

フーリエ変換の multiplier について

東北大 理 猪 狩 惺

§ 1. 定義

λ を n 次元ユークリッド空間 R^n 上で定義された有界可測関数とするとき, $g \in \mathcal{S}(R^n)$ に対して multiplier 変換を

$$S_\lambda(x, g) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} \hat{g}(\xi) \lambda(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in R^n$$

によって定義する。ここに

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} g(y) e^{-iy\xi} dy, \quad \xi \in R^n$$

である。 $T^n = \prod_{j=1}^n [-\pi, \pi[$ とするとき, フーリエ級数の multiplier 変換は, 同様にして,

$$S_\lambda^u(x, f) = \sum_{m \in Z^n} \lambda\left(\frac{m}{u}\right) \hat{f}_m e^{imx}, \quad u > 0, x \in T^n$$

によって定義される。ここに, $f \in C^\infty(T^n)$, $\hat{f}_m$ は f の m 番目のフーリエ係数である。

$S_\lambda(g)$, $s_\lambda^u(f)$ は、夫々、フーリエ変換、級数の入による multiplier 変換といわれる。

§2. 同値性

定理1. $1 \leq p < \infty$, λ は $\mathbb{R}^n$ 上の有界関数で、不連続点の集合は零集合であるとする。もし

$$\|s_\lambda^u(f)\|_p \leq A \|f\|_p \quad \text{for all } u > 0 \text{ and } f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

ならば、

$$\|S_\lambda(g)\|_p \leq A' \|g\|_p \quad \text{for all } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ。ここに $A' = (\sqrt{2\pi})^{n/p'} A$ である。

証明. 関数 $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, を $\hat{\Phi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \max(1 - |\xi_j|, 0)$ によって定義する。そのとき、

$$\Phi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{2 \sin(x_j/2)}{x_j} \right\}^2$$

であるから、 $0 \leq \Phi \leq 1$ 。容易に分るように $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \Phi(x + 2\pi m) = (\sqrt{2\pi})^n$, $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(\xi - m) = 1$ である。

定理を証明するために、 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ はコンパクトな台をもつとしてよい。従って、 $g_u(x) = u^n g(ux)$ とおき、 $u > 0$ を $g_u(x)$ の台が $\mathbb{T}^n$ に含まれるよう十分大きくとっておく。そ

のとき仮定から.

$$\begin{aligned} \left(\int_{T^n} |s_\lambda^u(g_u)|^p dx \right)^{1/p} &\leq A \left(\int_{T^n} |g_u|^p dx \right)^{1/p} \\ &= A u^{n(1-\frac{1}{p})} \left(\int_{R^n} |g|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$h_u(x) = u^{-n} s_\lambda^u(x/u, g_u) \Phi(x/u)$ とおくと, $\Phi^p \leq \Phi$ であるから.

$$\begin{aligned} \left(\int_{R^n} |h_u|^p dx \right)^{1/p} &= u^{-n(1-\frac{1}{p})} \left(\int_{R^n} |s_\lambda^u(x, g_u)|^p \Phi^p(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq u^{-n(1-\frac{1}{p})} \left(\int_{T^n} |s_\lambda^u(x, g_u)|^p \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \Phi(x+2\pi m) dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

従って,

$$\left(\int_{R^n} |(\sqrt{2\pi})^n h_u(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq A' \left(\int_{R^n} |g|^p dx \right)^{1/p}$$

従って $\lim_{u \rightarrow \infty} (\sqrt{2\pi})^n h_u(x) = S_\lambda(x, g)$ かつすべての $x \in R^n$ に対して成り立つことを言えば, *Fatou* の lemma から求める結果が得られる。

g は無限回微分できるとしてから.

$$s_\lambda^u(x, g_u) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum \lambda\left(\frac{m}{u}\right) g\left(\frac{m}{u}\right) e^{imx}$$

従って,

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2\pi})^n \hat{h}_u(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} s_\lambda^u(x, g_u) \Phi(x) e^{-iux\xi} dx \\
 &= \sum \lambda\left(\frac{m}{u}\right) \hat{g}\left(\frac{m}{u}\right) \hat{\Phi}(u\xi - m).
 \end{aligned}$$

明らかに、 ξ が λ の連続点であれば、 $(\sqrt{2\pi})^n \hat{h}_u(\xi) \rightarrow \lambda(\xi) \hat{g}(\xi)$ ($u \rightarrow \infty$)。所で、 $u \geq \sqrt{n}$ であれば、 $\hat{\Phi}(u\xi - m) = 0$ かつすべての $|\xi - \frac{m}{u}| \geq 1$ に対して成り立つ。 g の仮定から $\sup_{|\xi-\eta| \leq 1} |\hat{g}(\eta)| \leq G(\xi)$ がある可積分関数 G に対して成り立つ。従って、

$$|(\sqrt{2\pi})^n \hat{h}_u(\xi)| \leq \|\lambda\|_\infty G(\xi), \quad u \geq \sqrt{n}$$

