

トーラスあてはめ法による銀河系力学構造 の構築について

秋田大学・教育文化学部 上田 晴彦

Haruhiko Ueda

Faculty of Education and Human Studies,
Akita University

1.はじめに

本研究会のテーマは「長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解について」であるが、ここでは長距離力として重力（万有引力）を、多体系として自己重力多体系（重力相互作用のみが働く多数の質点からなる系）を考える。自己重力多体系は、宇宙における様々なスケールの系の理想的なモデルであるが、具体的な系としては我々の銀河（銀河系）を想定する。

これまでも銀河系内にある星については、三角測量の原理を利用して距離を見積もることが行われてきた。しかし地上からの観測では大気の乱れによる星像のふらつきなどの影響で、観測精度には限界があった。その限界を打ち破るには宇宙空間での観測が必要であったため、世界初の位置天文衛星（ヒッパルコス衛星）が 1989 年に打ち上げられた。これにより観測精度は向上したが、その能力の限界から星の位置・速度が正しく求められたのは約 300 光年以内に限られていた。ところが近々打ち上げが予定されている次世代位置天文衛星は、銀河系の中心を越える領域にある星の位置・速度を高精度で測定できる能力を持っている^{1), 2)}。これは大変画期的なことであり、これまで誰も行いうことができなかった銀河系の力学構造を決定する準備が整いつつあることを意味している。

銀河系の力学構造を記述するうえで基本となる量は、ある物質がある時刻・位置・速度を持っている確率の分布関数である位相分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ と呼ばれるものである。銀河系を構成要素（重力物質）全体の位相分布関数がわかると、例えばそれを時間と速度で積分してやれば星の個数分布、さらに質量分布がわかり、そこから最終的に重力場まで分かる、というように他の重要な物理量も導出することができる。位置天文衛星で位相分布関数を直接見積もればよいのだが、残念ながら観測から得られるのはある程度明るい星の位相分布関数のみである。しかし銀河系の力学構造を構築するために必要な情報は、ダークマターを含む銀河系の重力物質の位相分布関数である。つまり不完全な観測データから重力物質全体の位相分布関数をどのように構築していくか、という理論的な研究が必要とされているのである。ここで提案するのは、その足がかりとなる手法である。

2. 問題の設定

先に述べたように、銀河系の位相分布関数を決定することを考える。基本的仮定として銀河系の構造は定常状態であるとしよう。すると 7 次元関数である位相分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は 6 次元関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ になる。もちろん現実的には銀河系は非定常であるかもしれないが、その場合でもずれが小さいと期待できるので定常状態からの摂動として計算可能であろう。さらに銀河系の構造が定常であると仮定したことにより、ほぼすべての星の軌道は規則的（カオスでない）ことになる。その際には「強いジーンズの定理」³⁾が使え、位相分布関数は 3 つの孤立積分（作用変数）の関数となる。なお作用変数 J は

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

で定義される。作用関数を用いると位相分布関数は 3 次元関数 $f(J_1, J_2, J_3)$ となるため、作用変数は位相分布関数をコンパクトに表現する際に有用である。ただし作用変数を用いた表現は、そのままでは有用であるとはいえない。なぜならコンパクトな形で位相分布関数を J の関数として $f_{\text{model}}(J)$ で表現しても、観測で得られるのは 6 次元表現の位相分布関数 $f_{\text{obs}}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ である。もし我々が $J \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}$ の変換を知らなければモデルと観測の結果を比べることが出来ないので、 $J \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}$ の変換をすばやく実行する方法を開発することが必要となる。残念ながら変換 $J \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}$ が解析的に実行可能なのは、ポテンシャルの形が理想的な以下の 2 つの場合

$$\text{A) Harmonic-Oscillator Type} \quad \Phi = \frac{1}{2} \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2} \omega_z^2 z^2$$

$$\text{B) Isochrone Type} \quad \Phi = -\frac{k}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$$

のみであり、一般のポテンシャルの場合は $J \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}$ を数値的に求めるしかない。

一般のポテンシャルのもとでの $J \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}$ の変換を数値的に求めるプロセスは、トーラス構築¹⁾と呼ばれる。もっとも洗練されたトーラス構築の 1 つとして、Binney とその協力者たちによって提案された方法が有名である⁴⁾。彼らの方法は一般のポテンシャルのもとでの作用変数 J' と、上にあげた理想的なポテンシャルのもとでの作用変数 J の間の正準変換の母関数を用いるものである。そして $J' \Leftrightarrow J$ の正準変換の母関数を求めることが出来れば、最終的に J' と $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ の座標変換が以下のように得られる。

$$J' = J' \quad (J) = J' \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

彼らは系のエネルギーが保存することを利用し、 $J' \Leftrightarrow J$ の変換を引き起こす母関数を求める手法を開発した。この手法は優れているが、トーラス構造が複雑になってくると

