bf = g^2 + 2be = R^2 + 2cf = 0 \end{array} \right\}$$

$$(1^3 2^2)_2 = \{c=R=k=f=0, \quad g^2 + 2ad + 2be = 0\} \quad \bullet (1^7)_1 = \{0\}$$

以下  $C_3$  型 のときと同様に  $V(L_M)$  の計算をする (表 10)。

### 3.4 $V(L_M)$ for $G_2$

$\mathfrak{g}$  は  $G_2$  型 の単純 Lie 環 とする。巾零共役類に対応する weighted Dynkin diagram は  $\overset{a}{\circ} \rightleftharpoons \overset{b}{\circ}$  ( $a, b = 0$  or  $1$  or  $2$ ) のとき,  $\circ$  の巾零共役類を  $(a \ b)$  で表す。このとき  $\text{Nilp} = \{(2,2), (2,0), (0,1), (1,0), (0,0)\}$  である。Cartan 部分環  $\mathfrak{h}$  をとり  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の root 系を  $\Delta$  とする。正 root 系  $\Delta^+$  をとり, 単純 root を  $\alpha, \beta$  とする (==  $\alpha$  は long root,  $\beta$  は short root)。  $\delta \in \Delta^+$  に対応する root 空間を  $\mathfrak{g}_\delta$ ,  $\mathfrak{g}_\delta$  に対応する  $G$  の部分群を  $U_\delta$  とする。また  $\mathfrak{m}^+ = \bigoplus_{\delta \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\delta$  に対応する  $G$  の部分群を  $U$  とする。このとき軌道的多様体は次のとおり。

- $(22)_1 = m^+$
- $(20)_1 = \bigoplus_{\delta \in \Delta^+ - \beta} \mathfrak{g}_\delta$ ,  $(20)_2 = \bigoplus_{\delta \in \Delta^+ - \beta} \mathfrak{g}_\delta$
- $(01)_1 = (\text{Ad}(U_\beta)(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\alpha+\beta})) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$ ,  $(01)_2 = \text{Ad}(U)\mathfrak{g}_\beta$
- $(10)_1 = (\text{Ad}(U_\beta)\mathfrak{g}_\alpha) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$
- $(00)_1 = \{0\}$

$\alpha$  に関する鏡影  $\varepsilon$ ,  $\beta$  に関する鏡影  $\varepsilon$  とすると, 右 cell は  $C_1 = \{e\}$ ,  $C_2 = \{t, ts, tst, tsts, tstst\}$ ,  $C_{22} = \{s, st, sts, stst, ststs\}$ ,  $C_3 = \{ststst\}$  の 4 個, 両側 cell は  $C_1$ ,  $C_2 = C_2 \cup C_{22}$ ,  $C_3$  の 3 個である。

$C_2$  のとき と全く同様に  $(2 \text{ } \mathcal{V}(L_N))$  が計算される (表 9)。

### 3.5 $\underline{\text{Ch}}(L_N)$

ここでは  $G_2$  型のときの計算のみを述べて,  $C_2, B_3, C_3$  のときは省略する。結果は表 8, 10 にまとめる。以下  $\mathcal{V}$  は  $G_2$  型とある。

$\underline{\text{Ch}}(L_N) = \sum_{y \in W} m(y, w) [\overline{TX_N X}]$  とするとき  $Q(w) = \sum_{y \in W} m(y, w) b(y)$  であつた。また  $Q(w) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) + \ell(y)} y$  である。 $w = e, s, t, ststst$  は parabolic 型部分群の最長元なので,  $\overline{X_N}$  は non-singular である。また  $\overline{X_{sts}}$  も non-singular である事がわかる (筆者は自分で計算して知らすやて 11 節の事である)。よって Lemma 1.1 により  $Q(w) = b(w)$  for  $w = e, s, t, sts, ststst$  となる。さらに

Lemma 1.1 と Lemma 1.2 に對し  $a(st) = b(st)$ ,  $a(ts) = b(ts)$

とある。 Lemma 1.2, 2.7 に對し

$$a(tst) = b(tst) + \alpha_1 b(t) \quad \alpha_1 > 0$$

$$a(stst) = b(stst) + \alpha_2 b(st) \quad \alpha_2 > 0$$

$$a(tstst) = b(tstst) + \alpha_3 b(ts)$$

$$a(ststst) = b(ststst) + \alpha_3 b(sts) + \alpha_4 b(s) \quad \begin{cases} \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq 0 \\ \alpha_3 > 0 \text{ or } \alpha_4 > 0 \end{cases}$$

$$a(tststst) = b(tststst) + \alpha_5 b(tst) + \alpha_6 b(t) \quad \alpha_5 \geq 0, \alpha_6 > 0$$

が成り立つ。 Lemma 2.8 と Lemma 2.10 に對し,  $u = \text{Sort } t$ ,  $w \in W$

$uw > w$  とする

$$u b(w) \in b(w) + b(uw) + \sum_{\substack{uy < y < uw \\ Y^2(y) \subset Y^2(w)}} \alpha_y b(y)$$

とある。  $\alpha > 0$  と表 4 に對し  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_4 = 1$ ,  $\alpha_5 = 1$ ,

