

流れの中での 3 次元渦糸の形

名大・工 福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)

1 序

縮まない流体においては, 空間の各点において渦度を指定すれば, その速度場は完全に定まる. 強い渦度をもつ領域が線状もしくは層状に局在している状況は普遍的に現れる. その場合, 速度場よりも, 渦度場の発展を追跡することによって, 問題を簡単化することができる.

本稿では, 細長い渦 (= 渦糸) の 3 次元運動に着目する. 特に, 流れの中で渦糸の平衡形が容易に求められることを示す.

2 局所誘導近似

流体は非圧縮性であり, 粘性も無視できると仮定する. このとき, 渦度場 $\omega(\mathbf{x})$ によって誘導される流速 $\mathbf{v}$ は Biot-Savart の法則によって与えられる:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' + \mathbf{V}(\mathbf{x}) . \quad (1)$$

右辺の $\mathbf{V}$ は境界の存在や外部流による渦なし流を表す. 運動量保存則から導かれる Kelvin-Helmholtz の渦定理によれば, 渦糸は, その上に誘導される流速と同じ速度で動くことがわかる.

渦核の半径が曲率半径に比べて十分に小さいとき, (1) は

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{X}') \times \delta \mathbf{X}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}'|^3} + \mathbf{V}(\mathbf{x}) . \quad (2)$$

と書ける. ここで, Γ は循環, $\mathbf{X}'$ は渦糸の中心をなぞる曲線上の位置を表す. (2) を渦糸の直上で評価すると対数発散を生ずるので, 渦核の半径 δ の部分からの寄与を抜く. さらに, 局所的な誘導が卓越すると考えて, (2) の積分領域を, $\mathbf{X}$ を中心とする長さ $2L$ の曲線上の部分だけに限る (局所誘導近似; localized induction approximation: LIA). 得られた渦糸の発展方程式は以下のような形をとる:¹⁾

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\log \left(\frac{L}{\delta} \right) \right] \kappa \mathbf{b} + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) . \quad (3)$$

あるいは,

$$\mathbf{X}_t = A \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss} + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) , \quad (4)$$

with

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{L}{\delta} \right) . \quad (5)$$

ここで, κ は曲率, $\mathbf{b}$ は陪法線ベクトルを表す. 下付添字は微分を表す.

3 流れがないとき

(4) 式で, $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ とおき, 接ベクトル $\mathbf{t} = \partial \mathbf{X} / \partial s$ を使って表すと,

$$\mathbf{t}_t = A \mathbf{t}_s \times \mathbf{t}_{ss} , \quad (6)$$

となり, Heisenberg の等方的なスピン鎖の連続極限と一致する.²⁾ Da Rios^{1,3)} は (4), (6) を, 曲線の曲率 κ とねじ率 τ だけを用いて書き改め, 曲線の内在的幾何の観点を導入した:

$$\kappa_t = -(\kappa \tau)_s - \kappa_s \tau , \quad (7a)$$

$$\tau_t = [(\kappa_{ss} - \kappa \tau^2) / \kappa]_s + \kappa_s \kappa . \quad (7b)$$

橋本⁴⁾ は, κ と τ を組み合わせたある複素変数を導入すれば, (7) が非線形 Schrödinger 方程式に帰着することを発見した:

$$\psi(s, t) = \kappa \exp \{ i \int^s \tau ds \} , \quad (8)$$

$$i \psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi = 0 . \quad (9)$$

(9) 式はソリトン方程式であるから, 無限個の保存量が構成できる. 最初のものは

$$\int |\psi|^2 ds = \int \kappa^2 ds , \quad (10)$$

である. さらに, (4) から直接, 渦糸の長さが変わらないことが証明できる:

$$\int ds = \text{const.} \quad (11)$$

閉曲線のトポロジーの情報を与える量として、閉曲線 C の全曲率

$$K(C) = \int_C \kappa ds \quad (12)$$

がある。Fenchel⁵⁾ は、 $K(C) \geq 2\pi$ であることを、Fáry⁶⁾ と Milnor⁷⁾ は、閉曲線が knot をもてば、

$$K(C) > 4\pi \quad (13)$$

であることを証明した。式 (10), (11) と (13) および Schwartz の不等式を用いれば、渦糸が knot をもたないための条件が導かれる:^{8,9)}