¹⁾ 銀河系内の星の軌道はかなり複雑な動きをするが、位相空間上でその運動を見るとかなり単純で 3 次元トーラス上を動くことになる。

$J' \Leftrightarrow J$ の変換を求めることが難しくなってくる。よって我々はこの手法を採用せず、トーラスの幾何学的情報を用いる「トーラスあてはめ法」と呼ぶ新しい方法を開発した。後で見るように、トーラスあてはめ法は複雑な系のもとでの $J' \Leftrightarrow J$ の変換を求める際に力を発揮する。

3. トーラスあてはめ法の概略とその結果

トーラスあてはめ法の目標は、一般的なポテンシャルのもとで $J' \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}$ を求めることである。Binney たちの方法を参考に、 $J' \Leftrightarrow J$ の変換を引き起こす母関数を、数値的に求めることを考える。その際にキーとなる考えは、代表的トーラスを設定しその幾何学的な情報を利用することである。トーラスあてはめ法のアルゴリズムの概略を述べると

- 1) 与えられたポテンシャルのもとでいくつかの星の軌道を計算し、代表的なトーラスの幾何学的な情報を得る。
- 2) J' と結びつける J のポテンシャルの型（つまり Harmonic-Oscillator Type か Isochrone Type）を決定し、解析式に従い $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \Rightarrow (J, \theta)$ を実行
- 3) 以下の関係式を満たすような母関数 S_n を数値的に求める

$$J = J' + 2 \sum_{n \neq 0} n S_n \cos(n\theta)$$

なお 1) ~ 3) までを代表的な数個のトーラスについて実行し、それぞれの母関数を求めておく。

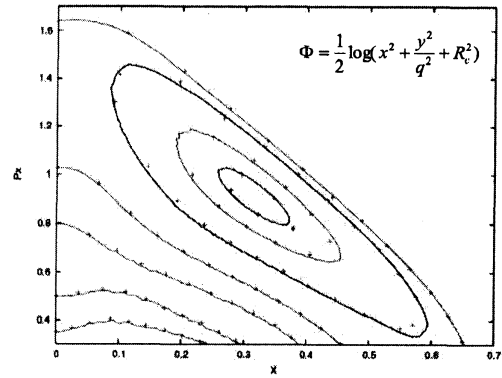
- 4) 代表的トーラスの母関数から任意のトーラスに関する母関数を補間によって求める。

以上 1) ~ 4) を実行することで、母関数 S_n を介して任意の $J' \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}$ が求まることになる。トーラスあてはめ法の第 1 の利点は、少ない係数の補間で任意のトーラスを求めることができることである。明らかに母関数を利用しなくても、トーラスの幾何学的な情報をもとに代表的なトーラスから他のトーラスを補間で求めることも可能である。ただしこの際には 2 次元系でも 50 万個の $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ の補間データが必要となり、3 次元系だとさらに多くの補間データが必要となる。しかしトーラスあてはめ法では、補間すべき係数は 2 次元系で約 700 個であるため、計算時間の劇的な短縮につながる。またトーラスあてはめ法の第 2 の利点として、低次の resonant orbit が比較的簡単に再現可能であることである。残念ながら幾何学的情報を用いない通常のトーラス構築では resonant orbit の再現に極めて複雑な計算を要し実用的でない。

トーラスあてはめ法の応用例として、以下に 1 つの 2 次元ポテンシャル、2 つの 3 次元ポテンシャルにおける結果を示す。

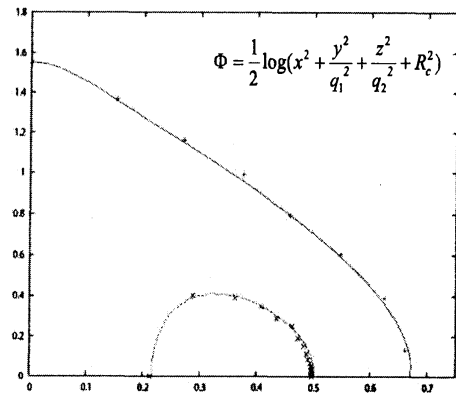
1) 2次元 Logarithmic potential

Resonant orbit への応用例として、2次元 Logarithmic potential を採用する。右図の横軸は x 、縦軸は p_x 、実線はポアンカレ断面、+シンボルがトーラスあてはめ法での結果である。この図から低次元の resonant orbit であれば簡単に再現できることがわかる。



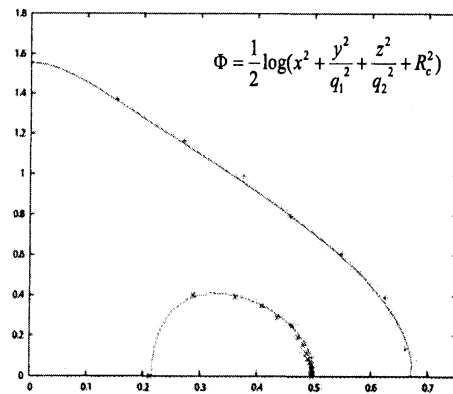
2) 3次元 Logarithmic potential

Logarithmic potential は、銀河系のディスク部分のポテンシャルの例として取り上げる。右図の横軸は x 、縦軸は p_x 、実線はポアンカレ断面、+シンボルがトーラスあてはめ法での結果である。少しずれが目立つ部分もあるが、ほぼトーラスを再現できていることがわかる。



