

超伝導に於ける秩序度のゆらぎ

東北大学理 真 木 和 美

§ 1. はじめに

一般に超伝導に於ける秩序度のゆらぎに関する問題は

- a) 熱力学的ゆらぎ
- b) 動的ゆらぎ

の二つに分けることができる。a) の現象は正常状態，超伝導状態の転移点近傍に於ける種々の熱力学的量に表われる臨界指数，あるいは輸送係数の臨界指数との関連に於いて議論されるが，b) の問題は不均一超伝導体（すなわち秩序度 $\Delta(\mathbf{r})$ が空間的に変動する場合，例えば第二種超伝導体における渦糸状態）に普遍的な現象をとりあつかう。ここでは話を a) の場合に限ることにする。

熱力学的ゆらぎの問題についても対象として，

- 1) $T \sim T_c$ の近傍に於ける第一種超伝導でのゆらぎ，
- 2) $H \sim H_{c2}$ (H_{c2} は第二臨界磁場といわれ，渦糸状態が二次の相転移によって正常状態に転移する磁場) の近傍に於ける第二種超伝導でのゆらぎにわたることができる。

一般に云えば熱力学現象を古典近似の範囲で議論するにはGinzburg - Landau 方程式が十分の枠組を与えるが，臨界領域の議論にはもう少し精密化したとりあつかいが必要である。先づ次のセクションでは，G - L 方程式に基づくいろいろの帰結について議論してみる。§ 3. では $T \sim T_c$ の現象を BCS 理論から導びかれた式を用いて，

- 1) 臨界領域に於ける，ゆらぎのスペクトラム
- 2) 輸送係数のゆらぎによる変化

について議論する。

§ 4. は $H \sim H_{c2}$ における渦糸状態における，ゆらぎについての議論を展開する。

§ 2. Ginzburg-Landau 方程式

2.1. ゆらぎの効果を考えない場合

G-L 方程式は現象論的に導入されたものではあるが、今やBCS理論に基づく十分な基礎づけをGor'kovによってなされている。後で見るように、この理論の枠内で臨界領域は議論することができないが、古典領域に話を限ると、いくらかの非常に興味ある結論を引き出すことができる。GL方程式は次の仮定のもとに建設された。

1) 正常状態から超伝導状態への転移は典型的な二次の相転移でLandau-Lifshitzの一般論によると、自由エネルギーは秩序度 $|\Delta(\mathbf{r})|^2$ の巾に展開できる。

2) 超伝導を特徴づける秩序度 $\Delta(\mathbf{r})$ は量子力学的波動関数で例えば $\Delta(\mathbf{r})$ の空間変動には

$$\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Delta(\mathbf{r})|^2 \text{ のような運動エネルギー伴なう。}$$

これらの仮定に基づいて、自由エネルギー（正常状態と超伝導状態の自由エネルギーの差）は

$$F = F_s - F_n = \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Delta(\mathbf{r})|^2 + a |\Delta(\mathbf{r})|^2 + \frac{b}{2} |\Delta(\mathbf{r})|^4 \right\} d^3 \mathbf{r} \quad (1)$$

のようにかくことができる。

$$\text{特に平衡状態では } |\Delta_0|^2 = 0 \quad T > T_c$$

$$|\Delta_0|^2 \neq 0 \quad T < T_c \quad \text{であるため}$$

$$a = a_0 (T - T_c)$$

$$b = \text{定数ととればよいことがわかる。} \quad (2)$$

$$\text{このとき} \quad F_0 = - \frac{a^2}{2b} \quad T < T_c \quad (3)$$

が得られる。

上の自由エネルギーの表式から、このモデルでは超伝導の転移で比熱は

$$\Delta C = \frac{a_0^2}{b} T_c \quad (4)$$

で与えられる有現のとびを経験することがわかる。

2.2 ゆらぎの効果

さて上の話は秩序度のゆらぎを無視したものであるが、GL方程式の範囲でもゆらぎの効果を考えることができる。

一般にFのゆらぎによる項を δF とすると、種々の物理量A($\delta\Delta$)の期待値は

$$\langle A(\delta\Delta) \rangle = \frac{\int D(\psi) A(\psi)}{\int D(\psi)} \quad (5)$$

にかけろ。ここに $D(\psi)$ は汎関数測度で、

$$D(\psi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_N \delta\psi_N e^{-\int \delta F d^3r} \\ \delta F = F(\Delta_0 + \psi) - F(\Delta_0) \quad (6)$$

で定義される。特に

$T > T_c$ では

$$\delta F(\psi) = \sum_q \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + a \right) \psi_q^* \psi_q \quad (7)$$

