

## 合成写像の安定性

千葉大 理 中居 功

Single mapping の安定性, 普遍開折, 分類の理論は, H. Whitney, R. Thom, J. Mather 等により発展した。以下ではこれらの理論が smooth mapping の diagram に対してどのように展開されるかを示す。

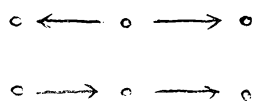
H. Whitney は [7] の中で generic な  $(\mathbb{R}^2, 0)$  から  $(\mathbb{R}^2, 0)$  への mapping は fold と cusp しかないことを示した。更に R. Thom は 横断性の概念と Malgrange の割り算定理を用いて特異点の理論を展開した。これらの理論は, J. Mather の一連の論文によってまとめられている。要約すると、割り算定理 [M. I], adequate homomorphism の理論 [M. II], 有限確定性 [M. III], contact class の導入 [M. IV], Ricci range の決定 [M. IV] と言えるだろう。J. Mather は更に, H. Whitney, R. Thom による stratification の理論を使って、

Topological stability theorem を証明した [6]。

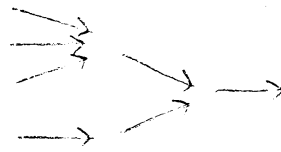
合成写像の特異点の問題は、F. Pham, R. Thom により、  
 Landau の特異点に関する問題として提起された [5]。今  
 我々は 合成写像、更に一般に smooth mapping の diagram  
 の分類、特異点の安定性に興味を持つ。この問題は非常に  
 膨大であり すべてを含む一般的な理論は期待できない。  
 例えば、次の図式は 可微分写像を共役で分類する問題を表  
 わす。



また次の図式は submanifold の projection や, variety の  
 projection の問題を含んでいる。(V.I. Arnold [1, 2])



合成写像の大域的な安定性 (C<sup>0</sup>) を研究するために  
 adequate homomorphism の理論が依然有効であることが  
 J. Mather, N. Baas により示されているが、このことは F.  
 Latour [8] の中にすでに見られる。合成写像の germ の  
 安定性を研究する場合にも この方法を精密化することによ  
 って さまざまな定理を証明できる。以下に挙げる結果  
 は すべて tree diagram にまで自然に一般化される。



$p_i, (i=1, \dots, k)$  を正整数,  $f_i, g_i \in E(p_i, p_{i+1}), (i=1, \dots, k-1)$  を  $C^\infty$ -map-germ とする。以下,  $E(m, p)$  は  $C^\infty$ -map-germ  $f: (R^m, 0) \rightarrow (R^p, 0)$  全体を示し,  $E(m, 1)$  を単に  $E(m)$  と書く。  
 $f = \{f_i\}_{i=1}^{k-1}, g = \{g_i\}_{i=1}^{k-1}: (R^{p_1}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (R^{p_k}, 0)$  に対し,  $\text{hom}(f, g)$  とは,  $C^\infty$ -map-germ の  $k$ -tuple  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k), \varphi_i \in E(p_i, p_i), (i=1, \dots, k)$  で,  $g_{i+1} \circ \varphi_i = \varphi_{i+1} \circ f_i, (i=1, \dots, k-1)$  となるもの全体の集合のことをいう。 $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^k \in \text{hom}(f, g)$  のとき  $\varphi: f \rightarrow g$  と書く。  
 $f, g, h: (R^{p_1}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (R^{p_k}, 0), \varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^k: f \rightarrow g, \psi = \{\psi_i\}_{i=1}^k: g \rightarrow h$  とすると  $\varphi$  と  $\psi$  の合成  $\psi \circ \varphi: f \rightarrow h$  は  $\psi \circ \varphi = \{\psi_i \circ \varphi_i\}_{i=1}^k$  で定義される。 $\varphi' \in \text{hom}(g, f)$  が存在し,  $\varphi' \circ \varphi = 1 = \{\text{id}_{R^{p_i}}\} \in \text{hom}(f, f)$  となるとき  $f$  と  $g$  は同値であるという。