3) 3次元 Ferrers potential

Ferrers potential は、銀河系の原時部分のポテンシャルの例として取り上げる。右図の横軸は x 、縦軸は p_x 、実線はポアンカレ断面、+シンボルがトーラスあてはめ法での結果である。やはり少しずれが目立つ部分もあるが、ほぼトーラスを再現できていることがわかる。

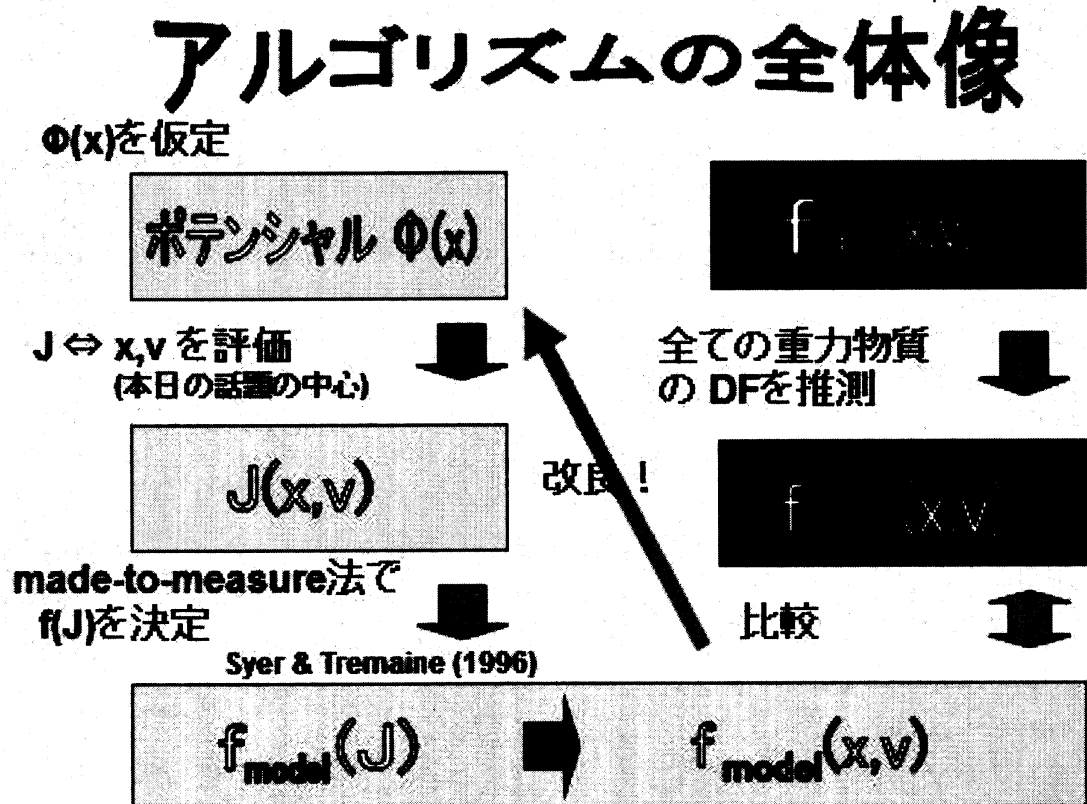


4. 結論

トーラスあてはめ法は、代表的なトーラスについてはその幾何学情報に基づいて $J' \Leftrightarrow x, v$ を引き起こす母関数を求め、それ以外のトーラスはこれらの代表的な母関数を補間することで、任意のトーラスを少ない計算量・記憶量で再現できる手法であるといえる。我々はこの方法を用いて低次元の resonant orbit および3次元ポテンシャルの major orbit を再現し、実用的方法であることを例証した。本研究においてトーラスあてはめ法が有用であることが示せたが、この手法は銀河系の位相分布関数を求めること

だけでなく一般的な状況にも使える。そのため、今後様々な場面で利用可能であろう。

ただしトラスあてはめ法は位相分布関数を求めるための第一歩に過ぎない。位相分布関数を求めるアルゴリズム全体は以下になるのだが、今後とも解析方法を検討していきたいと考えている。



参考文献

- 1) 郷田直輝:「天の川銀河の地図をえがく」、旬報社、2009.
郷田直輝:「ダークマターとは何か」、PHPサイエンス・ワールド新書、2012.
- 2) 矢野大平:「広がる宇宙地図」、技術論評社、2008.
- 3) Binney J.J., Tremaine S.: Galactic Dynamics, Prince-ton. Princeton University Press, 1987.
- 4) McGill C., Binney J.J.: MNRAS, 244, 634, 1990
Binney J.J., Kumar S., 1993, MNRAS, 261, 584
Kaasalainen M., Binney J.J.: MNRAS, 268, 1033, 1994
Kaasalainen M., MNRAS, 268, 1041, 1994
Kaasalainen M., MNRAS, 275, 162, 1995