$T < T_c$ では

$$\delta F(\psi) = \sum_q \left\{ \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + a + 2b|\Delta_0|^2 \right) \psi_q^* \psi_q \right. \\ \left. + b\Delta_0^2 \psi_q^* \psi_{-q}^* + b\Delta_0^{*2} \psi_q \psi_{-q} \right\} \quad (8)$$

のように与えられる。上の汎関数を用いて、二・三の計算をしてみよう。

a) $T > T_c$

ゆらぎの自由エネルギーへの寄与は

$$F_{fl}^{(T)} = -T \ln \int D(\psi),$$

$$\begin{aligned}
 &= -T \sum_q \ln \left(\frac{\pi T}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + a} \right) \\
 &= -T \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{\pi T}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + a} \right), \\
 &= -\frac{T}{2\pi^2} \left\{ \int_0^{q_0} q^2 dq \ln \left(\frac{\pi T}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + a} \right) \right\} \\
 &= -\frac{T}{2\pi^2} \left\{ \frac{q_0^3}{3} \ln \left(\frac{\pi T}{\frac{\hbar^2 q_0^2}{2m} + a} \right) + \frac{1}{3} \int_0^{q_0} \frac{q^4 dq}{q^2 + \frac{2ma}{\hbar^2}} \right\} \\
 &= -\frac{T}{2\pi^2} \left\{ \frac{q_0^3}{3} \left(\ln \left(\frac{\pi T}{\frac{\hbar^2 q_0^2}{2m} + a} \right) + 1 \right) - \frac{4ma}{3\hbar^2} q_0 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{2ma}{\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{2ma}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2} \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

$a = a_0 (T - T_c)$ であること考えると

$$C_{fl}(T) = \frac{T^2}{16\pi} \left(\frac{2m a_0}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(T - T_c)^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

すなわち、比熱は平方根の逆数の特異性をもつ。これは、RPAでゆらぎを計算した時、他の転移に於いても見い出されるふるまいで、これは古典的なゆらぎの典型的なふるまいといえる。(A)を見よ。)

上の汎函数を用いると、ゆらぎの空間的相関を計算できる。

$A(\psi)$ として、 $A(\psi) = \psi_q^* \psi_q$ をとると、

$$\langle \psi_q^* \psi_q \rangle = \frac{\pi T}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + a} \quad (11)$$

あるいは Fourier 変換を行なって、

$$\langle \psi^*(0) \psi(r) \rangle \propto \frac{e^{-\kappa r}}{r} \quad (12)$$

$$\kappa = \frac{(2ma)^{\frac{1}{2}}}{h}$$

これは Ornstein - Zernike によるゆらぎのとりあつかいによる結果と同じ振まいをしている。特に $T = T_c$ では相関の距りは ∞ になる ($\kappa \propto a^{\frac{1}{2}} \propto (T - T_c)^{\frac{1}{2}}$)

④ ただ超伝導に於ける上の特異項の係数は非常に小さいため、上の結果は実際に観測で確かめることは不可能であろう。上の係数を推定するには ξ を $T = 0^\circ \text{K}$ のコヘレンスの長さとした時

$$\xi \cong \frac{h}{(2ma_0 T_c)^{\frac{1}{2}}}$$

の関係があるのを利用しよう。これを用いると、

$$C_{fl} \cong \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\xi^3} \frac{T}{\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \propto \left(\frac{\xi_0}{\ell}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{T_c}{\mu}\right)^2 \frac{\Delta C_s}{\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

すなわち比熱のとびにあらわれる量にくらべて、

$$\left(\frac{\xi_0}{\ell}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{T_c}{\mu}\right)^2 \quad (\mu = E_f) \text{ の係数だけ小さい。}$$

特に普通の超伝導体では $\left(\frac{T_c}{\mu}\right)^2 \propto 10^{-8}$

であることに注目すれば、この特異項がいかに小さいかがわかる。

b) $T < T_c$

この領域でも上と同様な計算によって、比熱はやはり平方根型の特異性をもっていることも議論できるが、ここでは秩序度のゆらぎの空間的相関に話を限ろう。

(8) の中に出て来る Δ_0^2 及び Δ_0^{*2} の項のため相関はマトリックスのかたちになる。

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_q^* \psi_q \rangle & \langle \psi_{-q} \psi_q \rangle \\ \langle \psi_q^* \psi_{-q}^* \rangle & \langle \psi_{-q} \psi_{-q}^* \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\hbar^2}{2m} q^2 \left(\frac{\hbar^2}{2m} q^2 + |a| \right)} \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} |q|^2 + 2|a| & -|a| \\ -|a| & \frac{\hbar^2}{2m} |q|^2 + 2|a| \end{pmatrix} \quad (13)$$