**定義**  $f = \{f_i\}_{i=1}^k: (R^{p_1}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (R^{p_k}, 0)$  が  $C^\infty$ -stable であるとは,  $f$  の任意の代表元  $\hat{f} = \{\hat{f}_i\}_{i=1}^{k-1}, \hat{f}_i: (\pi_i, 0) \rightarrow (R^{p_{i+1}}, 0)$ ,  $\pi_i$  は  $0 \in R^{p_i}$  の近傍, に対し返り立つことをいう。 $C^\infty(\pi_1, R^{p_2}) \times \dots \times C^\infty(\pi_{k-1}, R^{p_k})$  の weak  $C^\infty$ -topology で  $\hat{f}$  に十分近い  $\hat{g} = \{\hat{g}_i\}_{i=1}^{k-1}$  に対し,  $(x_1, \dots, x_k) \in \pi_1 \times \dots \times \pi_{k-1} \times R^{p_k}$  が存在し  $\hat{g}: (\pi_1, x_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\pi_{k-1}, x_{k-1}) \rightarrow (R^{p_k}, x_k)$  となり。

をそれぞれ  $0 \in \mathbb{R}^{P_i}$  に平行移動する座標変換して得られる sequence  $g = \tilde{g}$  at  $(x_1, \dots, x_k) : (\mathbb{R}^{P_1}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\mathbb{R}^{P_k}, 0)$  が  $f$  と同値になる。  $\parallel$

$\theta(P_i) = \mathcal{P}_0^\infty(T\mathbb{R}^{P_i})$ ,  $\theta(f_i) = \mathcal{P}_0^\infty(f_i^* T\mathbb{R}^{P_{i+1}})$  を  $C^\infty$ -section の germ 全体のなす finite  $\theta(P_i)$ -module とする。  $\tau f_i : \theta(P_i) \rightarrow \theta(f_i)$  と  $\tau f_i(w_i) = df_i(w_i)$ ,  $w_i \in \theta(P_i)$  によって,  $\omega f_i = \theta(P_{i+1}) \rightarrow \theta(f_i)$  と  $\omega f_i(w_{i+1}) = f_i^*(w_{i+1})$ ,  $w_{i+1} \in \theta(P_{i+1})$  によって定義する。  $T(f) : \bigoplus_{i=1}^K \theta(P_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{K-1} \theta(f_i)$  と  $T(f)(0 \oplus \dots \oplus w_i \oplus \dots \oplus 0) = (0 \oplus \dots \oplus \omega f_{i-1}(w_i) \oplus \tau f_i(w_i) \oplus 0 \dots \oplus 0)$ ,  $w_i \in \theta(P_i)$  で定義する。

定義  $f = \{f_i\}_{i=1}^{K-1} : (\mathbb{R}^{P_1}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\mathbb{R}^{P_K}, 0)$  が infinitesimally stable とは  $T(f) : \bigoplus_{i=1}^K \theta(P_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{K-1} \theta(f_i)$  が 全射になることをいう。

(注意) Infinitesimal stability は  $f$  の無限小の変化がすべて無限小座標変換で与えられることを示している。

Jet space, jet section を次のように定義する。

$J^e(\mathbb{R}^{P_1}, \dots, \mathbb{R}^{P_K}) = J^e(\mathbb{R}^{P_1}, \mathbb{R}^{P_2}) \times \dots \times J^e(\mathbb{R}^{P_{K-1}}, \mathbb{R}^{P_K}) \times \mathbb{R}^{P_K}$ ,  $J^e(P_1, \dots, P_K) = J^e(P_1, P_2) \times \dots \times J^e(P_{K-1}, P_K)$  とする。  $J^e f : \mathbb{R}^{P_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{P_K} \rightarrow J^e(\mathbb{R}^{P_1}, \dots, \mathbb{R}^{P_K})$  と  $J^e f(x_1, \dots, x_K) = (J^e f_1(x_1), \dots, J^e f_{K-1}(x_{K-1}), x_K)$ ,  $(x_1, \dots, x_K) \in \mathbb{R}^{P_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{P_K}$  で定義する。  $J^e(\mathbb{R}^{P_1}, \dots, \mathbb{R}^{P_K})$  を