従って Lebesgue の定理によって、

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (\sqrt{2\pi})^n h_u(x) = S_\lambda(x, g), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

故に証明された。

次に定理 1 の逆を示そう。これは de Leeuw の定理の特別な場合であって、ここで与える証明はより初等的である。

$\mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $\lambda(\xi)$ が総和可能であるとは、ある approximate identity $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が存在して、すべての点 $\xi \in \mathbb{R}^n$ で

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon * \lambda(\xi) = \lambda(\xi)$$

が成り立つことであるとする。

定理2. (de Leeuw) $1 < p < \infty$, λ は有界総和可能な関数であるとする。もし

$$\|S_\lambda(g)\|_p \leq A \|g\|_p, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

が成りたてば、

$$\|s_\lambda^u(f)\|_p \leq A' \|f\|_p, \quad f \in C^\infty(T^n), \quad u > 0$$

が成り立つ。ここに、 $A' = cA$ で c は p に無関係な定数である。

証明. 変数変換によって、仮定が $\lambda(\xi)$ について成りたてば $\lambda(\frac{\xi}{u})$ ($u > 0$) についても成りたつから、 $u=1$ の場合を示せばよい。

$g, h \in C^\infty(T^n)$ とする。 g, h を $\mathbb{R}^n$ 上に $g=h=0$ outside T^n とおいて拡張しておく。重の定義から $t > 2$ に対しては、

$$\begin{aligned} & \sum r_1^{2|m_1|} \cdots r_n^{2|m_n|} t^n \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(\xi+m) \hat{g}(\xi+m) \hat{h}(\xi+m) \hat{\chi}^2(t\xi) d\xi \\ &= t^n \int_{\mathbb{R}^n} [\lambda(\xi) \hat{g}(\xi) \sum \hat{\chi}(t(\xi-m)) r_1^{|m_1|} \cdots r_n^{|m_n|}] \\ & \quad [\hat{h}(\xi) \sum \hat{\chi}(t(\xi-m)) r_1^{|m_1|} \cdots r_n^{|m_n|}] d\xi \end{aligned}$$

である。ここに $0 < r_1, \dots, r_n < 1$ である。今、被可積分関数の第二項を $t^{-n} \hat{H}_t(\xi)$, そして

$$t^{-n} \hat{G}_t(\xi) = \hat{g}(\xi) \sum \hat{\Phi}(t(\xi - m)) r_1^{|m_1|} \dots r_n^{|m_n|}$$

とおけば、(1) の左辺は

$$\left| t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} S_\lambda(G_t) H_t dx \right|$$

$$\leq t^{-n} \|S_\lambda(G_t)\|_p \|H_t\|_{p'} \leq A t^{-n} \|G_t\|_p \|H_t\|_{p'}$$

であさえられる。所で

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} t^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}(t(\xi - m)) e^{i\xi x} d\xi = \Phi\left(\frac{x}{t}\right) e^{imx}$$

であるから

$$G_t(x) = 2^n \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) P_r(x-y) dy$$

ここに $P_r(x)$ は Poisson 核, $P_r(x) = \prod_{j=1}^n P_{r_j}(x_j)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ である。故に

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow (1, \dots, 1)} \frac{1}{t^{n/p}} \|G_t\|_p \\ & \leq 2^n \left\{ \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\lim_r} \left[\int_{\mathbb{T}^n} |g(y)| \Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) P_r(x-y) dy \right]^p dx \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^n \left\{ \frac{1}{t^n} \sum_m \Phi^p\left(\frac{2\pi m}{t}\right) \int_{T^n} |g(y)|^p dy \right\}^{1/p} \\
&\leq (2\pi)^n \|g\|_p \left\{ \frac{1}{t^n} \sum_m \Phi\left(\frac{2\pi m}{t}\right) \right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

$t \rightarrow \infty$ のとき、最後の和は Riemann 積分の定義によつて、
 $\int_{R^n} \Phi(2\pi x) dx = (2\pi)^{-n}$ に収束する。従つて、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\lim}_r \frac{1}{t^n} \|G_t\|_p \|H_t\|_{p'} \leq (2\pi)^n \|g\|_p \|h\|_{p'}$$

又、もし φ が連続ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n \int_{R^n} \varphi(\xi) \widehat{\Phi}^2(t\xi) d\xi = (2/3)^n \varphi(0)$ であるから、(1)によつて、

$$\left| \sum \lambda(m) \widehat{g}(m) \widehat{h}(m) \right| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n (2\pi)^n A \|g\|_p \|h\|_{p'}$$

が連続な λ に対して成り立つ。一般の λ に対しては次の補助定理を用いねばよい。

補助定理. もし λ が $\|S_\lambda(g)\|_p \leq A \|g\|_p$, $g \in \mathcal{S}(R^n)$ なる multiplier ならば、任意の可積分関数 φ に対して、

$$\|S_{\lambda * \varphi}(g)\|_p \leq A \left(\int |\varphi| dx \right) \|g\|_p, \quad g \in \mathcal{S}(R^n).$$