$\alpha_6 = 1$  が成り立つ。

**3.6** 表

表 1.1 including relation of orbital varieties for  $C_2$

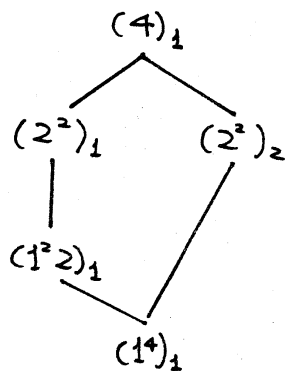


表 1.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for  $C_2$

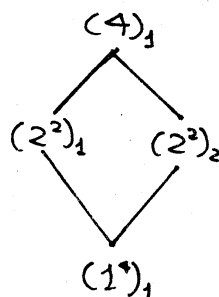


表 2.1 including relation of orbital varieties for  $C_3$

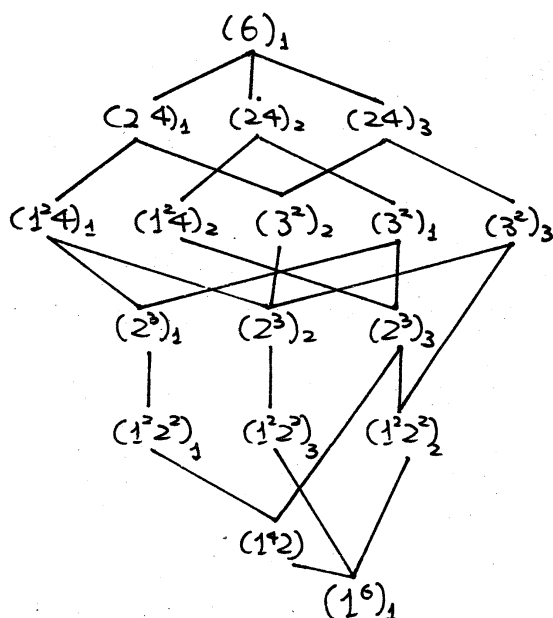


表 2.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for  $C_3$

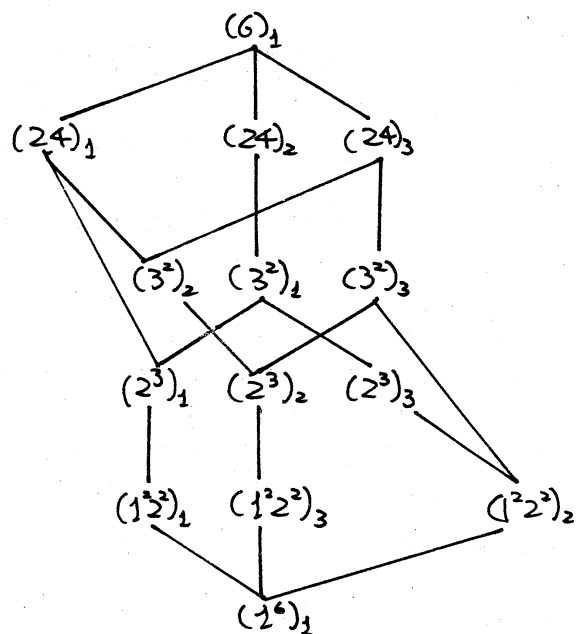


表 3.1 including relation of orbital varieties for  $B_3$

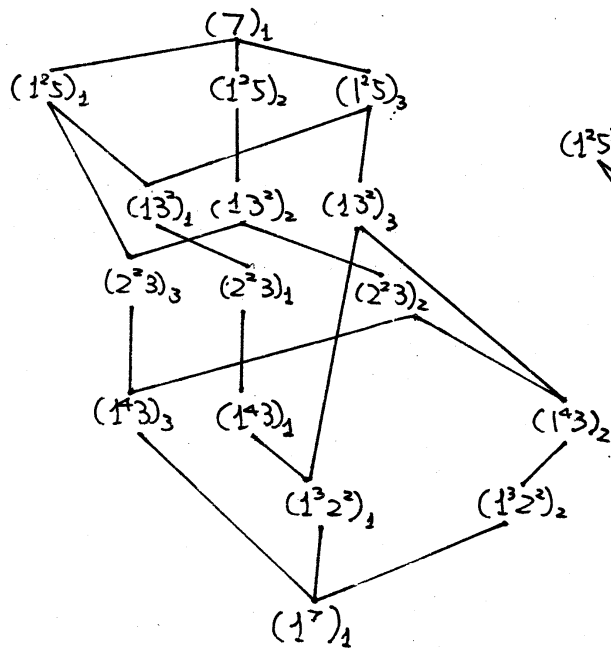


表 3.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for  $B_3$

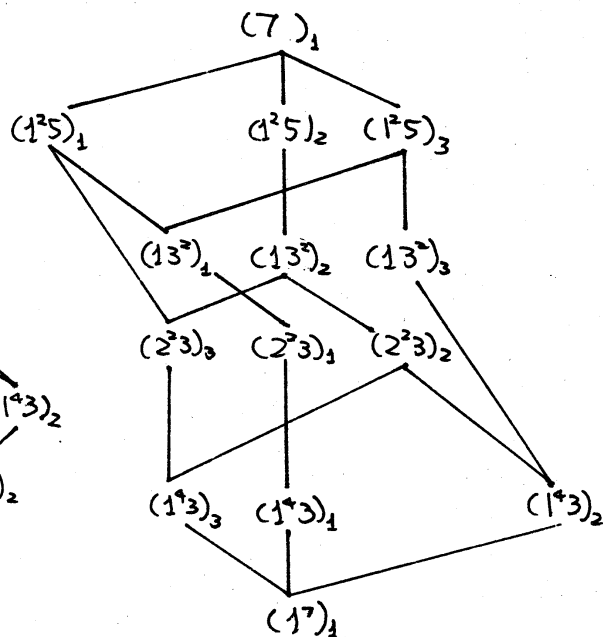


表 4.1 including relation of  
orbital varieties for  $G_2$

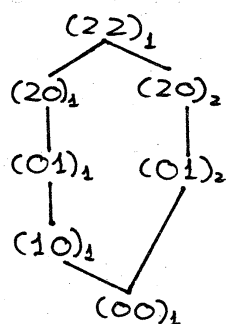


表 4.2 including relation of  
orbital varieties associated to special  
nilpotent orbits for  $G_2$

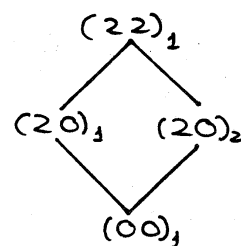


表 5 order relation of  
right cells for  $C_2$

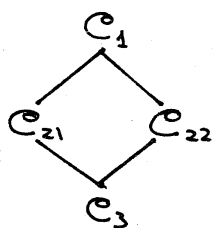


表 6 order relation of  
right cells for  $G_2$

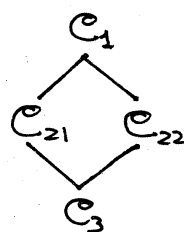


表 7 order relation of  
right cells for  $B_3, C_3$

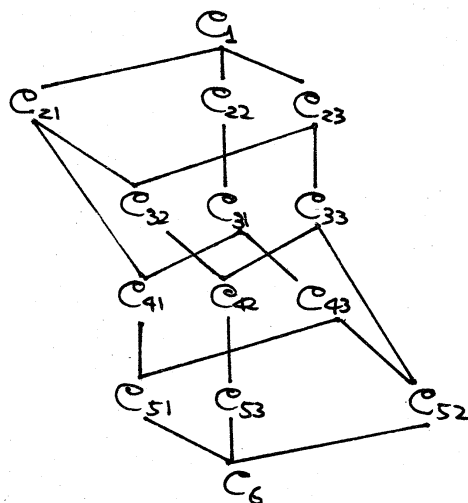


表 8.  $C_2$ 

| $w$    | $Y^p(w)$    | $Y^r(w)$    | right cell | $V(L_w)$  | $a(w)$          |
|--------|-------------|-------------|------------|-----------|-----------------|
| $e$    | $(4)_1$     | $(4)_1$     | $C_1$      | $(4)_1$   | $b(e)$          |
| $s$    | $(2^2)_2$   | $(2^2)_2$   | $C_{22}$   | $(2^2)_2$ | $b(s)$          |
| $t$    | $(2^2)_1$   | $(2^2)_1$   | $C_{21}$   | $(2^2)_1$ | $b(t)$          |
| $st$   | $(2^2)_1$   | $(2^2)_2$   | $C_{22}$   | $(2^2)_2$ | $b(st)$         |
| $ts$   | $(2^2)_2$   | $(2^2)_1$   | $C_{21}$   | $(2^2)_1$ | $b(ts)$         |
| $sts$  | $(2^2)_2$   | $(2^2)_2$   | $C_{22}$   | $(2^2)_2$ | $b(sts)$        |
| $tst$  | $(1^2 2)_1$ | $(1^2 2)_1$ | $C_{21}$   | $(2^2)_1$ | $b(tst) + b(t)$ |
| $stst$ | $(1^4)_1$   | $(1^4)_1$   | $C_3$      | $(1^4)_1$ | $b(stst)$       |

