

# s-d 相互作用

大 阪 之 雄 (東北大通研)

(11月24日受理)

## § 序

s-d 相互作用について, Suhl<sup>①</sup> の散乱理論に基づいた取扱いに立って, 論じてみる。

Nagaoka<sup>②</sup> に始る二時間グリーン函数による扱いが, 最近, Hamann<sup>③</sup> 及び Bloomfield-Hamann (以下 B-H と略記) により発展された。この方法と Suhl の方法との関係を, 多少でもつけようとするのが, 本論の目的である。結果としては, Nagaoka の基底状態エネルギーの異常な部分及び異常比熱に対する結果が, この方法でも生ずる事である。Yosida<sup>⑤</sup> 理論との或る種の類似性が, 我々の扱いには生じてくる。

## § 1 Suhl の $T > T_k$ の解の $T < T_k$ への接続

Suhl は, 散乱の Chew-Low 理論を, この問題に適用して, 或る温度  $T_k$  以下で,  $T$  マトリックスのスピン Flip 部分が, 上半面に complex Pole を生ずる事を見出した。この許されない特異性を除くため, Suhl-Wong<sup>④</sup> は,  $T > T_k$  より  $T < T_k$  へ解を接続する一つの処法を見出し, この特異性を消した。しかし, 彼等の処法は, 納得出来ぬ点もあり, ここで別の方法を考えてみた。しかし, この方法も可成, 強引で, 納得出来ぬ方は, 結果を  $S$  マトリックスへの一つの現象論的仮定と見なして頂き度い。

Model として, s-d 相互作用は,  $\delta$  函数的な Exchange で, Impurity spin  $\mathbf{S}$  と伝導電子 (以下 c-電子と略記) の spin  $\mathbf{s}$  とが,  $|J| \mathbf{S} \cdot \mathbf{s}$  と結合するとする。c-電子の状態密度は, Fermi エネルギーの周りに対称で, エネルギー  $X$  (原点を Fermi エネルギーにとる) に対して,  $\rho(X) = \rho \times \frac{D^2}{D^2 + X^2}$  の形を持つとする。以下, 形式的議論には, この形を用いるが,  $X$  の

real value で物理量が積分として与えられた時, その計算には,

$$\rho(X) = \begin{cases} \rho & |X| < \bar{D} \\ 0 & |X| > \bar{D} \end{cases} \quad (1.1)$$

の形を採用して計算する。D と  $\bar{D}$  は、実際には、積分を良く近似させるという意味で異なるが、同じ値をとる。

Chew - Low 理論により、T マトリックスのスピンを Flip せぬ部分  $t$  と Flip 部分  $\tau$  に対して次式が与えられる。

$$t(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(X) \frac{|t(X)|^2 + 4S(S+1)|\tau(X)|^2}{z - X} dX \quad (1.2')$$

$$\tau(z) = \frac{|J|}{4N} + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(X) \frac{\tau(X)t^*(X) + \tau^*(X)t(X) - 2|\tau(X)|^2 \tanh \frac{\beta}{2} X}{z - X} dX \quad (1.2'')$$

( $\beta = 1/k_B T$ ,  $N$  は原子数)。上式で、 $|t(X)|^2$  等は、正確には  $|t(X+i\epsilon)|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) であるが、上のように略記した。 $S(z) = 1 - 2\pi i \rho(z) t(z)$  で  $S$  マトリックス (これは unitary で無い) を導入する。Suhl の  $T > T_K$  の解は、次のように与えられる。

$$(1.3) \begin{cases} \tau(z) = \frac{S(z)}{X(z)}, & X(z) = \frac{4N}{|J|} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(X) \tanh \frac{\beta X}{2} dX}{X - z}, \\ S(z) = e^{2i\delta(z)}, & \delta(z) = \frac{\rho(z)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta''(X) dX}{\rho(X)(X-z)}, \\ \delta''(x) = \frac{1}{4} \log \left( 1 + \frac{a(x)}{|x(x)|^2} \right), & a(x) = 16\pi^2 \rho^2(x) S(S+1), \end{cases}$$