証明. $g, h \in \mathcal{S}(R^n)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\int (\lambda * \varphi) \widehat{g} \widehat{h} d\xi &= \int \varphi(y) dy \int \widehat{g}(\xi) \widehat{h}(\xi) \lambda(\xi - y) d\xi \\
&= \int \varphi(y) dy \int S_\lambda(g e^{iy \cdot}) h e^{iy \cdot x} dx.
\end{aligned}$$

最後の項は $\|\varphi\|_1 \|S_\lambda(g e^{i\varphi})\|_p \|h\|_{p'} \leq \|\varphi\|_1 A \|g\|_p \|h\|_{p'}$ であ
 さえられる。

§ 3. 応用

(I) 多変数フーリエ級数の発散. $f \in L^1(T^n)$ に対して
 $(B-R, \sigma)$ 和 $S_R^\sigma(x, f)$ は次式で定義される。

$$S_R^\sigma(x, f) = \sum_{|m| < R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\sigma \hat{f}_m e^{imx}$$

定理3. もし $1 \leq p \leq 2n/(n+1+2\sigma)$ なら $L^p(T^n)$ の関
 数が存在して、その $(B-R, \sigma)$ 和は L^p 収束しない。従って
 $1 \leq p < 2n/(n+1+2\sigma)$ なら $L^p(T^n)$ の関数が存在して、その
 $(B-R, \sigma)$ 和は a. e. ¹⁾ 発散する。²⁾

証明. $g \in \mathcal{S}(R^n)$ に対して

$$S^\sigma(x, g) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|\xi| \leq 1} (1 - |\xi|^2)^\sigma \hat{g}(\xi) d\xi$$

とおく。特に $\hat{g} = 1$ on $|\xi| \leq 1$ であれば $S^\sigma(x, g) = 2^\sigma \Gamma(n\sigma) J_{\frac{n}{2}+\sigma}(|x|) / |x|^{\frac{n}{2}+\sigma}$ である。従って、 $S^\sigma(g) \notin L^p(R^n)$ if
 $1 \leq p \leq 2n/(n+1+2\sigma)$ 。一方 $g \in L^1(T^n)$ for $1 \leq p \leq \infty$ 。
 故に multiplier の同値性から定理の前半を得る。後半は
 Stein の作用素列に関する定理 [3] から明らか。

(II). α を R^n の点とすると、 $f \in L^2(T^n)$ に対して $\hat{f}$ を

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{m, \alpha \geq 0} \hat{f}_m e^{im \cdot x}$$

によって定義すれば, Bochner の定理によって, $\|\tilde{f}\|_p \leq 4_p \|f\|_p$, $1 < p < \infty$, である。この定理は一変数のフーリエ級数に対する, M. Riesz の定理と, multiplier の同値性によって, 同値である。

(III). Γ を $\mathbb{R}^n$ の開, 凸集合で $r\Gamma \subset \Gamma$ for all $r > 0$ をみたすとする。 $T_\Gamma = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^n, y \in \Gamma\}$ とする。

$H^p(T_\Gamma)$, $p > 0$, は T_Γ 上の解析関数で, x につき週期的

$$\|f\|_p = \sup_{y \in \Gamma} \left(\int_{\Gamma} |f(x + iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

なる関数 f の集合とする。このとき, $p \geq 1$ なら任意の $f(x + iy) \in H^p(T_\Gamma)$ に対して境界関数 $f(x)$ が存在して

$$f(x + iy) = \sum_{m \in \Gamma^*} \hat{f}_m e^{im(x + iy)}, \quad x + iy \in T_\Gamma$$

である。ここに $\hat{f}_m$ は $f(x)$ のフーリエ係数, $\Gamma^* = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \xi x \geq 0 \text{ for all } x \in \Gamma \}$ 。今 T を $f \in L^p(T^n)$ に対して

$$Tf = \sum_{m \in \Gamma^*} \hat{f}_m e^{im(x + iy)}, \quad x + iy \in T_\Gamma$$

によって定義される analytic contraction とする。 $n = 1, 2$ ならば, すべての $1 < p < \infty$, Γ に対して $T: L^p \rightarrow H^p(T_\Gamma)$ は

有界である。しかし例えば $\Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 > (x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}\}$ とすれば $1 \leq p \leq 2(n-1)/n$, $n > 3$ に対して $T: L^p \rightarrow H^p(\Gamma)$ は非有界である。

証明は (I) の場合とほぼ同様にしてなされる。

1). a, e は “すべての点” におきかえられる。その証明は [2] にある。

2). $\sigma = 0$ の場合は *E. M. Stein* が示している。しかしその証明を著者は知らない。

参 考 文 献

- [1] K. de Leeuw, On L^p multipliers, Ann. Math. 81(1965), 364-379.
- [2] S. Igari, Lectures on Fourier Series of Several Variables, (1968) The Univ. of Wis.
- [3] E. M. Stein, On limits of sequences of operators, Ann. Math. 74(1961), 140-170.