表 9.  $G_2$ 

| $w$      | $Y^p(w)$ | $Y^r(w)$ | right cell | $V(L_w)$ | $a(w)$                     |
|----------|----------|----------|------------|----------|----------------------------|
| $e$      | $(22)_1$ | $(22)_1$ | $C_1$      | $(22)_1$ | $b(e)$                     |
| $s$      | $(20)_2$ | $(20)_2$ | $C_{22}$   | $(20)_2$ | $b(s)$                     |
| $t$      | $(20)_1$ | $(20)_1$ | $C_{21}$   | $(20)_1$ | $b(t)$                     |
| $st$     | $(20)_1$ | $(20)_2$ | $C_{22}$   | $(20)_2$ | $b(st)$                    |
| $ts$     | $(20)_2$ | $(20)_1$ | $C_{21}$   | $(20)_1$ | $b(ts)$                    |
| $sts$    | $(20)_2$ | $(20)_2$ | $C_{22}$   | $(20)_2$ | $b(sts)$                   |
| $tst$    | $(01)_1$ | $(01)_1$ | $C_{21}$   | $(20)_1$ | $b(tst) + 2b(t)$           |
| $stst$   | $(01)_1$ | $(01)_2$ | $C_{22}$   | $(20)_2$ | $b(stst) + b(st)$          |
| $tsts$   | $(01)_2$ | $(01)_1$ | $C_{21}$   | $(20)_1$ | $b(tsts) + b(ts)$          |
| $ststs$  | $(01)_2$ | $(01)_2$ | $C_{22}$   | $(20)_2$ | $b(ststs) + b(s)$          |
| $tstst$  | $(10)_1$ | $(10)_1$ | $C_{21}$   | $(20)_1$ | $b(tstst) + b(tst) + b(t)$ |
| $ststst$ | $(00)_1$ | $(00)_1$ | $C_3$      | $(00)_1$ | $b(ststst)$                |

表 10.  $C_2, B_3$ 

| No | N3         | reduced<br>expression | N <sup>3-right</sup><br>cell | $C_3$              |                                 |                                 | $B_3$                           |                                 |                |
|----|------------|-----------------------|------------------------------|--------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------|
|    |            |                       |                              | $\gamma^{(u)}$     | $\gamma^{(u)}$                  | $\gamma^{(u)}$                  | $\gamma^{(u)}$                  | $\gamma^{(u)}$                  | $\gamma^{(u)}$ |
| 1  | (1 2 3)    |                       | 1                            | $\mathcal{C}_1$    | (6) <sub>1</sub>                | (6) <sub>1</sub>                | (7) <sub>1</sub>                | (7) <sub>1</sub>                | b(1)           |
| 2  | (-1 2 3)   | 1                     | 2                            | $\mathcal{C}_2$    | (24) <sub>3</sub>               | (24) <sub>3</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>3</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>3</sub> | b(2)           |
| 3  | (1 -2 3)   | 212                   | 3                            | $\mathcal{C}_3$    | (1 <sup>4</sup> ) <sub>2</sub>  | (24) <sub>2</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | b(3)           |
| 4  | (-1 -2 3)  | 2121                  | 4                            | $\mathcal{C}_4$    | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>2</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>2</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>2</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>2</sub> | b(4)           |
| 5  | (1 2 -3)   | 32123                 | 5                            | $\mathcal{C}_5$    | (1 <sup>4</sup> ) <sub>1</sub>  | (24) <sub>1</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>1</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>1</sub> | b(5)           |
| 6  | (-1 2 -3)  | 321213                | 6                            | $\mathcal{C}_6$    | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>3</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>3</sub> | b(6)           |
| 7  | (1 -2 -3)  | 32123212              | 7                            | $\mathcal{C}_7$    | (1 <sup>4</sup> 2) <sub>1</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>1</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>1</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>1</sub> | b(7)           |
| 8  | (-1 -2 -3) | 132123212             | 8                            | $\mathcal{C}_8$    | (1 <sup>6</sup> ) <sub>1</sub>  | (1 <sup>6</sup> ) <sub>1</sub>  | (1 <sup>7</sup> ) <sub>1</sub>  | (1 <sup>7</sup> ) <sub>1</sub>  | b(8)           |
| 9  | (1 3 2)    | 3                     | 9                            | $\mathcal{C}_9$    | (24) <sub>1</sub>               | (24) <sub>1</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>1</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>1</sub> | b(9)           |
| 10 | (-1 3 2)   | 13                    | 10                           | $\mathcal{C}_{10}$ | (3 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>  | (3 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>  | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>2</sub> | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>2</sub> | b(10)          |
| 11 | (1 -3 2)   | 3212                  | 11                           | $\mathcal{C}_{11}$ | (1 <sup>4</sup> ) <sub>2</sub>  | (24) <sub>2</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | b(11)          |
| 12 | (-1 -3 2)  | 32121                 | 12                           | $\mathcal{C}_{12}$ | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>3</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>3</sub> | b(12)          |
| 13 | (1 3 -2)   | 2123                  | 13                           | $\mathcal{C}_{13}$ | (1 <sup>4</sup> ) <sub>1</sub>  | (24) <sub>1</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>1</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>1</sub> | b(13)          |
| 14 | (-1 3 -2)  | 21213                 | 14                           | $\mathcal{C}_{14}$ | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>2</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>2</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>2</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>2</sub> | b(14)          |
| 15 | (1 -3 -2)  | 2123212               | 15                           | $\mathcal{C}_{15}$ | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>  | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>  | (2 <sup>3</sup> 3) <sub>3</sub> | (2 <sup>3</sup> 3) <sub>3</sub> | b(15)          |
| 16 | (-1 -3 -2) | 21232121              | 16                           | $\mathcal{C}_{16}$ | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>2</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>2</sub> | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>2</sub> | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>2</sub> | b(16) + b(4)   |
| 17 | (2 1 3)    | 2                     | 17                           | $\mathcal{C}_{17}$ | (24) <sub>2</sub>               | (24) <sub>2</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | b(17)          |
| 18 | (-2 1 3)   | 21                    | 18                           | $\mathcal{C}_{18}$ | (24) <sub>3</sub>               | (24) <sub>3</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>3</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>3</sub> | b(18)          |
| 19 | (2 -1 3)   | 12                    | 19                           | $\mathcal{C}_{19}$ | (24) <sub>2</sub>               | (24) <sub>2</sub>               | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | (1 <sup>5</sup> 5) <sub>2</sub> | b(19)          |
| 20 | (-2 -1 3)  | 121                   | 20                           | $\mathcal{C}_{20}$ | (24) <sub>3</sub>               | (24) <sub>3</sub>               | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>3</sub> | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>3</sub> | b(20) + b(2)   |
| 21 | (2 1 -3)   | 321323                | 21                           | $\mathcal{C}_{21}$ | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>1</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>1</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>1</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>1</sub> | b(21)          |
| 22 | (-2 1 -3)  | 3212321               | 22                           | $\mathcal{C}_{22}$ | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>3</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>3</sub> | b(22)          |
| 23 | (2 -1 -3)  | 3212132               | 23                           | $\mathcal{C}_{23}$ | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>1</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>1</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>1</sub> | (1 <sup>4</sup> 3) <sub>1</sub> | b(23)          |
| 24 | (-2 -1 -3) | 32123121              | 24                           | $\mathcal{C}_{24}$ | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>2</sup> 2) <sub>3</sub> | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>3</sub> | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>3</sub> | b(24) + b(6)   |