$J^L(P_1, \dots, P_k) \times \mathbb{R}^{P_1} \times \mathbb{R}^{2P_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{2P_k}$  と同一視し,  $\pi: J^L(\mathbb{R}^{P_1}, \dots, \mathbb{R}^{P_k}) \rightarrow \mathbb{R}^{P_1} \times \mathbb{R}^{2P_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{2P_k}$  を第2成分への射影とする.  $\Delta_j = \{(x_1, x_2', x_2, \dots, x_{k-1}', x_{k-1}, x_k', x_k) \in \mathbb{R}^{P_1} \times \mathbb{R}^{2P_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{2P_k}; x_i' = x_i, i=1, \dots, k\}$  とする.  $z^L \in J^L(\mathbb{R}^{P_1}, \dots, \mathbb{R}^{P_k})$  は  $\pi^{-1}(\Delta_j)$  に含まれる時のみ合成写像  $f^j = \{f_i\}_{i=j}^{k-1}: (\mathbb{R}^{P_j}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\mathbb{R}^{P_k}, 0)$  を意味している.  $f = \{f_i\}_{i=j}^{k-1}$  について考察する時,  $f$  の subsequence についても同時に考えることになる.  $L(P_i) \subset \mathcal{E}(P_i, P_i)$  を local diffeo. 全体のなす群,  $L(P_j, \dots, P_k) = L(P_j) \times \dots \times L(P_k)$  とする.  $\phi = \{\phi_i\}_{i=j}^{k-1} \in L(P_j, \dots, P_k)$ ,  $f = \{f_i\}_{i=j}^{k-1}$  に対し  $\phi(f) = \{\phi_i \circ f_i \circ \phi_i^{-1}\}_{i=j}^{k-1}$  とすると,  $L(P_j, \dots, P_k)$  は sequence 全体に群として作用し, lie 群  $L^L(P_j, \dots, P_k)$  の  $J^L(P_j, \dots, P_k)$  への semi-algebraic な作用を導く.  $f$  の  $L(P_j, \dots, P_k)$  による Orbit を  $O(f)$ ,  $J^L(P_j, \dots, P_k)$  への射影を  $\mathcal{O}^L(f)$  と書く. 定理 1 によると, 上に挙げた stability, infinitesimal stability, また十分大きな  $L$  に対して  $J^L f$  至  $\mathcal{O}^L(f) \times \Delta_1$  が同値になる.

$f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  が  $L$ -同値とは, pull-back  $f^*, g^*: \mathcal{E}(p) \rightarrow \mathcal{E}(n)/m(n)^{L+1}$  が algebra の homomorphism として同型になることをいう.  $f, g$  が contact 同値であるとは,  $Q(f) = \mathcal{E}(n)/f^*m(p) \cdot \mathcal{E}(n)$ ,  $Q(g) = \mathcal{E}(n)/g^*m(p) \cdot \mathcal{E}(n)$  が algebra として同型になることをいう. J. Mathen (III, IV) により次のこと

が知られている。

(1)  $f$  が  $\Delta$ stable で  $f, g$  が  $p$ -同値  $\Rightarrow f, g$  は同値。

(2)  $f$  が  $\Delta$ stable で  $f, g$  が contact-同値  $\Rightarrow f, g$  は同値。

これらは、合成写像に対して、ある種の *determinacy* として一般化される。  $a_i \in \{0, 1, \dots, \infty, *\}$ ,  $i=1, \dots, K$ ,  $I =$

$(a_1, \dots, a_K)$ ,  $I+1 = (a_1+1, \dots, a_K+1)$  とする。但し  $\infty+1 = \infty$ ,  $*+1 = *$ 。

$$f^* m^{I+1} \cdot \varepsilon(p_i) = (m(p_i)^{a_1+1} + \dots + (f_{K-1} \circ \dots \circ f_i)^* m(p_K)^{a_K+1}) \cdot \varepsilon(p_i)$$

,  $i=1, \dots, K$  とする。但し  $m(p_i)^* = 0$ 。  $Q_I^*(f) : \varepsilon(p_i) / f^* m^{I+1} \cdot \varepsilon(p_i)$

$\leftarrow \dots \leftarrow \varepsilon(p_K) / f^* m^{I+1} \cdot \varepsilon(p_K)$  を  $f^*$  から導かれるもの、また