$T > T_K$  でも、 $X(z)$  の形には、或る種の不定さがあるが、この事には立入らぬ。又、 $\delta(z)$  に対して、Froissart の仮定を用いた。この仮定は、(1.2)' より  $z \rightarrow \infty$  で  $t(z) \rightarrow 0$  ( $\frac{1}{z}$ ) になる漸近形を持つ事と、phase shift には  $\rho(z)$  の特異性が必ず反映するという物理的事実を表す事で、合

理的であるが、必ずしも unique で無い。以上を、仮定して話を進める。

$T < T_k$  では、 $X(z)$  は、 $z = \pm i\Delta(T)$  で Zero 点を持ち、 $\tau(z)$  は、そこで pole を持つ。この Pole を打消して、何等かの意味で  $T > T_k$  の (1.3) の形に、つながる  $S(z)$  を以下で求めよう。

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta''(x)}{x-z} dx \quad (1.4)$$

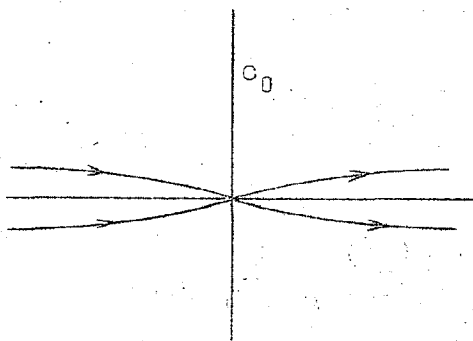
を導入して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\rho(x)} \frac{\delta''(x)}{x-z} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{c_0} dz' \frac{G(z')}{\rho(z')(z'-z)}$$

と表す。 $c_0$  は、 $z$  を積分路内に含まぬような、Fig 1 の形の積分路である。

$T < T_k$  の時の、 $G(z)$  を考える。

$$G(z) = G'(z) + F(z),$$



(Fig. 1)

$$G'(z) = \frac{z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - z^2} \left\{ \log(|X(x)|^2 + a(x)) - \log \frac{|X(x)|^2}{x^2 + \Delta^2(T)} \right\},$$

$$F(z) = -\frac{z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - z^2} \log(x^2 + \Delta^2(T))$$

と分ける。 $G'(z)$  は、 $T < T_k$  で real axis の cutt 以外の特異性を有しない。 $F(z)$  の上半面、下半面の虚軸上より解析接続した函数を  $F^+(z)$ ,  $F^-(z)$  とすると、それ等は次式で与えられる。

$$F^+(z) = -\frac{i}{2} \left[ \log(z + i\Delta(T)) - \frac{\pi}{2} \right],$$

$$F^-(z) = \frac{i}{2} \left[ \log(z - i\Delta(T)) + \frac{\pi}{2} \right]$$

当然、real  $x$  に対して、 $F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon) = -\frac{i}{2} \log(x^2 +$

$\Delta^2(T)$ ),  $F(z)$  と違って, 上半面, 下半面に特異点を持つ次のような  $\tilde{F}(z)$  を考える。

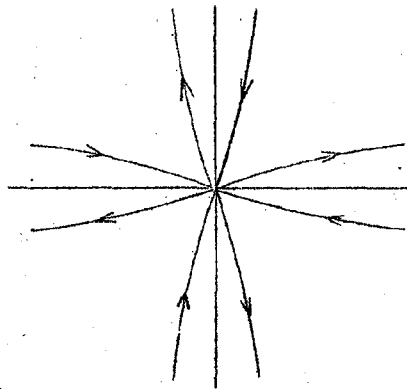
$$\tilde{F}(z) = \begin{cases} -\frac{i}{2} [\log(z - i\Delta(T)) - \frac{\pi}{2}] & (\text{上半面}) \\ +\frac{i}{2} [\log(z + i\Delta(T)) + \frac{\pi}{2}] & (\text{下半面}) \end{cases}$$

real  $x$  に対して,  $\tilde{F}(x+i\epsilon) - \tilde{F}(x-i\epsilon) = -\frac{i}{2} \log(x^2 + \Delta^2(T))$ .  
 $\tilde{G}(z) = G'(z) + \tilde{F}(z)$  を導入すると, 全ての温度で,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} dz' \frac{G(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} dz' \frac{\tilde{G}(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')}.$$