# 6. continued

| No | N          | Reduced expression | N <sup>right</sup> cell | C <sub>3</sub>                                |                                               |                | B <sub>3</sub>                                |                                               |                               |
|----|------------|--------------------|-------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------|
|    |            |                    |                         | $\gamma^{(w)}$                                | $\gamma^{(w)}$                                | $\gamma^{(w)}$ | $\gamma^{(w)}$                                | $\gamma^{(w)}$                                | $a(w)$                        |
| 25 | (2 3 1)    | 23                 | C <sub>22</sub>         | (24) <sub>1</sub>                             | (24) <sub>2</sub>                             |                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>1</sub>                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>2</sub>                | b(25)                         |
| 26 | (-2 3 1)   | 213                | C <sub>31</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>               | b(26)                         |
| 27 | (2 -3 1)   | 23212              | C <sub>41</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | b(27)                         |
| 28 | (-2 -3 1)  | 232121             | C <sub>51</sub>         | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub> | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub> |                | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>2</sub>               | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>3</sub>               | b(28)                         |
| 29 | (2 3 -1)   | 123                | C <sub>23</sub>         | (24) <sub>1</sub>                             | (24) <sub>2</sub>                             |                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>1</sub>                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>2</sub>                | b(29)                         |
| 30 | (-2 3 -1)  | 1213               | C <sub>33</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>               | b(30) + b(10)                 |
| 31 | (2 -3 -1)  | 123212             | C <sub>42</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | b(31)                         |
| 32 | (-2 -3 -1) | 1232121            | C <sub>53</sub>         | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub> | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub> |                | (1 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub> | (1 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub> | b(32) + b(12)                 |
| 33 | (3 1 2)    | 32                 | C <sub>31</sub>         | (24) <sub>1</sub>                             | (24) <sub>2</sub>                             |                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>1</sub>                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>2</sub>                | b(33)                         |
| 34 | (-3 1 2)   | 321                | C <sub>31</sub>         | (24) <sub>3</sub>                             | (24) <sub>1</sub>                             |                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>3</sub>                | (1 <sup>5</sup> ) <sub>1</sub>                | b(34)                         |
| 35 | (3 -1 2)   | 132                | C <sub>32</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>               | b(35)                         |
| 36 | (-3 -1 2)  | 3121               | C <sub>32</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>               | b(36) + b(10)                 |
| 37 | (3 1 -2)   | 21323              | C <sub>43</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                | b(37)                         |
| 38 | (-3 1 -2)  | 212321             | C <sub>43</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                | b(38)                         |
| 39 | (3 -1 -2)  | 212132             | C <sub>52</sub>         | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub> | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub> |                | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>1</sub>               | (1 <sup>3</sup> 3) <sub>2</sub>               | b(39)                         |
| 40 | (-3 -1 -2) | 2123121            | C <sub>52</sub>         | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub> | (1 <sup>2</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub> |                | (1 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub> | (1 <sup>3</sup> 2 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub> | b(40) + b(14)                 |
| 41 | (3 2 1)    | 323                | C <sub>41</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | b(41)                         |
| 42 | (-3 2 1)   | 2321               | C <sub>41</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | b(42)                         |
| 43 | (3 -2 1)   | 2132               | C <sub>31</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>               | b(43)                         |
| 44 | (-3 -2 1)  | 23121              | C <sub>31</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>2</sub>               | b(44) + b(26)                 |
| 45 | (3 2 -1)   | 1323               | C <sub>42</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>3</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | b(45)                         |
| 46 | (-3 2 -1)  | 12321              | C <sub>42</sub>         | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>2</sub>                |                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | (2 <sup>3</sup> ) <sub>1</sub>                | b(46)                         |
| 47 | (3 -2 -1)  | 12132              | C <sub>33</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>1</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>               | b(47) + b(35)                 |
| 48 | (-3 -2 -1) | 123121             | C <sub>33</sub>         | (3 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>                | (3 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>                |                | (13 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>               | (13 <sup>2</sup> ) <sub>3</sub>               | b(48) + b(35) + b(30) + b(10) |

### 34. 予想

[4.1] Borho-Brylinski [BoB2] は, primitive quotient の特性多様体  $\text{Ch}(\mathcal{O}(\mathcal{Q})/I_w)$  が常に既約であると予想した。Prop 1.4 により,  $\dim$  は  $V(L_w)$  が常に既約である事と同値である ([J3; 8.15] 参照)。特殊表現  $\text{Sp}(\mathcal{O}_w^{\text{LR}}) = \mathcal{O}(w)$  は 2 種類の基底  $\{\gamma_Y \mid Y \in \text{Irr}(\overline{\mathcal{O}_w^{\text{LR}} \cap \mathfrak{m}^+})\}$ ,  $\{\rho_Y \mid Y \in \mathcal{C}_w^{\text{LR}}/\sim\}$  を持つ (但し  $\rho_Y$  は定数倍を除いて決まる。) が, 上の Borho-Brylinski 予想は,  $\dim$  の基底が (定数倍を除いて) 一致する事とも同値である (Prop. 2.3, 2.4)。しかし §3 からわかるように  $\dim$  には反例がある。そこでこの修正案として次の予想を提出する。