$g$  に対しても  $Q_I^*(g)$  を同様に定義する。

定義  $f, g$  が  $I$ -同値とは、 $Q_I^*(f), Q_I^*(g)$  が algebra の homomorphism の sequence として同型になることをいう。

今、上の (1)(2) は この定義でいうと次のようになる。

(3)  $f$  が  $\Delta$ stable で  $f, g$  が  $(p, 0)$ -同値  $\Rightarrow f, g$  は同値

或いは  $(*, *)$ -同値。  $f$  の  $I$ -同値類を  $O_I(f)$ 、その

$J^L(p_1, \dots, p_K)$  への射影を  $O_I^L(f)$  と書く。

命題  $O_I^L(f)$  は  $J^L(p_1, \dots, p_K)$  の中の smooth submanifold をなす。但し  $I = (a_1, \dots, a_K)$ ,  $a_i \neq 0$ ,  $i=1, \dots, K$ 。

定義  $f = \{f_i\}_{i=1}^{k-1} : (\mathbb{R}^{p_1}, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathbb{R}^{p_k}, 0)$  が  $I$ -transversal  
 とは  $\forall \Delta$  に対し  $\exists f \in \mathcal{O}_I^{\Delta}(f) \times \Delta_1$  となることをいう。  
 ( $a_i = 0$  に対しては、上の transversality は意味を持たないが、  
 代数的に定義される [4]。)

$f = \{f_i\}_{i=1}^{k-1} : (\mathbb{R}^{p_1}, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathbb{R}^{p_k}, 0)$  に対し、 $e_I(f) = (e_I^1(f), \dots, e_I^k(f))$  を  $e_I^{i-1}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \theta(P_i)/f^* m^{I+1} \cdot \theta(P_i) + e_I^i(f)$  で定義する。  
 $e(f) = (e^1(f), \dots, e^k(f)) \in \mathbb{Z}^k$  を  $e_{e(f)} = e(f)$ ,  $e^k(f) = 0$  となる唯一の  $k$ -tuple とする。明らかに  $f, g$  が  $e(f)$ -同値ならば  $e(f) = e(g)$  となる。

さて 我々の定理は次のものである。

定理1 次の条件は同値。

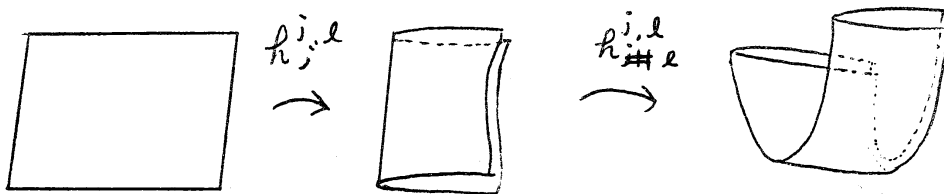
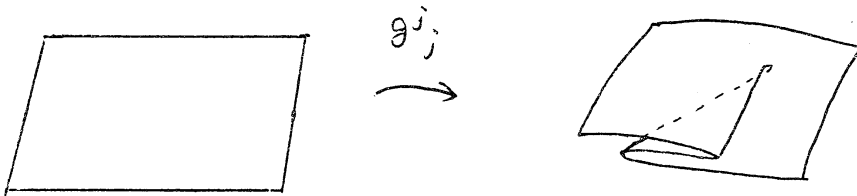
- (a)  $f$  は stable
- (b)  $f$  は infinitesimally stable
- (c)  $f$  は  $(*, \dots, *)$ -transversal
- (d)  $f$  は  $e(f)$ -transversal
- (d')  $\exists e^{e(f)} f \in \mathcal{O}_{e(f)}^{e^{e(f)}}(f) \times \Delta_1$

定理2  $f = \{f_i\}_{i=1}^{k-1}$  が stable ならば、 $f$  は  $e(f)+1$  determined;  $f, g$  が  $e(f)+1$ -同値ならば  $f, g$  は同値。

注意 定理 2 は P. 6 (3) の拡張になっている。  $\text{eff-determinacy}$  が証明されるべきだが、まだなされていない。

定理 3  $f = \{f_i\}_{i=1}^{k-1} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  で  $\Delta$ -stable なものは 次のいずれかに同値,