Fig 2 のような積分路  $C$  を考えると,  $T > T_k$  では,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} dz' \frac{G(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')} = \frac{1}{2i\pi} \oint_C dz' \frac{G(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')}$$



( Fig 2 )

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C dz' \frac{G(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')} \neq,$$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C dz' \frac{\tilde{G}(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')} \neq, \quad T > T_k$$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} dz' \frac{G(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')} \text{ につながる。しかし,}$$

$T < T_k$  では,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C dz' \frac{G(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')} \neq \frac{1}{2i\pi} \oint_C dz' \frac{\tilde{G}(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')}$$

ここで, 発見法的に, 凡ての温度に対して,

$$\delta(z) = \frac{\rho(z)}{2i\pi} \oint_c dz' \frac{\tilde{G}(z')}{z'-z} \frac{1}{\rho(z')} \quad (1.4)$$

とおいてみる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho(z)}{2i\pi} \oint_c dz' \frac{\tilde{G}(z')}{(z'-z)} \frac{1}{\rho(z')} &= \frac{\rho(z)}{2i\pi} \oint_{c_0} dz' \frac{G(z')}{(z'-z)} \frac{1}{\rho(z')} + \\ &+ \frac{\rho(z)}{2i\pi} \oint_{c_1} dz' \frac{\tilde{F}^+(z')}{(z'-z)\rho(z')} + \frac{\rho(z)}{2i\pi} \oint_{c_2} dz' \frac{\tilde{F}^-(z')}{(z'-z)\rho(z')} \end{aligned}$$

$c_1, c_2$  は図3に与えられた積分路。 $\Delta(T) \ll D$  の事と,  $\tilde{F}^+$  及び  $\tilde{F}^-$  の

branch line 及びそこでのとびを図4のように指定する。結果として次式を得る。

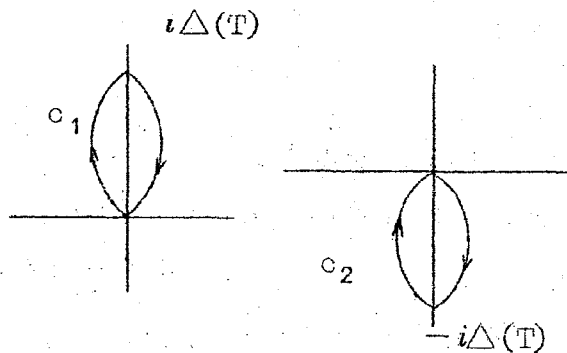
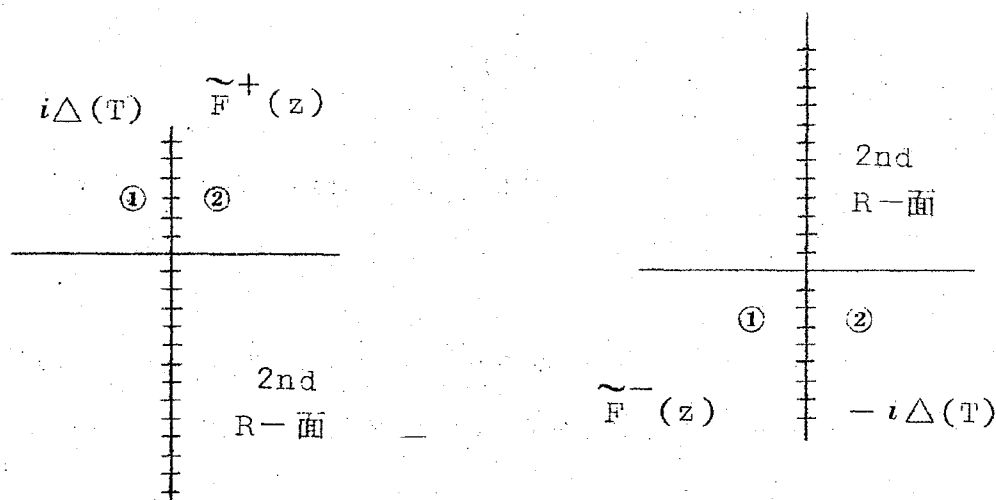


Fig 3.



$$\textcircled{1} - \textcircled{2} = 2\pi i$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} = -2\pi i$$