Conjecture 4.1  $O \in \text{Nilp}_{\text{sp}}$ ,  $\mathcal{C} \in O$  に対応する  $\sim_{\text{LR}}$  の同値類とする ( $\mathcal{W}/\sim_{\text{LR}} \longleftrightarrow \text{Nilp}_{\text{sp}}$ , §2.3)。このとき  $\mathcal{C}/\sim_{\text{LR}}$  と  $\text{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$  の間の一対一対応 ( $w \mapsto Y_w$ ) 及び,  $\text{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$  上の順序関係  $>$  が存在して,

$$V(L_w) = Y_w \cup \tilde{Y}_w \quad (\forall w \in \mathcal{C}).$$

ここで  $\tilde{Y}_w$  は  $Y < \tilde{Y}_w$  とある  $Y \in \text{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$  の幾つかの合併集合である。』

この予想は  $A_n$  型では証明されている ([BoB2; §6.10])。

Conjecture 4.1 は特殊表現  $\text{Sp}(O)$  の 2 種類の基底の変換行列が上三角形になる事と同値である。また Conjecture 4.1

から Conjecture 0.5 が従う事も明かす。

**[4.2]**  $\hat{W} \xrightarrow{\Phi} \text{Nil}_{\text{sp}}$ ,  $\hat{W} \xrightarrow{\Psi} \text{Nil}_p$  を次の様に定義する。

$\tau \in \hat{W}$  に対して  $\tau \otimes \tau \in V_N^{\text{LP}}$  ならば  $\Phi(\tau) = O_N^{\text{LP}}$ ,  $\tau \otimes \tau \in V_N^{\text{or}}$  ならば

$\Psi(\tau) = O_N^{\text{or}}$ . 注意:  $\overline{O_N^{\text{or}}} \subset \overline{O_N^{\text{LP}}}$  に注意して置く。実際,

$$\overline{O_N^{\text{LP}}} = \overline{G \cdot V(L_W)} \supset \overline{G \cdot Y^r(W)} = \overline{O_N^{\text{or}}}.$$

**Prop. 4.2**  $O \in \text{Nil}_{\text{sp}}$  とする。次の条件が成立すれば,

Conjecture 4.1 は正しい。

$$(4.3) \quad \{\tau \in \hat{W} \mid \Phi(\tau) \subset \overline{O}\} = \{\tau \in \hat{W} \mid \Psi(\tau) \subset \overline{O}\}.$$

(証明)  $W \times W$ -加群として  $\sum_{O_N^{\text{LP}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} a(w) \cong \bigoplus_{\Phi(w) \subset \overline{O}} (\tau \otimes \tau)$ ,

$\sum_{O_N^{\text{or}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} b(w) \cong \bigoplus_{\Psi(w) \subset \overline{O}} (\tau \otimes \tau)$  である。よって右辺から  $\sum_{O_N^{\text{LP}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} a(w) = \sum_{O_N^{\text{or}} \subset \overline{O}} \mathbb{C} b(w)$ .

$a(w) \in b(w) + \sum_{Y \subset W} \mathbb{Z}_{\geq 0} b(Y)$  ならば  $O_N^{\text{LP}} \subset \overline{O} \iff O_N^{\text{or}} \subset \overline{O}$  がわかる。

一般に  $\overline{O_N^{\text{or}}} \subset \overline{O_N^{\text{LP}}}$  である。

$$(4.4) \quad O_N^{\text{or}} = O \text{ ならば } O_N^{\text{LP}} = O, \text{ 特に } Y^r(W) \in \text{Irr}(V(L_W)).$$

$\pm \in \text{Irr}(\overline{O \cap M^+})$  の部分集合の増大列

$$\emptyset = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset \text{Irr}(\overline{O \cap M^+})$$

を次のように帰納的に定義する。  $J_{r-1}$  まで定義されたとき,

$$J_r = \{Y^r(w) \mid O_N^{\text{or}} = O, V(L_W) \subset Y^r(w) \cup (\bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y)\}.$$

そこで次に示す。

$$(4.5) \quad J_{r-1} \subsetneq J \text{ ならば } J_{r-1} \subsetneq J_r$$

$J = \{w \in W \mid O_N^{\text{or}} = O, Y^r(w) \notin J_{r-1}\}$  は仮定により空集合

これは正しい。 Bruhat order に関する  $\delta$  の極小元  $w \in U$  とする。  
 $w = a$  とする。  $Y^r(w) \in J_r$  とする事を示せばよい。 Lemma 2.7 と  
 (4.4) より

$$V(L_w) = Y^r(w) \cup \left( \bigcup_{\substack{y \in \delta(w) - \delta(w) \\ O_y^r = 0}} Y^r(y) \right)$$

とある。 11 ま

$$V(L_w) \subset Y^r(w) \cup \left( \bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y \right)$$

と仮定すると、ある  $y < w$  が存在して  $O_y^r = 0$  かつ  $Y^r(y) \notin J_{r-1}$   
 となる  $y \in \delta$ 。 これは  $w$  の極小性に反する。 したがって

$$V(L_w) \subset Y^r(w) \cup \left( \bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y \right).$$

よって (4.5) が示すことができる。

$\text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)$  上の順序関係  $>$  は  $Y \in J_r - J_{r-1}$ ,  $Y' \in J_s - J_{s-1}$ ,  $r > s$   
 ならば  $Y > Y'$  とするようにより定める。 また各  $Y \in \text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)$  に対し  
 $w_Y \in \mathbb{C}$  を決えるようにする。  $Y \in J_r - J_{r-1}$  のとき

$$Y^r(w_Y) = Y, \quad V(L_{w_Y}) \subset Y \cup \left( \bigcup_{Y' \in J_{r-1}} Y' \right).$$

$\{w_Y \mid Y \in \text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)\}$  は  $\mathbb{C}/\sim$  の完全代表系である。 実際

$$Y \neq Y' \text{ ならば } V(L_{w_Y}) \neq V(L_{w_{Y'}}), \text{ したがって } w_Y \not\sim w_{Y'} \text{ (Cor. 1.5).}$$

また  $\#|\mathbb{C}/\sim| = \dim \text{Sp}(0) = \#|\text{Irr}(\overline{\text{ONM}}^r)|$  (3.2)。 したがって

$w_Y$  を含む  $\sim$  の同値類に  $Y$  が対応している事に於て Conjecture

4.1 が成立する事がわかる。 ■

$0 \in \text{Nilp}_{\text{sp}}$  のとき  $\{\tau \in \widehat{W} \mid \Phi(\tau) \subset \overline{0}\} \subset \{\tau \in \widehat{W} \mid \Psi(\tau) \subset \overline{0}\}$  は  
 一般に成立する ([KT]) が、逆の包含関係は一般には成立し

Table 11.