定理

初期条件として、閉じた渦糸 C の全曲率に次の制約がつけば、

$$\int_C \kappa ds \leq \left(\int_C \kappa^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_C ds \right)^{1/2} \leq 4\pi, \quad (14)$$

渦糸が、(その発展において) knot をもつことは不可能である。

要するに、近似方程式 (4) は複雑な渦糸運動をシミュレートするのには適さない。

4 流れの中での渦糸の平衡形

流れの中での渦糸運動の解析は、その重要性にも関わらず、あまり手をつけられていない問題の1つである。^{10,11)} 思い切って問題を単純化しよう。定常流 $V(X)$ 中で流れと釣り合って静止している渦糸の形を求める。 $X_t = 0$ とおくと、(4) は

$$AX_s \times X_{ss} + V(X) = 0 \quad (15)$$

の形の常微分方程式に還元される。(15) と $t = X_s$ との外積をとると、

$$AX_{ss} = X_s \times V(X) \quad (16)$$

が得られる。長さ s を時間 t 、外部流 $V(X)$ を磁場 $B(X)$ 、 $A = m/q$ と読み換えると、(16) は質量 m 、電荷 q を持つ荷電粒子の磁場 $V(X)$ 中での運動

を記述する方程式と等価になる．すなわち，ローレンツ力を受けて運動する荷電粒子の軌跡と，流れの中の渦糸の形が等価である．前者については，プラズマの閉じ込めの問題に関連して比較的多くの研究がなされている．それらの結果を翻訳すれば，豊富な知見が容易に得られる．

ついでに，定常な低マッハ数の流れ $U(X)$ 中での音響射線の伝播を支配する方程式も (16) と等価であることを注意しておこう：¹²⁾

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mathbf{n} \times \text{rot } U(\mathbf{X}) . \quad (17)$$

ここで， $\mathbf{n}$ は射線方向の単位ベクトルである．

4.1 静止流体中での形を変えない渦糸

前述のアナロジーの御利益を明らかにする例は，静止流体中を形を変えないで運動する渦糸である．木田¹³⁾ はそのような運動が，

$$A\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss} = -c_0\mathbf{X}_s + \Omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{X} + V\mathbf{e}_z \quad (18)$$

に従うことを示した．ここで， $\mathbf{e}_z$ は1つの方向 (z 方向) の単位ベクトルで， V はその方向の渦糸の並進速度， Ω は z 軸まわりの回転の角速度， c_0 は渦糸に沿ってのすべり速度を表す．これらはすべて定数である．木田は (18) を直接積分することによって，解のクラスを定めた．解は楕円関数を用いて書き下すことができる．

ところで，(18) と (15)，(16) を比較すると，(18) は

$$A\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{B}(\mathbf{X}) , \quad (19a)$$

$$\mathbf{B} = -\Omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{X} - V\mathbf{e}_z \quad (19b)$$

と書き換えられる．長さ s による微分を dot で表した．(19b) を与えるベクトルポテンシャル $\hat{\mathbf{A}}$ は，

$$\hat{\mathbf{A}} = \left(-\frac{V}{2}y, \quad \frac{V}{2}x, \quad \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) \right) \quad (20)$$

である．そして，(19a) を生む Lagrangian L は

$$\begin{aligned} L &= \frac{A}{2}\dot{\mathbf{X}}^2 + \dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{A}} \\ &= \frac{A}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \left(\frac{V}{2}r^2\dot{\theta} - \frac{\Omega}{2}\dot{z}r^2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