Fig 4.

$$\delta(z) = \frac{\rho(z)}{2i\pi} \oint_{c_0} \frac{dz' G(z')}{(z'-z)\rho(z')} - \frac{i}{2} \left( \frac{\rho(z)}{\rho} \right) \log \frac{z-i\Delta(T)}{z+i\Delta(T)}$$

ここで,  $\rho(\pm i\Delta(T)) = \rho$  の近似を用いた。  $\frac{\rho(z)}{2i\pi} \oint_{c_0} dz' \frac{G(z')}{(z'-z)\rho(z')}$

は,  $T > T_k$  の値をそのまま  $T < T_k$  で用いた値で, これを  $\delta_n(z)$  とする。

$$\begin{aligned} S(z) &= e^{2i\delta(z)} = e^{2i\delta_n(z)} \exp \left( \frac{\rho(z)}{\rho} \log \frac{z-i\Delta(T)}{z+i\Delta(T)} \right) \\ &= S_n(z) \left( \frac{z-i\Delta(T)}{z+i\Delta(T)} \right)^{\frac{\rho(z)}{\rho}} \quad \text{----- (1.5)} \end{aligned}$$

但し  $e^{2i\delta_n(z)} \equiv S_n(z)$  とした。

これで,  $\tau(z)$  を上半面で解析的にする  $S(z)$  を得た。

下半面で解析的にするには, とびを逆にすれば良い。 $\rho(z = \pm i\Delta(T)) < \rho$  の故, (1.5) は正確には  $\tau$  の  $z = i\Delta(T)$  の pole を打消さないが, それは途中で  $\rho(i\Delta(T)) = \rho$  の近似をしたためである。従って,  $|z| < D$  では,

$$S(z) = S_n(z) \left( \frac{z-i\Delta(T)}{z+i\Delta(T)} \right)$$

で良く,  $z = 0$  では, Nagaoka の  $S(z)$  と振舞が一致する。

## § 2 Sum - rules.

次節以下で用いる Sum - rule を導出する。その前に, Suhl の理論で, 縮退している基底状態を持つ系で, 基底状態をラベル  $S$  で区別して,  $T$  マトリックスを

$$T_{k'\sigma's', k\sigma S}(z) = t_{k'k}(z) \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{SS'} + 4\tau_{k'k}(z) \overset{\rightarrow}{S}_{S'S} \overset{\rightarrow}{S}_{\sigma'\sigma}$$

と置く意味を考える。(  $k, \sigma$  は  $c$ -電子の波動とスピン)。

$s-d$  の true state は, Fermi 面迄電子が充満し, bare spin が  $r$

の状態にある非摂動状態と一対一の対応をすると仮定して、この意味で true state を  $r$  で区別する。 $r$  で表される true state を  $|r\rangle$ , 非摂動状態を  $|r\rangle_0$  とする。この意味で, retarded グリーン関数  $g_{k\sigma, k'\sigma'}(\omega)$  は, T マトリックスを通して  $r$  に依存する。 $\sum_k C_{k\sigma_1}^* C_{k\sigma_2} \equiv N_{\sigma_1\sigma_2}$  ( $C_k^*$  は  $k$ -電子の発生演算子) として,

$$\langle r | N_{\sigma_1\sigma_2} | r \rangle - \langle r | N_{\sigma_1\sigma_2} | r \rangle_0 \equiv \langle r | \delta N_{\sigma_1\sigma_2} | r \rangle$$

と表す。retarded グリーン関数を,  $k, \sigma, r$  に対するマトリックスと考え記号的に  $g(\omega)$  と表す。

$$\begin{aligned} \langle r | \delta N_{\sigma, \sigma'} | r' \rangle &\equiv \langle r \sigma | \delta N | \sigma' r' \rangle \\ &= -\frac{1}{\pi} \int f(\omega) d\omega \operatorname{Im} \langle r \sigma | T_r(k) (g(\omega) - g^0(\omega)) | r' \sigma' \rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$f(\omega)$  はフェルミ分布関数。 $g^0(\omega)$  は, 自由 c 電子のグリーン関数。