上の式を導びくのに $|\Delta_0|^2 = \frac{|a|}{b}$

の結果を用いた。

上の式から、三次元では空間的相関には r^{-1} に比例する項が出るのがわかる。

一次元、二次元では同様の計算をやると遠方で漸近的相関は $|r|$ 、及び $\ln|r|$ のようになって、いずれも距離とともに発散する。このことは一次元、二次元系では超伝導の秩序はゆらぎのために確立できないことを示すために用いられた。(M.T.Rice)

§ 3. Time - dependent GL 方程式及び臨界領域

上の計算から GL 理論の範囲でのゆらぎについての結論は全く古典的なゆらぎのとりあつかいと同一結果に導くことを見た。ここではもっと一般的な BCS 理論から出発して

1) 臨界領域の存在

2) ゆらぎの輸送係数に対する影響

を見ていくことにする。(K.Maki, Prog. Theor. Phys. to be published)

3.1 先ず上にあげた問題に入る前に Time - dependent GL 方程式についての知識を整理しておくのは、§ 4 の準備としても便利である。

現象論的には秩序度の時間変動は、

a) diffusion type

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(r, t) = D (\nabla)^2 \Delta(r, t) + \epsilon_0 \Delta(r, t) \quad (14)$$

b) wave like

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \right] \Delta(r, t) = f(\Delta) \quad (15)$$

c) Schrödinger like

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Delta = D' (\nabla)^2 \Delta \quad (16)$$

などが考えられたが、G-L 領域では常に a) の可能性しかないことが今や確立している。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abrahams, Tsuneto} \\ \text{Caroli, Maki} \\ \text{Gor'kov, Eliashburg} \end{array} \right.$$

もう少し一般的に言えば gapless 超伝導では常に秩序度の運動は diffusion 型の式でもって書けることを示すことができる。

この結論は例えば一様の電場のもとでの渦糸の運動に関してははっきりした結果に導びく、すなわち渦糸は常に電場及び磁場に直角方向に一様の速度 $u = \frac{E}{H}$ で動く。(このことから少なくとも G-L 領域に関する限り渦糸の運動を流体力学的 Magnus Force との真似でとりあつかうと全く間違った結論に導くことがわかる。)

3.2 臨界領域

Ferrell, Schmidt は T_c の極く近傍で秩序度のゆらぎは上の古典的なものと本質的に異なったスペクトルをもつことを現象論的に示した。この領域を臨界領域と名づけた。吾々は BCS 理論の枠内でこの問題を定式化することを試みよう。

Gor'kov の方法を $\Delta(r, t)$ が時間に依存する場合に拡張することによって dirty 超伝導 (すなわち $\ell \ll \xi$ 。) では次の式を得る。

$$\left\{ \ln \frac{T}{T_c} + \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{-i\omega + Dq^2}{4\pi T} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \Delta(\mathbf{r}, t) \\ = \Gamma_0 |\Delta(\mathbf{r}, t)|^2 \Delta(\mathbf{r}, t) \quad (17)$$

$$\text{ここで } \psi(2) = \Gamma'(2)/\Gamma(2) \quad -i\omega = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{i} \nabla$$

特に $T = T_c$ の近傍では, (17) 式は

$$\left(|\eta| + -i\omega \frac{\pi}{8T} A q^2 \right) \Delta(\mathbf{r}, t) = \Gamma_0 |\Delta(\mathbf{r}, t)|^2 \Delta(\mathbf{r}, t) \\ A = \frac{\pi D}{8T_c}, \quad D = \frac{v\ell}{3} \quad \text{で} \quad \Gamma_0 = \frac{\zeta(3)N(0)}{8(\pi T_c)^2} \quad (18)$$

$N(0)$ は fermi 準位での状態密度を表わす。

$T > T_c$ で T が T_c に極端に近くない場合にはゆらぎのスペクトラムは非線型の項を無視することによって計算でき

$$i\omega = \frac{8T}{T_c} |\eta| + Dq^2 \quad (19)$$

のような古典的結果を得る。

一方 T が T_c の極く近傍では非線型の項が無視できなくなって, スペクトラムは強い変型をうける。これをみるのに特に $|\eta| = 0$ (すなわち $T = T_c$) の場合の (18) 式の解の性質を見よう。