である．ここで円柱座標 (r, θ, z) を用いた．(21) より θ と z が循環座標であることが直ちに読み取れて，保存量（積分） $P_z = \partial L / \partial \dot{z}$, $P_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta}$ が計算できる．これらを組み合わせると，

$$A\dot{z} = \frac{1}{2}(D - \Omega r^2) \quad , \quad (22a)$$

$$\Omega r^2 \dot{\theta} + V\dot{z} = c_0 \quad (22b)$$

が得られる．ここで， D と c_0 は積分定数で， c_0 は式 (18) におけるすべり速度と一致する．(22) と

$$|\dot{\mathbf{t}}|^2 = |\dot{\mathbf{X}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = 1 \quad (23)$$

を合わせたものは，木田が最終的に積分した方程式系と一致する．我々のアナロジーの利点は，Lagrangian を経由することによって，2つの積分 (22) が容易に見つかるということである．

木田クラスは，橋本の1ソリトン解⁴⁾を含む．従って，磁場のパラメータ Ω , V と初期条件 $\dot{\mathbf{X}}(0)$ をうまく調整すれば，荷電粒子に橋本ソリトンを描かせることができる．

4.2 対称こま

形を変えない渦糸は，式 (4) (で $V = \mathbf{o}$ としたとき) の進行波解に相当する．Ricci¹⁴⁾ が注意したように，以前に Levi-Civita¹⁵⁾ が同等な解を (7) 式を積分することによって求めていた．

一方，橋本神部¹⁶⁾は (18) が細い円形断面の弾性のある針金 $\mathbf{X}(s)$ の内部応力 $\mathbf{T}(s)$ 及びそのモーメント $\mathbf{M}(s)$ の釣り合いを表現することを見抜いた．

天下りの的ではあるが，棒の曲げ剛性を $A(=EI)$ ，ねじり剛性を C ，単位長さ当りのねじれ角を γ とすると，

$$\mathbf{M} = A(\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss}) + C\gamma \mathbf{X}_s \quad (24)$$

のように書けることが確かめられる．¹⁷⁾ 右辺の第1項のようにまとめられるのは，棒の断面が円形であることが効いている． $c_0 = C\gamma$ とおいて， $\mathbf{T} = \Omega \mathbf{e}_z$ と思うと，(18) は，

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{o} \quad , \quad (25a)$$

$$\mathbf{M}_s + \mathbf{t} \times \mathbf{T} = \mathbf{o} \quad (25b)$$

と同じことであり、まさに、弾性棒の応力の釣り合いを表す式になる。式 (25a) は、外力（体積力）が働かないことを意味している。

歴史をさかのぼると、Kirchhoff によって、弾性棒（ピアノ線）の形と対称独楽（Lagrange's top）の運動とが完全に等価であることが見出だされている。¹⁸⁾ Euler 角を用いた証明は鶴による文献¹⁹⁾に譲ることにして、このアナロジーを直接的に検証してみよう。Euler 角による証明は物体（独楽）に固定した座標系で行うのに対して、以下に展開する証明は、空間に固定した座標系で行うのが特色である。

弾性棒の軸方向の単位ベクトルを $t(s)$ とし、棒に沿っての単位長さ当りの接ベクトルの回転角を $\omega^{(s)}$ とする。長さ s による微分を dot で表せば、定義により、

$$\dot{t} = \omega^{(s)} \times t \quad (26)$$

となる。一方、(18) または (19) より、弾性棒の方程式は

$$At = (\Omega e_z \times X + V e_z) \times t \quad (27)$$

である。(26) と (27) が等しいためには、

$$A\omega^{(s)} = \Omega e_z \times X + V e_z - c_1 t \quad (28)$$

でなければならない。 c_1 は定数である。ここで、

$$\omega_3 = \gamma = \omega^{(s)} \cdot t, \quad (29a)$$

$$c_1 = (C - A)\omega_3 \quad (29b)$$

とおいて、(28) に代入すると、

$$M = A(\omega^{(s)} - \omega_3 t) + C\omega_3 t, \quad (30a)$$

$$\dot{M} = t \times (-\Omega e_z) \quad (30b)$$

が得られる。(実は、以上の議論は、(24)、(25) を敷衍しているに過ぎない。)