写像を,  $E$  は全  $2$  の場合について具体的にわかっており  
 $([BV1,2], [Sh1,2], [ALS])$ , 巾乗共役類, 閉包の包含関係  
 も知られている (古典型はよく知られている。例外型は  $[Sh3]$ ,  
 $[M]$ ) ので (4.3) が成立するかどうかは check できる。例えば  
 $E_6$  では全  $2$  の特殊巾乗共役類  $\mathcal{O}$  について (4.3) が成立する  $\alpha$  で  
 Conjecture 4.1 は正しい。  $F_4$  型では 11 個の特殊巾乗共役類の  
 うち 9 個について (4.3) が成立しているが, 残りの 2 個では  
 成立していない。

### Appendix

[A.1] moment map  $T^*X \xrightarrow{\delta} \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$  の像は  $\mathfrak{g}$  の巾乗元全  
 体  $\mathcal{N}$  と一致し,  $T^*X \xrightarrow{\delta} \mathcal{N}$  は  $\mathcal{N}$  の特異点解消を与える  
 (Springer)。導来圏での対象  $R\delta_!(\mathbb{C}_{T^*X})$  は Weyl 群の作用  
 を持つ (Lusztig [L], [BM] を参照)。  $\mathfrak{g}$  上  $\mathcal{N}$  の局所的  
 部分次数多様体  $D$  に対して  $H_c^*(\delta^{-1}(D), \mathbb{C}) = H_c^*(D, R\delta_!(\mathbb{C}_{T^*X})[D])$   
 あるいは  $\mathbb{R}$  の双対空間  $H_*(\delta^{-1}(D))$  は  $W$ -加群になる。特に  
 $x \in \mathcal{N}$  のとき  $\delta^{-1}(x) \cong X_x$  であるので  $H_{2d_0}(X_x)$  は  $W$ -加群になる。  
 また  $T^*(X \times X) = T^*X \times T^*X \xrightarrow{\delta \times \delta} \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  において  $Z = (\partial \times \delta)^{-1}(\mathcal{N}^q)$   
 (ここで  $\mathcal{N}^q = \{(x, -x) \mid x \in \mathcal{N}\}$ ) であるので  $H_{\text{odd}}(Z)$  は  $W \times W$ -  
 加群になる。ここで与えた  $W$  (resp.  $W \times W$ ) の  $H_{2d_0}(X_x)$

(resp.  $H_{\text{ad}}(Z)$ ) の作用は  $[K12]$  の  $\alpha$  と一致する ([H]).

[A.2] Lemma 2.9, 2.10 の証明を簡単に述べる。  $\mathcal{N}^a$  と  $\mathcal{N}$  と同一視して  $Z \xrightarrow{f} \mathcal{N}$  が得られる。  $0 \in \text{Nilp}$  に対して  $f^{-1}(0) = \bigcup_{0 \neq y \in \mathbb{C}} Z_y$  は  $Z$  中で閉集合で、  $\bigcap_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -加群として  $\alpha$  の完全列を得る。

$$0 \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(0)) \rightarrow H_{\text{ad}}(Z) \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(\mathcal{N}-0)) \rightarrow 0$$

$f^{-1}(0) \cong \bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C} b(y) (\cong \bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C}[Z_y] = H_{\text{ad}}(f^{-1}(0)))$  は  $\mathbb{C}[\mathcal{W}]$  ( $\cong H_{\text{ad}}(Z)$ ) の  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -部分加群である。次に  $\partial \mathbb{C} = \mathbb{C} - 0$  とおくとき  $\mathbb{C}$  と同一視して

$$0 \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(\partial \mathbb{C})) \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(\mathbb{C})) \rightarrow H_{\text{ad}}(f^{-1}(0)) \rightarrow 0$$

がやはり  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -加群として  $\alpha$  の完全列。従って  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ -加群として

$$\left( \bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C} b(y) \right) / \left( \bigoplus_{0 \neq y \in \mathbb{C}} \mathbb{C} b(y) \right) \cong H_{\text{ad}}(f^{-1}(0))$$

がわかる。  $x \in \mathbb{C}$  のとき  $f^{-1}(x) \cong \mathbb{C} \cong G/Z_G(x)$   $\mathbb{C}$  の Siber 束とあると  $f^{-1}(x) \cong G^{Z_G(x)}(X_x \times X_x)$ 。ゆえに  $H_{\text{ad}}(f^{-1}(x)) \cong (H_{\text{ad}_0}(X_x) \oplus H_{\text{ad}_0}(X_x))^{A(x)}$  がわかる。よって Lemma 2.9 が示す。  $\square$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}^* X \times \mathcal{T}^* X & \xrightarrow{f \times 1} & \mathcal{N} \times \mathcal{T}^* X & \xrightarrow{1 \times f} & \mathcal{N} \times \mathcal{N} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ Z & \xrightarrow{f} & (f \times 1)(Z) & \rightarrow & \mathcal{N}^a \cong \mathcal{N} \end{array}$$

よって  $Z = f^{-1}((f \times 1)(Z))$  である。よって  $\text{IRS}_1(\mathbb{C}_Z)$  に  $\mathcal{W}$  の作用が定まり、  $H_{\text{ad}}(Z) = (H_{\text{c}}^{\text{ad}}((f \times 1)(Z); \text{IRS}_1(\mathbb{C}_Z)))^*$  は  $\mathcal{W}$ -加群

にある。これは §A.1 で定義された  $W \times W$  の  $\text{Hed}(Z) \cap$  の作用  
 における  $W \times 1$  の作用と一致する。  $(\delta \times 1)(Z) \in T^*X \cong G^R M^+$   
 と同一視するとき  $S(Z_w) = G^R Y^0(w)$  となるので、 $I$  と同様にして  
 Lemma 2.10 が示される。

**[A.3]** Lemma 2.11 を示す。まず (i) を示す。  $Y \in \mathcal{O} \in$   
 $\text{Nilp}$  に付随した軌道的多様体とする。  $\partial Y \in Y$  に真に含まれる  
 軌道的多様体全体の合併集合として、  $\tilde{Y} = Y - \partial Y = Y \cap \mathcal{O}$  (と書く) §A.2 により  
 $\bigoplus_{Y^0(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w)$ ,  $\bigoplus_{Y^0(w) \subset \partial Y} \mathbb{C} b(w)$  は  $W \times 1$  不変なもので、  $M =$   
 $\left( \bigoplus_{Y^0(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w) \right) / \left( \bigoplus_{Y^0(w) \subset \partial Y} \mathbb{C} b(w) \right)$  は  $W$ -加群になる。  $Y^0(w) = Y$