非線型の効果は次のダイアグラムで表わされるような自己エネルギーを与える。

$$\Phi(q) = \text{---} \Gamma_0 \text{---} \text{---} \Gamma_0 \text{---}$$

これを式にかけば

$$\Phi(q) = 2 T^2 \Gamma_0^2 \iint \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2T)^6} G(q_1) G(q_2) G(q - q_1 - q_2), \quad (20)$$

ここで $G(q)$ はゆらぎの伝播を記述するグリーン関数になっている。

Bytev 達の解析によれば, q の小さい領域では

$$\Phi(q) > \frac{\pi D}{8T} q^2 \quad \text{になるので}$$

(20) 式は

$$\Phi(q) = 2T^2 \Gamma_0^2 \iint \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6} \left\{ \frac{1}{\Phi(q_1)\Phi(q_2)\Phi(q-q_1-q_2)} - \frac{1}{\Phi(q_1)\Phi(q_2)\Phi(q_1+q_2)} \right\} \quad (21)$$

のようになる。上の積分の中の第二項は、積分が $q=0$ のときに 0 になるように、正規化するために加えた項で、実は T_c の中にくりこまれるべきものである。(21) 式は簡単な次元解析から

$$\Phi(q) = B' |q|^{\frac{3}{2}},$$

$$B' = \left(\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{T_c \Gamma_0}{2\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

の解を持つことがわかる。このことから q が小さいとき $\Phi(q) > 0 q^2$ の仮定はなりたっていることがわかる。

このことから臨界領域では (すなわち $|T - T_c| \ll T_c$)

$$G(q) = \{N(0) (|\eta| + B(q))^{\frac{2}{3}}\}^{-1} \quad (23)$$

$$B = B' / N(0) \sim \left(\frac{\mu}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}} p_0^{-\frac{3}{2}} \quad (24)$$

$\mu = E_f$ p_0 は Fermi momentum

のような内挿公式がよさそうである。

もっとこまかいことを云えば、(21) の式を $|\eta|$ を含む場合に一般化した self-consistent の式をとくべきであるが、この仕事は未だやられていない。ただ $G(q)$ について上の解析からいえることは

$$G(q)^{-1} = N(0) B |q|^{\frac{3}{2}}, \quad \text{for } B |q|^{\frac{3}{2}} > |\eta|,$$

$$= N(0) |\eta|, \quad \text{for } |\eta| > B |q|^{\frac{3}{2}}, \quad (25)$$

だけで、(23) 式は最も簡単な内挿式になっている。

上の結果から Γ_0 が $N(0)$ と T_c にしかよらないことを考えると、次の結論が導びかれる。

- 1) 臨界領域でのスペクトラムは，電子の平均自由行路 ℓ にはよらない。
- 2) 臨界領域でのスペクトラムは電子-ホノン相互作用係数 $|\eta|$ によらない。
- 3) 古典的ふるまいから，臨界的ふるまいに移行する温度は，電子の平均自由行路により，これは

$$|\eta_c| = \frac{1}{(P_0 \ell)^{3/2}} \left(\frac{T_c}{\mu} \right)^{1/2} \quad (26)$$

によって与えられる。すなわち，dirty な超伝導ほど臨界領域は大きくなる。

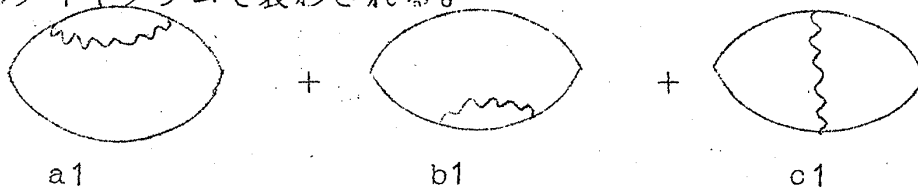
この $q^{3/2}$ は He II の場合に Pathashinsky, Pokrouskii によって提出されたものと同じであることは興味ある。

3.3 輸送係数

上のゆらぎの比熱への寄与は容易に計算できて，臨界領域では $\ln|T - T_c|$ の特異性を与えることがわかる。しかし，その数係数は古典的ゆらぎの場合と同様に小さいので，実際的な興味はない。ここではこれらのゆらぎの電子系の輸送現象に対する影響を見よう。簡単のために電気伝導度を考えよう。電気伝導度は電流の retarded product を用いて，

$$-i\omega \sigma_{\mu\nu} = \langle [j_\mu, j_\nu] \rangle(\omega) \quad \text{のようにかける。} \quad (27)$$