さて、対称独楽が 1 点を固定して運動しているとしよう。固定点から独楽の重心までの距離を l として、

$$\Omega = mgl \quad (31)$$

とおく. もちろん, g は重力加速度である. t を独楽の軸方向の単位ベクトルとすると, (30a) は, 対称軸のまわりの慣性モーメント C , 他の軸のまわりの慣性モーメント A をもつ独楽の角運動量と見なせる. (30b) は独楽の角運動量の変化を表す式と解釈できるので, これと (26) とで独楽の軸 t の運動が記述できることになる.

物体に固定した座標系から見た, 角運動量の成分を $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, 回転角速度の成分を $\omega^{(c)}$, 鉛直軸 e_z の成分を γ とおくと, (30b) と $\dot{e}_z = \mathbf{0}$ (cf. (25a)) は

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} + \omega^{(c)} \times \mathbf{m} = mgl\gamma \times \chi, \quad (32a)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \omega^{(c)} \times \gamma = \mathbf{0}, \quad (32b)$$

with $m_1 = A\omega_1^{(c)}$, $m_2 = A\omega_2^{(c)}$, $m_3 = C\omega_3^{(c)}$

となって, 確かに, よく知られた Euler-Poisson の方程式が得られる.²⁰⁾ ここで, χ は固定点と重心とを結ぶ (物体系で見た) 単位ベクトルである.

眠りごまとは, つねに鉛直方向に直立して回っている独楽のことで, 直線渦に対応づけられる. 軸まわりの角速度が十分に大きいとき, すなわち,

$$\omega_3^2 > \frac{4Agl}{C^2} \quad (33)$$

のとき, 眠りごまは安定であるが, そうでないときは, 不安定である. (大ざっぱに言って) 摩擦のために, 角速度 ω_3 が減少して, 眠りごまが目覚めた状態が橋本ソリトンに対応する.

頭を整理するために, 様々な量の間の対応関係を表 1 にまとめておく.

4.3 わき出し (吸い込み) 流中の渦糸

強さ Q のわき出し流

$$\mathbf{V} = \frac{Q\mathbf{X}}{4\pi r^3} \quad ; \quad r = |\mathbf{X}| \quad (34)$$

中におかれた渦糸の静止形を計算しよう. この問題は磁気単極子によって跳ね返される荷電粒子の運動と同じであって, すでに答は求められている.²¹⁾ $\mathbf{V}$ が (34) の形をとるとき, (16) より,

$$\mathbf{J} = \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}} - \frac{Q\mathbf{X}}{4\pi r^3} \quad (35)$$

が保存量であることは容易に確かめることができる．式 (35) と $e_r = X/r$ の内積をとると， J と e_r のなす角を θ とおいて，

$$\cos \theta = -\frac{Q}{4\pi AJ} \quad (36)$$

となって， θ が一定であることがわかる．つまり，荷電粒子は，モノポールを頂点とする円錐上に束縛されている．式 (35) の自乗をとると，

$$|X \times \dot{X}|^2 + \left(\frac{Q}{4\pi A}\right)^2 = J^2 \quad (37)$$

となり， $r_0 = |X \times \dot{X}|$ も保存する．さらに，式 (16) と (34) より直接，

$$\frac{d^2}{ds^2} r^2 = 2 \quad (38)$$

が導けるので，答は次のように求められる：

$$r^2 = s^2 + r_0^2, \quad (39a)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \arctan \left(\frac{s}{r_0} \right). \quad (39b)$$