- (1)  $g^{j,\#} = \{g_i^{j,\#}\}_{i=1}^{k-1} \begin{cases} g_i^{j,\#} = \text{id.}, & i=1, \dots, j-1, j+1, \dots, k-1 \\ g_j^{j,\#}(x, y) = (x^3 + xy, y) \end{cases}$   
(Cusp)
- (2)  $h^{j,\#} = \{h_i^{j,\#}\}_{i=1}^{k-1} \begin{cases} h_i^{j,\#} = \text{id.}, & i=1, \dots, j-1, j+2, \dots, k-1 \\ h_j^{j,\#}(x, y) = (x^2, y) \\ h_{j+1}^{j,\#}(x, y) = (x-y, y^2) \end{cases}$   
(fold)



証明は Whitney の写像と 定理 1 から従う。

合成写像の Topological stability theorem (定理) の証明は およそ二つの理論によっている。一つは map-germ の sequence の stability, unfolding の理論。もう一つは R. Thom, H. Whitney による Second Isotopy lemma である。後者は stratified sequence の局所自明性を主張するもので、可微分写像の sequence の族の位相的自明性を示すのに使われる。前者は 可微分写像の sequence の stratification をある意味で Canonical に与えるのに使われる。

$F = \{F_i\}_{i=1}^{k-1} : (\mathbb{R}^{p_1+r}, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathbb{R}^{p_{k-1}+r}, 0)$ ,  $i : (\mathbb{R}^{p_k}, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{p_k+r}, 0)$  を埋込みとする。  $i \circ (F_{k-1} \circ \cdots \circ F_1)$  ならば 次々に fiber square をとることにより  $i$  で lift した smooth map-germ の sequence  $f$  が定義される。

$$\begin{array}{ccccccc} f : (\mathbb{R}^{p_1}, 0) & \rightarrow & (\mathbb{R}^{p_2}, 0) & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & (\mathbb{R}^{p_{k-1}}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p_k}, 0) \\ \downarrow & \square & \downarrow & & \cdots & & \downarrow \square \downarrow \end{array}$$

$$F : (\mathbb{R}^{p_1+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p_2+r}, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathbb{R}^{p_{k-1}+r}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p_k+r}, 0)$$

このとき  $i : f \hookrightarrow F$  と書き、 $F$  を  $f$  の unfolding という。

$F$  は適当な座標変換により  $F_i(x_i, u_i) = (\tilde{f}_i(x_i, u_i), u_i)$ ,  $\tilde{f}_i(x_i, 0) = f_i(x_i)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^r$  の型になることがわかる。

以下すべてこの型のものとする。  $F, G$  を

それぞれ  $1, \dots, k$  次元の  $f$  の unfolding とする。  $\phi = \{\phi_i\}_{i=1}^k : F \rightarrow G$  が  $f$  の unfolding の morphism であるとは 次の

図式が可換になることをいう。

$$\begin{array}{ccc} i: f & \xrightarrow{\pi} & F \\ & \searrow \pi & \downarrow \phi \\ & & G \end{array}$$

定義  $f$  の任意の unfolding  $G$  に対して、unfolding の morphism  $\phi: G \rightarrow F$  があるとき  $F$  を  $f$  の versal unfolding という。(一般に  $F, G$  のパラメータ次元は違う。)

$$F = \{F_i\}_{i=1}^{k-1}, \quad F_i(x_i, u_i) = (\hat{f}_i(x_i, u_i), u_i), \quad (x_i, u_i) \in \mathbb{R}^{p_i+r}.$$

$\hat{f}_i(x_i, 0) = f_i(x_i)$  を  $f = \{f_i\}$  の unfolding とする。

$f_u = \{f_{u,i}\}_{i=1}^{k-1}$ ,  $f_{u,i}(x_i) = \hat{f}_i(x_i, u)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  と定義し sequence の族とみなす。

定義  $f$  の unfolding  $F$  が I-transversal とは、Jet

section の族  $J^e \hat{f}: \mathbb{R}^{p_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_k} \times \mathbb{R}^r \rightarrow J^e(\mathbb{R}^{p_1}, \dots, \mathbb{R}^{p_k})$ ,