上の retarded product は標準的な温度グリーン関数を使って計算できるが，ゆらぎによる寄与は最低次の補正だけ考えることにすると，次の三つのダイアグラムで表わされる。



ここで， $—$ は電子グリーン関数をあらわし， $\sim$ はゆらぎのグリーン関数をあらわす。dirty 極限では上のダイアグラムは簡単に計算できて，

$$\begin{aligned}
-i\omega \sigma_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu} \sigma \left\{ -i\omega + \frac{T}{(2\pi)^2} \int d^3q \frac{G(q)}{2\pi T} \right. \\
\left. \left[\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2\pi T} + p_q\right) - \left(\frac{2\pi T}{i\omega} + \frac{2\pi T}{i\omega - Dq^2}\right) \left(\psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2\pi T} + p_q\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + p_q\right)\right) \right] \right\} \quad (28)
\end{aligned}$$

$$p_q = \frac{Dq^2}{2\pi T}, \quad \sigma = \frac{\tau e^2 N}{m}$$

のようになる。 $G(q)$ はゆらぎのグリーン関数。

ここで [] 中の第一項は a), b) からのもので、自己エネルギー項ともよべるものであるが、第二項は c) よりの寄与で vertex の補正といってもいい。 $\omega \rightarrow 0$ の時第二項は $\frac{1}{Dq^2}$ にふるまうので、ゆらぎによる補正は本質的にこの第二項（あるいはダイアグラム c)）によってきまってしまうことがわかる。

実際計算すると電気伝導度は T_c のすぐ上では

$$\sigma_c = \sigma \left(1 + \frac{a}{|\eta|^{1/2}} \right), \quad \text{古典的領域} \quad (29)$$

$$\sigma_c = \sigma \left(1 + \frac{a'}{|\eta|^{1/3}} \right), \quad \text{臨界領域}$$

$$|\eta| = \left| \frac{T}{T_c} - 1 \right|, \quad a \sim \left(\frac{T_c}{\mu} \right)^{1/2} (\ell p_0)^{-\frac{3}{2}}, \quad (30)$$

$$a' \sim \left(\frac{T_c}{\mu} \right)^{1/3} (\ell p_0)^{-1}$$

が得られる。すなわち電気伝導度は先ず古典的ゆらぎで $|\eta|^{-1/2}$ の発散をはじめ、臨界的ゆらぎでは $|\eta|^{-1/3}$ のようなもう少しゆるやかな発散でおきかえられる。

これらの影響が観測できる領域は係数 a あるいは a' できまり、例えばゆらぎが電気伝導度に 10% の補正を与える温度とすれば、

$$T_1 = T_c \left(1 + 10^2 \left(\frac{T_c}{\mu} \right) (\ell p_0)^{-3} \right) \quad (31)$$

のようになる。したがってもし $\ell p_0 \sim 1$ のように極端に dirty な超伝導では実際このようなゆらぎを観測することも可能である。同様の計算は超音波減衰，熱伝導，核スピン緩和時間についても計算でき，その結果は次の表のようになる。

	超 伝 導	$\text{He}^4 \text{ II}$	
		理 論	実 験
電気伝導	$+ a \eta ^{1/3}$	x	x
熱 伝 導	regular	$a \eta ^{-1/3}$	$a \eta ^{-1/3}$
超 音 波 減 衰	$- a \eta ^{1/3}$	$a \eta ^{-1/3}$	$a \eta ^{-1/3}$
核スピン 緩和時間	$- a \eta ^{-1/3}$	x	x

臨 界 的 特 異 性

上の表に比較のために He II による Ferrell 達の現象論の結果及び実験を加えておいた。 He II での電気伝導度に対応する量としては第一粘性係数が考えられるが，詳細は Ferrell 達の論文にゆずる。

§ 4. 高磁場のもとでの渦糸状態でのゆらぎ

今までは $H=0$ とした時の温度 T の変化にともなった T_c 近くでのゆらぎを見てきた。これからは第二種超伝導体における磁場 H の変化にともなった H_{c2} 近くでのゆらぎを考察することにする。

4.1 先ず準備として，Abrikosov 理論の中での今後の議論に必要な結果を少し説明しよう。

今高い磁場をゆっくり減少していった時に bulk の中で超伝導が nucleate する磁場，第二臨界磁場を考えよう。このような磁場を議論するには， $\Delta(r)$ は無限に小さいので G-L 方程式の線形化したものを調べれば

十分である。

$$D(\nabla - 2ie\mathbf{A})^2 \Delta(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \Delta(\mathbf{r}, t) \quad (32)$$