ただし， φ は J のまわりの回転角である．

図 1 に，吸い込み ($Q < 0$) が弱い場合；

$$\hat{Q} = Q / \left[r_0 \Gamma \log \left(\frac{L}{\delta} \right) \right] = -5.0,$$

$$r_0 = |X_0 \times t_0| = 2.0,$$

図 2 に，吸い込み ($Q < 0$) が強い場合；

$$\hat{Q} = -15.0, \quad r_0 = 4.0$$

の計算結果を図示した．結果は (39a, b) において， $s \geq 0$ に限ってある．

次に，2次元的な吸い込み流中でバランスしている渦糸の形を計算してみよう．これは，直線状の磁気単極紐と相互作用する荷電粒子の軌跡でもある．流れ，もしくは，磁場は，

$$V(X) = \left(\frac{Q_2 X}{2\pi r^2}, \frac{Q_2 Y}{2\pi r^2}, 0 \right) \quad (40)$$

によって与えられる．この問題は，球積法で積分することが可能であるが，式 (16) と (40) を直接数値積分した．

図3は，吸い込み ($Q_2 < 0$) が弱い場合；

$$\hat{Q}_2 = 2Q_2 / \left[\Gamma \log \left(\frac{L}{\delta} \right) \right] = -2.0 \quad ,$$

図4は，吸い込み ($Q_2 < 0$) が強い場合；

$$\hat{Q}_2 = -5.0 \quad ,$$

である． 点状の吸い込みの場合と，軌跡の形がそれほど変わらないというのが印象である．

表 1: アナロジー

	渦糸	弾性棒	対称こま	荷電粒子
A	$\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{L}{\delta} \right)$	曲げ剛性	面内の慣性 モーメント	m/q
C		ねじり剛性	軸方向の慣性 モーメント	
γ_0		単位長さ当りのねじれ角	ω_3 (軸のまわりの角速度)	
$C\gamma_0$	c_0 (すべり速度)			$-B \cdot \dot{X}$
Ωe_z	回転角速度	T_0 (内部応力)	$mgl e_z$	$-\Omega e_z \times X$ (周方向磁場)
$V e_z$	並進速度	$M_0 e_z$ (ひねり)	$M_z e_z$ (z方向の角運動量)	$-V e_z$ (z方向磁場)
t	$\partial X / \partial s$	$\partial X / \partial s$	k (対称軸)	$\dot{X}$ (速度)
s	長さ	長さ	t (時間)	t (時間)

参考文献

- [1] L. S. Da Rios: Rend. Circ. Mat. Palermo **22** (1906) 117.
- [2] M. Lakshmanan: Phys. Lett **61A** (1977) 53.
- [3] R. Betchov: J. Fluid Mech. **22** (1965) 471.
- [4] H. Hasimoto: J. Fluid Mech. **51** (1972) 477.
- [5] W. Fenchel: Math. Ann. **101** (1929) 238.
- [6] M. I. Fáry: Bull. Soc. Math. France **77** (1949) 128.
- [7] J. W. Milnor: Ann. of Math. **52** (1950) 248.
- [8] Y. Fukumoto: J. Phys. Soc. Japan **56** (1987) 4207.
- [9] R. L. Ricca: Phys. Fluids A **4** (1992) 938.
- [10] R. Takaki: J. Phys. Soc. Japan **38** (1975) 1530.
- [11] H. Aref and E. P. Flinchum: J. Fluid Mech. **148** (1984) 477.
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics* 2nd ed. (Pergamon, New York, 1987), p. 266.
- [13] S. kida: J. Fluid Mech. **112** (1981) 397.
- [14] R. L. Ricca: Nature **352** (1991) 561.
- [15] T. Levi-Civita: *Attrazione Newtoniana dei Tubi Sottili e Vortici Filiformi* (Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa, Zanichelli, Bologna, 1932).
- [16] H. Hasimoto and T. Kambe: J. Phys. Soc. Japan **54** (1985) 5.
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Theory of Elasticity* 3rd ed. (Pergamon, New York, 1986).
- [18] A. E. H. Love: *Treatise on the Mathematicak Theory of Elasticity* 4th ed. (Dover, New York, 1926).
- [19] H. Tsuru: J. Phys. Soc. Japan **56** (1987) 2309.
- [20] J. E. Marsden, T. Ratiu, and A. Weinstein: Cont. Math. **28** (1984) 55.
- [21] 中村 孔一: 明治大学教養論文集 **181** (1985) 1.