$J^e \hat{f}(x_1, \dots, x_k, u) = J^e f_u(x_1, \dots, x_k)$  が 任意の  $x$  に対し

て  $\mathcal{O}_x^e(f) \times \Delta_1$  に 横断的に交わることをいう。

定理々  $F$  を  $f$  の unfolding とする。このとき、次の条件はすべて同値。

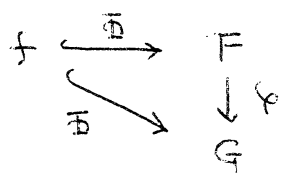
- (1)  $F$  は stable
- (2)  $F$  は versal
- (3)  $F$  は  $I$ -transversal,  $I = (*, \dots, *, 0)$ 。但し、 $I$ -同値類は多様体であることが証明されていないので、代数的に定義を与える。詳しくは [4]。

定理5  $J^m(p_1, \dots, p_k)$ ,  $p_i < p_j, i < j$  の中に projective semialgebraic set  $\Sigma$ ,  $\text{Codim } \Sigma = \infty$  が存在し、 $J^m - \Sigma \ni \Sigma$  ならば  $\Sigma$  は stable unfolding を持つ。

定理6  $f = \{f_i\}_{i=1}^{k-1}$  を map-germ の sequence とする。次の条件は同値。

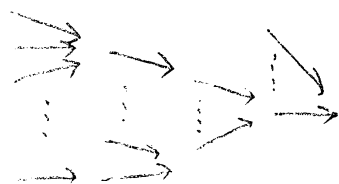
- (1)  $f$  は stable unfolding を持つ。
- (2)  $f$  は  $I$ -transversal unfolding を持つ。ここで  $I = (*, \dots, *, a_k)$ ,  $a_k$

定理7  $I = (*, \dots, *, a_k)$ ,  $a_k > 0$  とする。 $f$  の  $I$ -transversal unfolding は unfolding として一意に定まる。すなわち、 $F, G$  を  $f$  の  $r$  次元の  $I$ -transversal unfolding とすると、unfolding の isomorphism  $\phi = \{\phi_i\}_{i=1}^k$  が存在し、次の図式が可換になる。



また、 $S$ 次元 ( $S > t$ ) の  $I$ -transversal unfolding  $H$  は、 $F$  の自明な拡張と同等になる。

上の定理等により  $J^N - \Sigma$  の元は唯一つの stable ( $I$ -transversal) unfolding を持つ。これらの定理は、そのほか次の図式の場合にまで拡張することができる。



$G$  を有向グラフ、 $V$  をその頂点の集合、 $L$  を辺の集合とする。 $\alpha(\ell)$  で  $\ell \in L$  の始点を  $\omega(\ell)$  で終点を表わす。

また各頂点  $v \in V$  に多様体  $M_v$  が与えられているものとする。

$v \in V$  で、 $\forall \ell \in L$  に対し  $\alpha(\ell) \neq v$  となるものの集合を  $V_\omega$  と書く。合成写像のときと同様に

$J(G) = \prod_{\ell \in L} J(M_{\alpha(\ell)}, M_{\omega(\ell)}) \times \prod_{v \in V_\omega} M_v$  とする。各  $\ell \in L$

に対し、可微分写像  $f_\ell: M_{\alpha(\ell)} \rightarrow M_{\omega(\ell)}$  が与えられている

とき  $f = \{f_\ell\}_{\ell \in L}$  を  $G$  上の可微分写像という。

$Jf: \prod_{v \in V} M_v \rightarrow J(G)$  を  $Jf(\{\alpha_v\}_{v \in V}) = (\{Jf_e(\alpha_{\alpha(e)})\}_{e \in E}, \{\alpha_v\}_{v \in V})$  で定義する。  $\pi: J(G) \rightarrow \prod_{e \in E} (M_{d(e)} \times M_{w(e)}) \times \prod_{v \in V} M_v$  を自然な射影とする。この  $J(G)$  に対して Thom の横断性定理が成り立つのは明らかである。