ここで ϵ_0 は

$$-1 \ln \frac{T}{T_c} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{q_0}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right), \quad (33)$$

できめられる温度 $\left(\frac{T}{T_c}\right)$ の普迦的関数である。

今磁場の方向を z 軸にとり、 $\mathbf{A}$ として

$$\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$$

のようになると、(32) 式は

$$D\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} - 2ieHx\right)^2\right] \Delta(x, y) = \epsilon_0 \Delta(x, y), \quad (34)$$

(34) は最小の固有値として $\epsilon_0 = 2DeH$,

$$\Delta_k(x, y) = e^{iky} \exp\left(-eH\left(x - \frac{k}{2eH}\right)^2\right), \quad (35)$$

のような縮退した解がある。

(35) 式から、第二臨界磁場は、

$$H_{c2} = \frac{\epsilon_0(T)}{2De} \quad (36)$$

のようになめられる。

Abrikosov はさらに $H_{c2} - H \ll H_{c2}$ の時には、平衡状態の $\Delta = \Delta_0(x, y)$ は、解(35)の一次の重ね合わせ、

$$\Delta_0(x, y) = \sum_n C_n e^{ikny} \exp\left(-eH\left(x - \frac{kn}{2eH}\right)^2\right),$$

$$C_n = C_n + N, \quad (37)$$

で与えられることを示した。この時系の自由エネルギーは

$$F = -\frac{1}{8\pi} \frac{(H_{c2} - H_0)^2}{(2\kappa^2 - 1) \beta_A}$$

$$\beta_A = \frac{\langle |\Delta|^4 \rangle}{(\langle |\Delta|^2 \rangle)^2} \quad (38)$$

κ は Ginzburg-Landau パラメーターで ($\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}$) をえられることを導いた。したがって、平衡状態での Δ_0 をきめる問題は、(37) で与えられる解のうちで β_A を最小にするものを見い出すことに帰着できる。

ここでは、(37) 式の一般的な議論を省略し、今後の議論のため、次のような二つの場合だけ考えることにする。

a) 三角格子 (Kleiner, Roth, Autler)

$$\Delta_0(x, y) = e^{-eHx^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{knz - \left(\frac{\pi}{2}i + \frac{k^2}{4eH}\right)n^2} \quad (39)$$

$$z = x + iy,$$

$C_{2n+1} = iC_{2n} = C$ ととった場合に対応し、さらに β_A を最小にする条件から

$$k = (2\pi \sqrt{3} eH)^{1/2}$$

が得られる。これは Riemann の θ 関数を用いて

$$\Delta_0(x, y) = e^{-eHx^2} \theta_3\left(\frac{kz}{2\pi}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \quad (40)$$

のようにも書くことができる。 $\Delta_0(x, y)$ の 0 は規則的な三角格子をつくっていることがわかる。このとき $\beta_A = 1.16$ となる。

b) 方形格子 (Abrikosov)

$$\Delta_0(x, y) = e^{-eHx^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{knz - \frac{k^2}{4eH}n^2} \quad (41)$$

$C_n = C$ に対応している。

$$k = (4\pi eH)^{1/2}$$

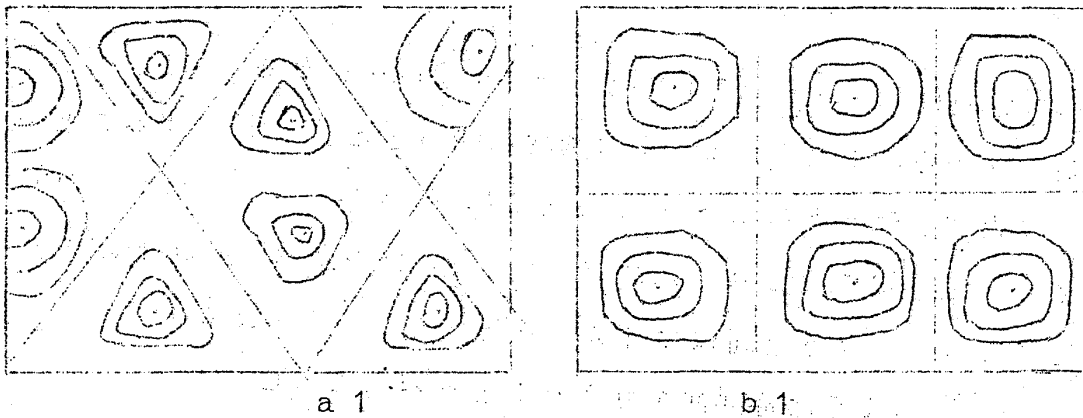
これは又

$$\Delta_0(x, y) = e^{-eHx^2} \theta_3\left(\frac{k\tau}{2\pi}, 1\right) \quad (42)$$