図1. 吸い込み流中の渦系

$$\hat{Q} = Q / [r_0 \Gamma \log(L/r_0)]$$

$$= -5.0,$$

$$r_0 = |X_0 \times t_0| = 2.0$$

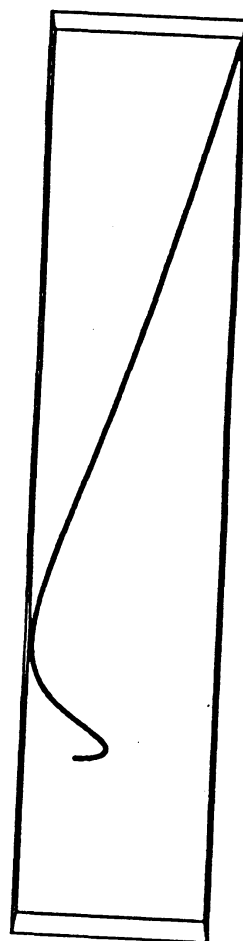
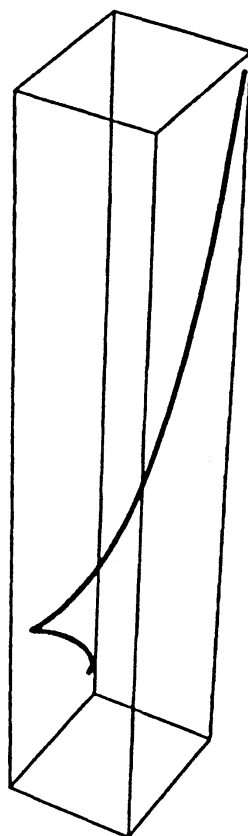
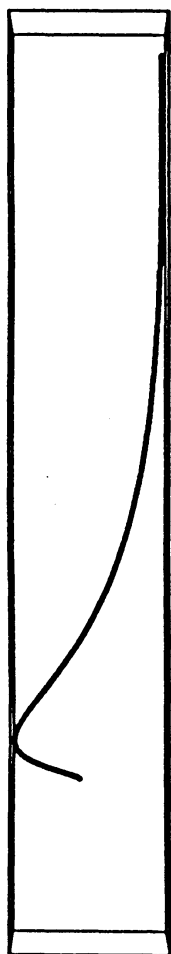
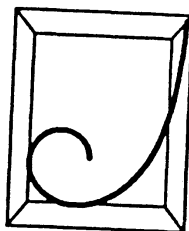


図2. 吸い込み流中の渦糸

$$\hat{Q} = Q / [r_0 \Gamma \log(\frac{L}{r_0})] = -15.0$$

$$r_0 = |x_0 \times t_0| = 4.0$$

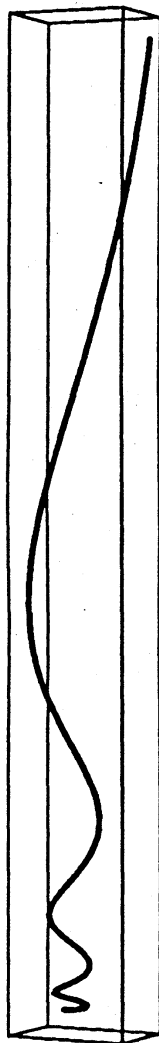
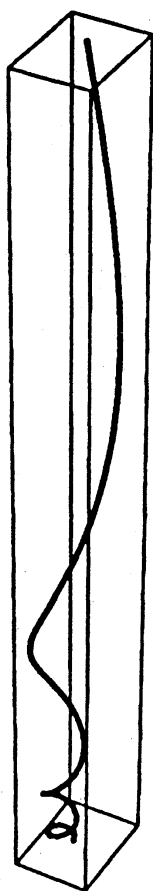
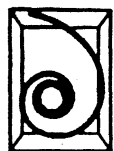
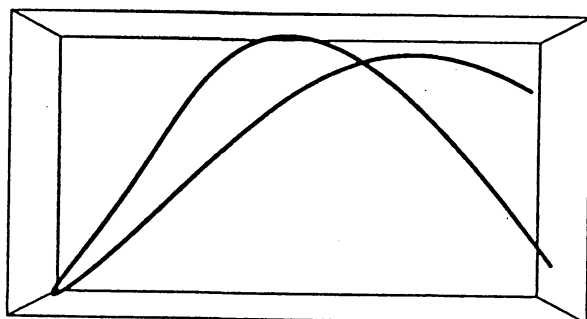