今、合成写像  $f = \{f_i\}: M_1^{m_1} \rightarrow \dots \rightarrow M_k^{m_k}$  の位相安定性について考える。このとき我々はグラフ  $M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_k$  の  $\prod_{i=1}^k (m_i+1)$  個のコピーについて考える。

$$G \quad \left. \begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \longrightarrow & & \longrightarrow & & & \\ \longrightarrow & \longrightarrow & & \longrightarrow & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ \longrightarrow & \longrightarrow & & \longrightarrow & & & \end{array} \right\} \prod_{i=1}^k (m_i+1)$$

$$\pi: J(G) \rightarrow \prod_{e \in E} (M_{d(e)} \times M_{w(e)}) \times \prod_{v \in V} M_v \\ = (M_1 \times M_2^2 \times \dots \times M_k^2)^{\prod_{i=1}^k (m_i+1)}$$

を自然な射影とする。  $\Gamma = (\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, K}^{j=1, \dots, \prod(m_i+1)}, \{\tilde{\alpha}_j\}_{j=1, \dots, \prod(m_k+1)}^{i=2, \dots, K})$   
 $\in (M_1 \times M_2^2 \times \dots \times M_k^2)^{\prod_{i=1}^k (m_i+1)}$

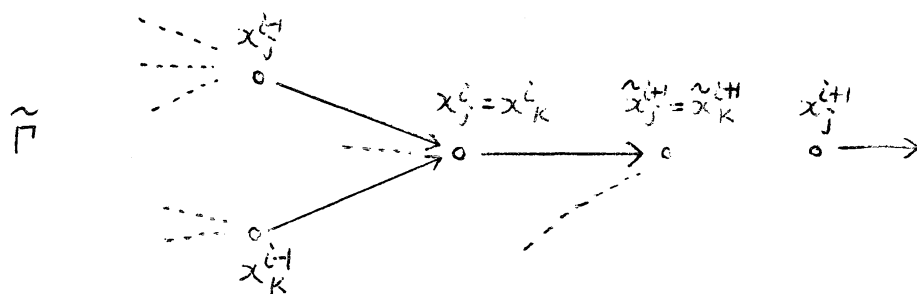
$$\Gamma \quad \begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 \rightarrow \tilde{\alpha}_1^2 & \alpha_1^2 \rightarrow \tilde{\alpha}_1^3 & & \dots & & \alpha_1^{K-1} \rightarrow \tilde{\alpha}_1^K & \alpha_1^K \\ \alpha_2^1 \rightarrow \tilde{\alpha}_2^2 & \alpha_2^2 \rightarrow \tilde{\alpha}_2^3 & & & & \alpha_2^{K-1} \rightarrow \tilde{\alpha}_2^K & \alpha_2^K \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\pi(c)}^1 \rightarrow \tilde{\alpha}_{\pi(c)}^2 & \alpha_{\pi(c)}^2 \rightarrow \tilde{\alpha}_{\pi(c)}^3 & & & & \alpha_{\pi(c)}^{K-1} \rightarrow \tilde{\alpha}_{\pi(c)}^K & \alpha_{\pi(c)}^K \end{array}$$

$\Gamma$  は次の条件を満たしているとする。

$$(1) \quad x_j^i = x_k^i \Rightarrow \tilde{x}_j^i = \tilde{x}_k^i$$

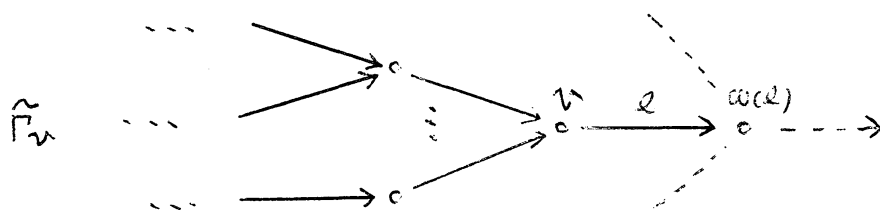
$$(2) \quad \tilde{x}_j^i = x_j^i, \quad \tilde{x}_j^i = \tilde{x}_k^i \Rightarrow \tilde{x}_k^i = x_k^i$$