とある  $w \in W$  に対して、  $b(w)$  の  $M$  での像  $\bar{b}(w)$  と書くとき、  
 $M = \bigoplus_{Y^0(w)=Y} \mathbb{C} \bar{b}(w)$  である。  $M$  の  $W$ -不変部分加群である  
 $\{ \bar{b}(w) \mid Y^0(w) = Y \}$  の部分集合で張るものは (0) と  $M$  に  
 属する事を言えばよい。  $Z_Y = f^{-1}(G^R Y)$  とある  $(\delta \times 1)(Z) \in$   
 $T^*X \cong G^R M^+$ 。 なるとき §A.2 と同様の議論により  $M \cong$   
 $\text{Hed}(Z_Y)$  である。  $Z_Y \cong \{ (x, g_1 B, g_2 B) \in \mathcal{O} \times X \times X \mid x \in g_2 Y \cap g_1 M^+ \}$   
 となるので、  $x \in Y$  により  $Z_Y \in \mathcal{O} = G/Z_G(x)$  上の fiber 束を考えると、  
 $Z_Y \cong G^{Z_G(x)} (X_x \times \hat{X}_x)$ 。 ところで  $\hat{X}_x = \bigcup_{\substack{C \in \text{In}(X_x) \\ R(C)=Y}} C$  ((2.1)参照)。  
 従って  $W$ -加群として

$$M \cong (\text{Hed}_0(X_x) \oplus \text{Hed}_0(\hat{X}_x))^{A(x)}.$$

==>  $W$  の  $\text{Hed}_0(X_x) \cap$  の作用は §A.1 で与えられたもの、

$H_{2d_0}(\hat{X}_x)$  の作用は identity である。  $\text{Irr}(\hat{X}_x) = R^{-1}(Y)$  には  $A(x)$  が推移的に作用 (2.11.3 ので,  $C_0 \in \text{Irr}(\hat{X}_x)$  を取ると) 固定して  $A(x, C_0) = \{z \in A(x) \mid z \cdot C_0 = C_0\}$  とおくと,

$$(A.1) \quad M \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$$

とある。  $\text{Irr}(X_x)$  の  $A(x, C_0)$ -軌道分解を  $\text{Irr}(X_x) = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_E$

とすると,  $\{\sum_{C \in I_j} [C] \mid j=1, \dots, E\}$  は  $H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$  の基底に

なり, (1) も (B) 型 (A.1) でこれは  $M$  の基底  $\{\bar{b}(w) \mid Y^0(w) = Y\}$

に対応 (2.11.3)。  $I \subset H_{2d_0}(X_x) = \bigoplus_{z \in \mathcal{I}_0} (T_{(0,z)} \oplus \bar{z})$ ,  $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$

$= T_{(0,1)} \oplus \bar{1} = T_{(0,1)}$  となる射影  $H_{2d_0}(X_x) \xrightarrow{P} H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$  が

定まる。 11.3  $N$  が  $H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$  の non-zero は  $W$ -部分加群

であって,  $\{\sum_{C \in I_j} [C] \mid j=1, \dots, E\}$  の部分集合と取る。  $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$

は既約でまた  $P(\sum_{C \in I_j} [C]) = \frac{1}{\#|A(x)|} \sum_{C \in I_j} \sum_{z \in A(x)} [z \cdot C] \neq 0$ 。 すると

$P(N) = H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ 。 すると  $N \supset H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ 。  $\text{Irr}(X_x)$  の  $A(x)$ -軌道

分解を  $\text{Irr}(X_x) = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$  (各  $J_r$  は異なる  $I_j$  の合併集合)

とあるとき  $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)} = \bigoplus_{r=1}^s \mathbb{C}(\sum_{C \in J_r} [C])$ 。 すると  $N$  のとり方

から  $N = H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$ 。 (i) を示す。 (ii) は (i) と (B) よりある。 (iii) を示す。  $O_M^{gr} = O_Y^{gr}$  とある。

$\{z \in W \mid O_z^{gr} = 0\} \xrightarrow{(1.17.1)} \text{Irr}(\overline{ONM^+}) \times \text{Irr}(\overline{ONM^+}) \quad (z \mapsto Y^0(z), Y^1(z))$

は全射となる。 あるいは  $z \in W$  に対して  $Y^0(z) = Y^0(w)$ ,  $Y^1(z) = Y^1(w)$

とある (ii) により  $w \sim z \sim y$  かつ  $w \sim_{gr} y$ 。 Lemma 2.11 が

示され。

Corollary A.2  $w \in W, O = O_w^{or}, Y = Y^o(w), x \in O$   
 $C \in R^-(Y) \quad (I_w(X_x) \xrightarrow{\theta} I_w(\overline{O \cap M^+})) \quad (2.1) \text{ 参照})$  とする。

$A(x, C) = \{z \in A(x) \mid z \cdot C = C\}$  と仮定して,

$$V_w^0 \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C)}.$$

Conjecture A.3

$$(i) \quad w \cong y \iff Y^o(w) \supset Y^o(y)$$

$$(ii) \quad w \cong y \iff Y^r(w) \supset Y^r(y)$$

$$(iii) \quad w \cong_{er} y \iff \overline{O_w^{er}} \supset \overline{O_y^{er}}$$

追記 本文を書いた後で次の事がわかったので, ここに記す。Borho-Brylinski 予想は次の (A) と同値であった (3.4.1)。

「(A) 特殊表現  $S_x(O_w^{LP}) = \sigma(w)$  の 2 種類 の基底  $\{\gamma_Y \mid Y \in I_w(\overline{O \cap M^+})\}$   $\{P_Y \mid Y \in O_w^{LP}/\sim\}$  は定数倍を除いて一致する。」

一方 Kazhdan-Lusztig は, 1979 年頃, 次の仮説 (B) の反例を  $B_3, C_3$  で発見した (未発表)。

「(B) 特殊表現の基底  $\{\gamma_Y \mid Y \in I_w(\overline{O \cap M^+})\}$  は, ある  $W$ -graph ([KL1] 参照) からくる Hecke 環の表現の基底を  $\gamma \mapsto 1$  と特殊化したものと一致する。」

そこで次の (C) が示されれば, (B) の反例の存在から (A) の反例の存在が導かれる。

「(C) 特殊表現の基底  $\{p_{y_1} \mid y_1 \in C_w^{LP}/\sim\}$  は, ある  $W$ -graph から  $W$  の Hecke 環  $\mathcal{H}$  の表現の基底  $\varepsilon \mapsto 1$  と特殊化した  $\varepsilon$  も  $\mathcal{H}$  の定数倍を除いて一致する。」