とかくこともでき、0は規則的な方向格子をつくっていることがわかる。

このとき $\beta_A = 1.18$

大ざっぱな $|\Delta_0(x, y)|^2$ を図示すると



ようになるが、 β_A の上の値から、三角格子が平衡状態での配置に対応していることがわかる。(ie $\beta_A \Delta < \beta_{A\Delta}$)

4.2 $H > H_{c2}$ での秩序度のゆらぎ, (Caroli, Maki)

$H > H_{c2}$ ではすべてのゆらぎが時間に対して指数的に減衰していくことは Time-dependent GL 方程式を使ってみることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(r, t) = D(\nabla - 2ie\mathbf{A})^2 \Delta(r, t) + \epsilon_0 \Delta(r, t), \quad (43)$$

ここで (36) を用いると $\epsilon_0 = 2eDH_{c2}(T)$ とおくことができる。(43) 式の一般解は

$$\delta \Delta = e^{-Et} (\Pi^+)^n \psi_k(x, y) e^{iq_z z} \quad (44)$$

$$E = D_{qz}^2 + (2n+1) 2eDH - \epsilon_0, \quad \Pi^+ = \Pi_x + i\Pi_y, \quad \Pi = \frac{1}{i} \nabla - 2e\mathbf{A}$$

$$\psi_k(x, y) = e^{iky} \exp\left(-eH\left(x - \frac{k}{2eH}\right)^2\right) \quad (45)$$

のように求めることができる。

以下の都合上特に $n=0$, $n=1$ に対応する解を longitudinal, transversal とそれぞれよぶこととする。

a) longitudinal mode

こととき E は

$$E = Dq_z^2 + 2eD(H - H_{c2}) \quad (46)$$

で与えられ、特に $H = H_{c2}$ では diffusion like になる。

解の対称性から、これらのモードは密度のゆらぎと couple することがわかる。また他のモードは $H \sim H_{c2}$ のときには simply damped なので熱力学的ゆらぎとしてはこの longitudinal だけを考察すればよいことも容易に導びける。§ 3 と同様な計算を行なうと、輸送係数には $(H - H_{c2})^{-1/2}$ のような特異性を与えることを容易に示せる。

b) transverse mode

$$E = Dq_z^2 + 4eD H_{c2} \quad (47)$$

このモードは $T - T_c$ の近傍を除いては simply damped モードである。このモードの重要性は電磁波と couple して表面インピーダンスに大きな寄与をすることである。

4.3 $H < H_{c2}$ での秩序度のゆらぎ

この場合には G-L 方程式での非線型の項をとり入れる必要が一般には起ってくる。しかし、 $H_{c2} - H \ll H_{c2}$ の範囲では longitudinal モードを除いては $H > H_{c2}$ のときに導いたモードは本質的に影響を受けないことを示すことができるので、ここでは longitudinal モードについてだけ議論することにする。

もともとの Hamiltonian の対称性からいうと、Abrikosov の渦糸格子を作った時に、格子点をどこに取るかは全く自由である。しかし、どれか一つの渦糸格子を平衡状態のものとして設定すると、その点より格子点をずらしたようなものは、格子点自身のゆらぎとしてとりあつかうことができる。(Eilenberger)

今原点を格子点の一つとしてもつ解を

$\varphi(r|0)$ ととることにする。すると一般的な解 (37) より

より

$$e^{2eHx_0z - eHx_0^2} \varphi(r-r_0|0)$$

も又解 (37) の一つになっていることを示すことができる。

($z = x + iy$) これは丁度格子点を (x_0, y_0) に移した解と考えることもできるので

$$\varphi(r|r_0) = e^{2eHx_0z - eHx_0^2} \varphi(r-r_0|0) \quad (48)$$

と定義する。

さて, $\Delta_0(x, y)$ のゆらぎ (longitudinal) を

$$\sum_{z_0} a(z_0) \varphi(r|r_0) \quad (49)$$

のように考えてその固有値を考えてみよう。これは非線型 G-L 方程式をゆらぎに対して線型化した式,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \delta \Delta_0 = (D(\nabla - 2ie\mathbf{A})^2 + \epsilon_0 - 2B|\Delta_0|^2) \delta \Delta_0 \\ \quad - B\Delta_0^2 \delta \Delta_0^*, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta \Delta_0^* = (D(\nabla + 2ie\mathbf{A})^2 + \epsilon_0 - 2B|\Delta_0|^2) \delta \Delta_0^* \\ \quad - B\Delta_0^{*2} \delta \Delta_0 \end{cases} \quad (50)$$