電子と bare spin についての singlet 及び triplet 状態への射影演算子

$$P_0 = \frac{1}{2S+1} \{ S - 2(\vec{S} \cdot \vec{s}) \}, \quad P_1 = \frac{1}{2S+1} \{ S + 1 + 2(\vec{S} \cdot \vec{s}) \}$$

を用いる。これで,  $g(\omega) = P_0 g_s(\omega) + P_1 g_t(\omega)$ ,  $g_0(\omega) = g_0(\omega) (P_0 + P_1)$  と表す。 $g_s, g_t, g_0$  は  $k$  に対するマトリックスである。

$$g^{-1}(\omega) = \omega + i\epsilon - H \quad \text{より} \quad \frac{\partial \ln g^{-1}(\omega)}{\partial \omega} = g(\omega)$$

と,  $A = P_0 a + P_1 b$  の時  $\ln A = P_0 \ln a + P_1 \ln b$  の事を用いると, (2.1) は, 次のように変形される。

$$\begin{aligned} \langle r | \delta N_{\sigma, \sigma'} | r' \rangle &= -\frac{1}{\pi} \int f(\omega) d\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Im} \langle r \sigma | P_0 \operatorname{Tr}(k) \times \\ &\times (\ln g_s^{-1}(\omega) - \ln g_0^{-1}(\omega)) + P_1 \operatorname{Tr}(k) (\ln g_t^{-1}(\omega) - \ln \end{aligned}$$

$$g_0^{-1}(\omega) |r'\sigma' \rangle_0.$$

以下,  $P_0$  と  $P_1$  を含む部分を, 独立に考えて良い。

$$g_s = g_0 + g_0 T_s g_0, \quad T_s = \Sigma_s g_s, \quad \text{-----} (2.2)$$

により, singlet 状態に対する自己エネルギー部分  $\Sigma_s$  を導入する。次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int f(\omega) d\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Im Tr}(k) (\ell n g_s^{-1}(\omega) - \ell n g_0^{-1}(\omega)) \\ & = \left(-\frac{1}{\pi}\right) \frac{1}{2i} \text{Tr}(k) \left[ \ell n (1 - g_0(\omega + i\varepsilon) \Sigma_s(\omega + i\varepsilon)) \right. \\ & \quad \left. - \ell n (1 - g_0(\omega - i\varepsilon) \Sigma_s(\omega - i\varepsilon)) \right]_{\omega=0}. \end{aligned}$$

( $\text{Tr } \ell n AB = \text{Tr } \ell n A + \text{Tr } \ell n B$  を用いた。)

もしも,  $\text{Im } \Sigma_s(\omega=0) = 0$  ならば,

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{2\pi i} \text{Tr } \ell n (1 - 2\pi i \delta(\omega - H_0) \Sigma_s(\omega) \frac{1}{1 - g_0(\omega + i\varepsilon) \Sigma_s(\omega)})_{\omega=0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{Tr } \ell n S_s(\omega=0). \end{aligned}$$

ここに,  $S_s(\omega) = 1 - 2\pi i \rho(\omega) T_s(\omega)$  で, unitary な singlet に対する S マトリックス  $S_s$  を導入した。同様に, triplet に対する  $S_t(\omega)$  を用いると,

$$\text{Im } \Sigma_s(\omega=0) = \text{Im } \Sigma_t(\omega=0) = 0 \quad \text{-----} (2.3)'$$

の時は, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle r | \delta N_{\sigma\sigma'} | r' \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \langle r\sigma | P_0 \text{Tr } \ell n S_s(\omega=0) + P_1 \text{Tr } \ell n \\ & \quad S_t(\omega=0) | r'\sigma' \rangle. \quad \text{-----} (2.3) \end{aligned}$$

(2.3)' は, 一般に成立しないが, S wave 散乱のみ生じ, 電子の状態密度が Fermi エネルギーに対して対称の時は, 以下のようにして成立する。

$k$  に対するマトリックスとして,

$$T_j = \Sigma_i \frac{1}{1 - g_0 \Sigma_i} \quad (i = s \text{ 又は } t)$$

を考える。S wave 散乱のみの時は、 $T_{kk'}^j(\omega)$  は、 $k, k'$  に依らず、上式の  $k, k'$  成分より、 $\Sigma_{kk'}(\omega)$  も  $k, k'$  に依らず、次式を得る。

$$T_j(\omega) = \Sigma_i(\omega) \frac{1}{1 - \Sigma_i(\omega) \Sigma_{k'} g_{0k'}(\omega)}$$