図3. 2次元(直線)吸い込み流中の渦糸



$$\hat{Q}_2 = 2\theta_2 / [\Gamma \log(\frac{L}{J})]$$

$$= -2.0$$

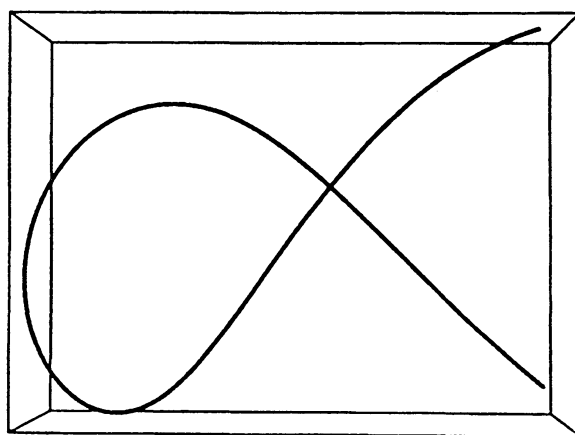
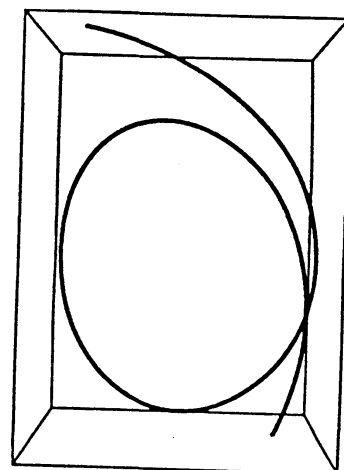
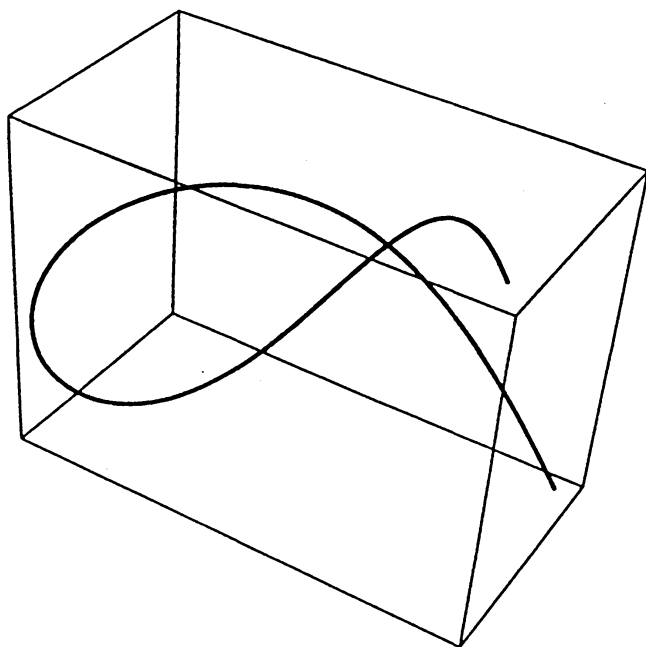


図4. 2次元(直線)吸い込み流中の渦糸

$$\hat{Q}_2 = 2\theta_2 / [\Gamma \log(\frac{L}{\delta})] = -5.0$$