(C) は次の様にして示される。  $\varepsilon$  は特殊表現,  $V \in \mathcal{O}$  は  $\mathcal{H}$  の両側 cell 表現とし,  $V$  の  $W$  cell 表現への分解  $V = \bigoplus_i V_i$  とする。  $V$  は  $W \times W$ -加群で各  $V_i$  は  $1 \times W$ -部分加群である。  $1 \times W$  は  $V$  への作用により  $V$  は  $W$ -加群と見て  $\text{Hom}_W(\mathcal{O}, V)$  を考える。  $W \times 1$  は  $V$  への作用により,  $\varepsilon$  は  $W$ -加群になり,  $\mathcal{H} \varepsilon \simeq \text{Hom}_W(\mathcal{O}, V) = \bigoplus_i \text{Hom}_W(\mathcal{O}, V_i)$  となる。 また  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_W(\mathcal{O}, V_i) = 1$  である。  $[G_y]$  によりある  $W$ -graph があって,  $\varepsilon$  に対応する Hecke 環  $\mathcal{H}$  の表現  $\varepsilon$  を  $\varepsilon \mapsto 1$  と特殊化したものは  $\mathcal{H}$  の同型。  $\varepsilon$  は  $W$ -graph から定まる  $\varepsilon$  の基底  $\varepsilon \mapsto 1$  と特殊化したものはある  $\text{Hom}_W(\mathcal{O}, V_i) \in \mathbb{C}$  である。  $\varepsilon$  は,  $[y_1]_{LR} \geq [y_2]_{LR}, y_1 \not\sim y_2 \Rightarrow \deg p_{y_1} < \deg p_{y_2}$  となる  $V$  から  $\mathcal{O}$  への  $W$ -加群としての全射導同型  $\mathcal{G}$  があって,  $\dim \mathcal{G}(V_i) = 1$ 。  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}(V_i)$  はある  $p_{y_1}$  により張られる。  $x \in \mathcal{O}, x \neq 0$  を  $\varepsilon$  と  $\mathcal{O}$  とするとき  $\text{Hom}_W(\mathcal{O}, V) \xrightarrow{F_x} \mathcal{O} \quad (f \mapsto \mathcal{G}(f(x)))$  は  $W$ -加群としての同型写像。 定義から明らかに,  $F_x(\text{Hom}_W(\mathcal{O}, V_i)) = \mathcal{G}(V_i)$  である (C) が示された。

## REFERENCE

- [ALS] Alvis, D., Lusztig, G., Spaltenstein, N. : On Springer's correspondence for simple groups of type  $E_n$  ( $n=6,7,8$ ). Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 92, 65-78 (1982)

- [BV1] Barbasch, D., Vogan, D. : Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups. Math. Ann. 259, 153-199 (1982)
- [BV2] ———, ——— : Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups. J. Algebra 80, 350-382 (1983)
- [BeB] Beilinson, A., Bernstein, J. : Localisation de  $\mathfrak{g}$ -modules. Comptes Rendus 292, 15-18 (1981)
- [BoB1] Borho, W., Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces. I. Invent. Math. 69, 437-476 (1982)
- [BoB2] ———, ——— : ———. III. Invent. Math. 80, 1-68 (1985)
- [BM] ———, MacPherson, R. : Representations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les varietes de nilpotents. Comptes Rendus 292, 707-710 (1981)
- [BK] Brylinski, J.-L., Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. Invent. Math. 64, 387-410 (1981)
- [D] Duflo, M. : Sur la classification des ideaux primitifs dans l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie semi-simple. Ann. Math. 105, 107-120 (1977)
- [Gi] Ginsburg, V. :  $\mathfrak{g}$ -modules, Springer's representations and bivariant Chern classes. Preprint, Moscow (1984)
- [Gy] Gyoja, A. : On the existence of a  $W$ -graph for an irreducible representation of a Coxeter group. J. Algebra 86 422-438 (1984)
- [H] Hotta, R. : On Joseph's construction of Weyl group representations. Tohoku Math. J. 36, 49-74 (1984)
- [J1] Joseph, A. :  $W$ -module structure in the primitive spectrum of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra. In: Noncommutative harmonic analysis, Lecture Notes in Math.. 728 116-135. Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
- [J2] ——— : Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II. J. Algebra 65, 269-316 (1980)
- [J3] ——— : On the variety of a highest weight module. J. Algebra 88, 238-278 (1984)
- [J4] ——— : On the associated variety of a primitive ideal. J. Algebra 93, 509-523 (1985)

- [KT] Kashiwara, M., Tanisaki, T. : The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold -related to the Weyl group algebra. *Invent. Math.* 77, 185-198 (1984)
- [KL1] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.* 53, 165-184 (1979)
- [KL2] ———, ——— : A topological approach to Springer's representations. *Adv. Math.* 38, 222-228 (1980)
- [L] Lusztig, G. : Green polynomials and singularities of unipotent classes. *Adv. Math.* 38, 169-178 (1981)
- [LV] ———, Vogan, D. : Singularities of closures of  $K$ -orbits on flag manifolds. *Invent. Math.* 71, 365-379 (1983)
- [M] Mizuno, K. : The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups  $E_7$  and  $E_8$ . *Tokyo J. Math.* 3, 391-461 (1980)
- [Sh1] Shoji, T. : On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. *Comm. Alg.* 7, 1713-1745 (1979), Correction *Comm. Alg.* 7, 2027-2033 (1979)
- [Sh2] ——— : On the Springer representations of Chevalley groups of type  $F_4$ . *Comm. Alg.* 8, 409-440 (1980)
- [Sh3] ——— : On the Green polynomials of a Chevalley group of type  $F_4$ . *Comm. Alg.* 10, 505-543 (1982)
- [Spa] Spaltenstein, N. : On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups. *Topology* 19, 203-204 (1977)
- [Spr] Springer, T. A. : Quelques applications de la cohomologie d'intersection. *Seminaire Bourbaki*, expose 589. *Asterisque* 92-93, 249-273 (1982)
- [St] Steinberg, R. : On the desingularization of the unipotent variety. *Invent. Math.* 36, 209-224 (1976)
- [T1] Tanisaki, T. : Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups. *Tohoku Math. J.* 34, 575-585 (1982)
- [T2] ——— : Holonomic systems on a flag variety associated to Harish-Chandra modules and representations of a Weyl group. *Adv. Studies in Pure Math.* 6, 139-154 (1985)
- [V] Vogan, D. : Ordering of the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra. *Math. Ann.* 248, 195-203 (1980)