上の条件で、 $\Sigma_{k'} g_{0k'}(\omega=0) = -i\pi\rho$  である。

( $\rho$  は、Fermi 面での状態密度。) 従って、

$$S_j(\omega=0) = 1 - 2\pi i \rho T_i(\omega=0) = \frac{1 - i\pi\rho \Sigma_i(\omega=0)}{1 + i\pi\rho \Sigma_i(\omega=0)}$$

$|S_i(\omega=0)|^2 = 1$  のためには、 $\text{Im } \Sigma_i(\omega=0) = 0$ 。

故に、(2.3) は、我々の問題で用い得る。

$P_0, P_1$  の形を用いると、c 電子の変位した電子数は、次式で与えられる。

$$\delta N_{\uparrow\uparrow} + \delta N_{\downarrow\downarrow} = \frac{1}{2\pi i (2S+1)} \left\{ 2S \ln S_s(\omega) + 2(S+1) \ln S_t(\omega) \right\}_{\omega=0} \quad (2.4)$$

c 電子の spin 分極  $\langle\langle s_z \rangle\rangle = \frac{1}{2} \langle\langle \delta N_{\uparrow\uparrow} - \delta N_{\downarrow\downarrow} \rangle\rangle$  に対しては、(以下、 $\langle\langle \quad \rangle\rangle$  は bare spin operator を残しての、orbital についてのみの平均を表す。)

次式を得る。

$$\langle\langle s_z \rangle\rangle = (-) \frac{1}{2\pi i (2S+1)} \left\{ \ln S_s(\omega) - \ln S_t(\omega) \right\}_{\omega=0} S_z \quad (2.5)$$

$s_z$  は bare spin operator である。

(2.4) は、S wave の時の通常の Friedel Sum rule に対応する。

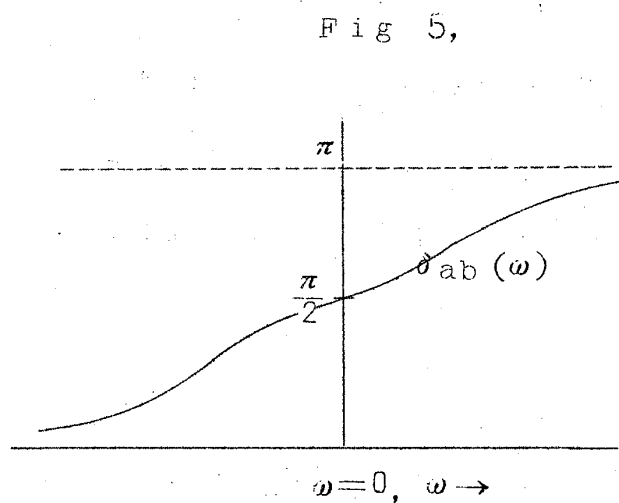
### § 3 電子数の変化及び電気抵抗

温度  $T = 0$  で unitary になる singlet と triplet に対する S マトリックス  $S_s(z)$ ,  $S_t(z)$  と,  $t$ ,  $\tau$  の間の関係は, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} S_s(z) &= 1 - 2\pi i \rho(z) [t(z) - 2(S+1)\tau(z)] \\ S_t(z) &= 1 - 2\pi i \rho(z) [t(z) + 2S\tau(z)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

§ 1 で得た  $T < T_k$  に接続した  $S(z)$  を用いると,  $T > T_k$  で  $S(z)$  を用いて書かれていた物理量に対する表式が, 同じ式で接続した  $S(z)$  を入れると成立すると仮定する。超伝導体の場合には, このような事望め無いが, s-d の問題では良いかもしれない。(2.4) は,  $T \neq 0$  でも十分温度が少なから成立する。(実際,  $\omega = 0$  では, unitary 性より生ずる  $-\text{Im } t(\omega) = \pi \rho(\omega) (|t(\omega)|^2 + 4S(S+1)|\tau(\omega)|^2)$  は,  $\omega = 0$  では  $T \neq 0$  でも成立する。) (2.4) に, (1.5) を用いる。(1.5) の  $S(z)$  を,