をとくことになる。(50) 式に (49) のかたちのゆらぎを入れて,

$\varphi(r|r_0)$ と $\varphi(r|-r_0)$ しか couple しないことを使うと, エネルギーは

$$E_{\pm}(z_0) = \{2I_1(z_0) - 1 \pm |I_2(z_0)|\} \frac{(H_{C2} - H)}{H_{C2}} \frac{\epsilon_0 2x^2}{(2\kappa^2 - 1)} \quad (51)$$

で解は

$$\delta \Delta_0 = \varphi(r|r_0) \mp \varphi(r|-r_0) \quad (52)$$

になることが示せる。

$$\begin{aligned} I_1(z_0) &= N \langle |\varphi(r|0) \varphi(r|r_0)|^2 \rangle, \\ I_2(z_0) &= N \langle \varphi^2(r|0) \varphi^*(r|r_0) \varphi^*(r|-r_0) \rangle, \end{aligned} \quad (53)$$

で与えられる。 $\langle \rangle$ は空間平均をあらわす。 N は正規化のための常数。

± の $I_i(z_0)$ は Abrikosov の格子をきめると計算できて、特に $|r_0|$ が小さい時には、

a) 三角格子では、

$$\begin{aligned} I_1(z_0) &= e^{-eHx_0^2} \sum_{n,m} \exp \left[-k(nx_0 + imy_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} (\sqrt{3}(n^2+m^2) + 2nmi) \right] \\ &\quad \times \left(\sum_{n,m} \exp \left(-\frac{\pi}{2} (\sqrt{3}(n^2+m^2) + 2nmi) \right) \right)^{-1}, \\ I_2(z_0) &= e^{-2eHx_0^2} \sum_{n,m} \exp \left[-(n+m)kz_0^* \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} (\sqrt{3}(n^2+m^2) + 2nmi) \right] \\ &\quad \times \left(\sum_{n,m} \exp \left(-\frac{\pi}{2} (\sqrt{3}(n^2+m^2) + 2nmi) \right) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (54)$$

で与えられ、これから $u = kx_0$, $v = ky_0$ とすると ($k = (2eH)^{1/2}$)

$$2I_1(z_0) - 1 - |I_2(z_0)| = 0.103 (a^2 + v^2)^2 + O\{u, v\}^2$$

であり、ゆらぎの frequency は、三角格子では

$$i\omega = -CD(2I_1(z_0) - 1 - |I_2(z_0)|)$$

$$C\Delta = 2De(H_{c2} - B) \frac{(2x^2 - 1)}{(2x^7 - 1)1.16 + 1}$$

となる。方形格子では

$$i\omega = -C_{\square} \{ 1.4u^2v^2 + O\{u, v\}^6 \},$$

$$C_{\square} = 2De(H_{02} - B) \frac{(2x^2 - 1)}{(2x^7 - 1) 1.18 + 1}$$

の様になり, u, v についての最低次については三角格子では等方的, 方形格子については異方的になるが, いずれ又安定になっている。おそらく, 方形格子の場合は u^6 (あるいは v^6 までの項をとり入れると不安定になっていると思われるが, この計算は困難なので, 未だ確かめていない。

最後に三角格子での longitudinal のゆらぎの振巾について考えよう。このためには

$$\delta\Delta = e^{iq_z z} (\varphi(r|r_0) + \varphi(r|-r_0)) = \psi(q_z, r_0)$$

のようなものを考えると

$$\langle \psi^*(q_z, r_0) \psi(q_z, r_0) \rangle \propto \frac{\pi T}{D_q^2 + C(1 - \frac{H}{H_{02}}) O(z_0)}$$

$$O(z_0) = 0.036 u^2 v^7 + 0.00403 (u^4 + v^4 - 4u^2 v^2)$$

になる。これから

$$\int dq_z \int_{\text{unit cell}} d^2 r_0 \langle \psi^*(q_z, r_0) \psi(q_z, r_0) \rangle$$

は対数的に発散することが示せる。即ち, 三角格子に於いてはすべての方向の longitudinal なゆらぎに対して安定であるが, ゆらぎの振巾は大きいので, 本当の平衡状態としては特定の三角格子は実現されることはないのではなかろうか?

未だ超伝導での非線型応答は真剣にとりあげられていないけれども, ゆらぎを励起することによってかなり大きな (観測可能な) 応答を見ることができそうです。準備的なエスティメイトをしたら, 非常に有望です。