このとき、図式  $\Gamma$  において 等号が成り立つ頂点を同一視すると 次のような 樹木ができる



これを  $\tilde{\Gamma}$  と書く。(一般に連結にはならない。) 同じ樹木

$\tilde{\Gamma}$  を表わす  $\Gamma$  全体を  $\Delta\tilde{\Gamma}$  と書く。  $V_{\tilde{\Gamma}}$  を  $\tilde{\Gamma}$  の頂点全体の集合とする。  $v \in V_{\tilde{\Gamma}}$  に対し  $\tilde{\Gamma}_v$  を  $v$  に流れこむ頂点と辺、  $\alpha(e) = v$  となる辺、  $\omega(e)$  とから成り立つ樹木と定義する。



$z \in \pi^{-1}(\Gamma)$  は  $\tilde{\Gamma}_v$  上の可微分写像 (germ) としての stable unfolding  $F_z$  を持つとしてよい (定理 5.6.7),  $(m_i < m_j, i < j)$ 。  $F_z$  の Thom stratification の頂点  $v$  の原点を含む stratum  $m_i$  の余次元を  $C_v(z)$  と書く。

我々の考えている Jet space  $J(G)$  を 自然数の tuple  $\{C_n(Z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\pi(Z) \in \Delta \hat{\pi}$  と  $\Gamma$  によって分割を与え、更に細分すると  $J(G)$  の Whitney stratification になる。これを  $\mathcal{S}_G$  と書こう。

定義  $f = \{f_i\}_{i=1}^{K-1} : M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_K$  が  $C^0$ -stable とは、 $\prod_{i=1}^K C^0(M_i, M_{i+1})$  の中で  $f$  に十分近い  $g = \{g_i\}_{i=1}^{K-1}$  が  $f$  と  $C^0$ -同値； 位相同型  $\varphi_i : M_i \rightarrow M_i$ ,  $i=1, \dots, K$  が存在して  $\varphi_{i+1} \circ f_i = g_i \circ \varphi_i$ ,  $i=1, \dots, K-1$ ； となることをいう。

定理 8  $M_i^{m_i}$ ,  $i=1, \dots, K$  を compact 多様体で、 $i < j$  のとき  $m_i < m_j$  とする。  $f \in \prod_{i=1}^{K-1} C^0(M_i, M_{i+1})$  は、 $J^{\mathbb{Q}}(f^{\prod(m_i+1)})$  が十分大きな  $\varepsilon$  に対し  $\mathcal{S}_G$  に横断的に交わるならば  $C^0$ -stable。

定理 9 定理 8 の仮定のもとで、 $C^0$ -stable な 合成写像は  $\prod_{i=1}^{K-1} C^0(M_i, M_{i+1})$  の中で open dense な部分集合をなす。

注意 (1) 定理 5 の仮定；  $i < j$ ,  $p_i < p_j$ ； が 除去されれば、以下の定理はすべて一般に成り立つ。

(2) A, D, E 以外の図式において,  $C^{\infty}$ -map-germ の第一近似 (線型写像) の分類ですでは moduli が現われることが示されている [2]。

(3) Landau 特異点の分類は 次の図式の問題に含まれる。



安定な Landau 特異点は, 定理 1~7 で分類できる。

- [1] V.I. Arnold, Wave Front Evolution and Equivariant Morse Lemma, Communications on pure and applied Mathematics, XXIX, 1976, pp. 557-582.  
 ———, Indices of Singular Points of 1-Forms on a Manifold With Boundary, Convolution of Invariants of Reflection Groups and Singular Projections of Smooth Surfaces, Russian Math. Surveys, 34:2 (1979) 1-42.
- [2] I.N. Bernstein, I.M. Gel'fand and V.A. Ponomarev, Coxeter Functors and Gabriel's Theorem. Russian Math. Survey 28, (1973) 17-32.
- [3] J.N. Mather, I ~ VI
- [4] I. Nakai, Structural Stability of Composed Mappings, I (preprint), II (in preparation)
- [5] F. Pham, Singularités des processus de diffusion multiple, Ann. Inst. Henri Poincaré, VI n° 2, 1967 39-208. (section A).
- [6] J.N. Mather, Stratifications and Mappings in Dynamical systems ed. M. Peixoto 1973
- [7] H. Whitney, On Singularities of Mappings of Euclidean space I. Ann. of Math 62.3 1955, 374-410.

- [8] F. Latour, Stabilité des champs d'applications différentiables, C. R. Acad. Sc. Paris t. 268 (2-1969) Série A - 1331.