$S(z) \equiv S_n(z) \exp(2i\delta_{ab}(z))$  とする。(ab は, abnormal の意。)  $\delta_{ab}(z)$  は,  $T < T_k$  でのみ残り, 図のような変化をする。これより次式を得る。



$$\delta N_{\uparrow\uparrow} + \delta N_{\downarrow\downarrow} = \begin{cases} 0(J^2), & T > T_k \\ 1 + 0(J^2), & T < T_k \end{cases} \quad (3.2)$$

$0(J^2)$  は  $J^2$  のオーダーの量の意味である。 $T > T_k$  では,  $J^2$  のオーダーで, effective に spin independent なポテンシャルが, c 電子に働くために, こうなる。(3.2) は次の事を表わす。

$T > T_k$  の縮退した基底状態を持つ系より,  $T < T_k$  の状態を眺めれば,  $T < T_k$  では, 電子が余分に 1 け trap した状態に見える。次に, この現象と関係する電気抵抗の異常について述べる。

電気伝導度  $\sigma$  に対する通常の式

$$\sigma = -\frac{2e^2}{3} \int \tau(\epsilon) v^2(\epsilon) \frac{\partial + (\epsilon)}{\partial \epsilon} \rho(\epsilon) d\epsilon$$

の式で,  $\tau(\epsilon)$  を  $\epsilon \simeq 0$  の囲りに展開した初項のみとる近似をすると, 電気抵抗  $R$  は, 次式で与えられる。(  $\tau$  は, relaxation time で, T マトリックスの  $\tau$  と混同しない事。)

$$R = \left( \frac{2\pi}{n_e^2 k_F} \right) \frac{\pi \rho}{\tau(\epsilon=0)} \quad (3.3)$$

(  $n_i$  電子数,  $k_F$  はフェルミ波数 )。

$$\frac{1}{\tau(\epsilon)} = -2c \operatorname{Im} t(\epsilon) \quad (c_i \text{ Impurity 濃度})$$

の式と,  $t(z)$  の  $z$  の real な値に対する計算では

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho & |z| < D \\ 0 & |z| > D \end{cases} \quad (3.4)$$

を用いる。  $S(\epsilon) = e^{2i\delta(\epsilon)}$ ,  $\delta(\epsilon) = \delta'(\epsilon) + i\delta''(\epsilon)$  とする

$$\text{と, } e^{-2\delta''(\omega)} = \frac{|X(\omega)|}{\sqrt{|X(\omega)|^2 + a(\omega)}} \text{ で, } X(\omega \simeq 0) = 4\rho \ell_n \frac{T}{T_k}$$

である。

これにより, 次式を得る。

$$R = \frac{2\pi c}{n_e^2 k_F} \left( 1 - \frac{|\ell_n \frac{T}{T_k}| \cos 2\delta'(\epsilon=0)}{\sqrt{(\ell_n \frac{T}{T_k})^2 + \pi^2 S(S+1)}} \right)$$

$$0(J^2) \text{ の項を無視すると, } \begin{cases} \delta'(\epsilon=0) = 0 & T > T_k \\ \delta'(\epsilon=0) = \frac{\pi}{2} & T < T_k \end{cases} \quad (3.5)$$

の事より，上式は次のように表される。

$$R = \frac{2\pi\omega}{ne^2 k_F} \left[ 1 - \frac{\ln \frac{T}{T_k}}{\sqrt{\left(\ln \frac{T}{T_k}\right)^2 + \pi^2 S(S+1)}} \right] \quad (3.6)$$

この式は，Hamaun により最初に見出された。

(3.6) の導出には，(3.5) が本質的で，Suhl-Wong の式よりも (3.6) が導出出来る事を，既に Nagaoka<sup>⑥</sup> が示した。(3.6) では，

$$(R)_{T=0} / (R)_{T=T_k} = 2 \quad (3.7)$$

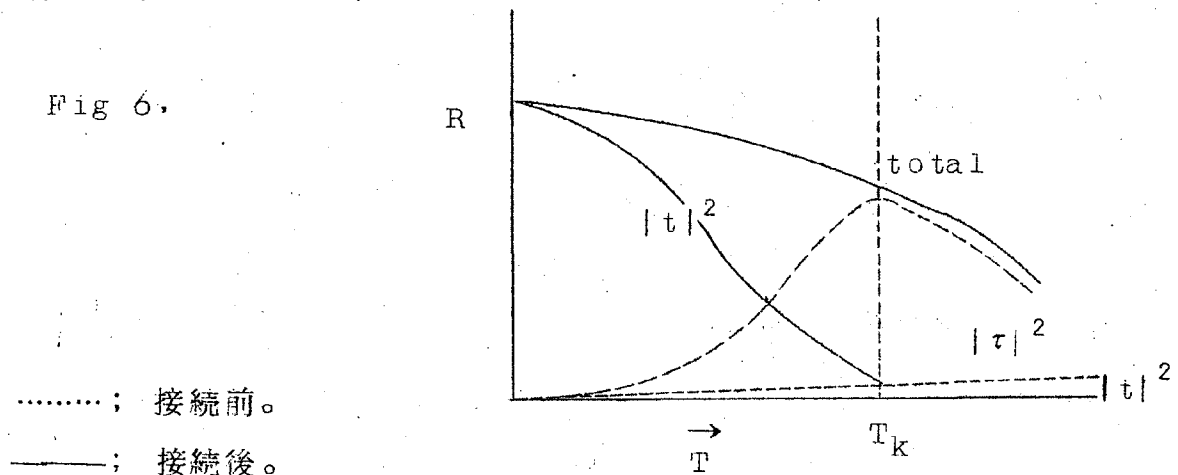
しかし，Suhl-Wong が，Nonmagnetic impurity の散乱を共に考えた数値計算では，exchange の方が大きい場合でも，(3.7) のように激しい変化を示してないように見える。従って，近似 (3.3) が  $T \simeq T_k$  でも使えるかは疑問で，この点数値計算による check が望まれる。Suhl-Wong の数値計算では， $T < T_k$  で  $R$  が Saturate するような形である。

抵抗の温度変化は，物理的には次のように理解される。

$$R \propto \left\{ |t(\omega)|^2 + 4S(S+1) |\tau(\omega)|^2 \right\} \omega \sim T$$

と，オーダー的に考える。§1 の  $S$  の接続で生ずる  $\delta_{ab}(\omega)$  は， $T < T_k$  でのスピン Flip を伴わぬ抵抗部分 ( $|t|^2$  を含む部分) の異常な enhancement に導く。 $|\tau|^2$  の項は， $\delta_{ab}$  により不変である。

大体の，模様を図6に示す。



## § 4 Ground State Energy.

$H = H_0 + H'$  の散乱ポテンシャル  $H'$  を有する時の T マトリックスは,

$$\begin{aligned} T_{k'\sigma', k\sigma}(\omega) &= \langle [c_{k'\sigma'}, [H', c_{k\sigma}^*]]_+ \rangle \\ &+ \langle [c_{k'\sigma'}, H'] \frac{1}{\omega + i\epsilon - H} [H', c_{k\sigma}^*] \rangle \\ &+ \langle [H', c_{k\sigma}^*] \frac{1}{\omega + H + i\epsilon} [c_{k'\sigma'}, H'] \rangle \end{aligned}$$

と与えられる。 $\langle \rangle$  は可能な状態についての平均。T マトリックスの bare spin に対する依存性を明にする時は, orbital についてのみ平均すれば良い。

$$\begin{aligned} H' &= \frac{|J|}{2N} \sum_{kk'} [S^+ c_{k\downarrow}^* c_{k'\uparrow} + S^- c_{k\uparrow}^* c_{k'\downarrow} \\ &+ S_z (c_{k\uparrow}^* c_{k'\uparrow} - c_{k\downarrow}^* c_{k'\downarrow})], \end{aligned}$$

である。

上の T マトリックスの high frequency limit を考えると,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} T_{k'\sigma', k\sigma}(\omega) &= \langle [c_{k'\sigma'}, [H', c_{k\sigma}^*]]_+ \rangle \\ &+ \frac{1}{\omega} \langle [[c_{k'\sigma'}, H'], [H', c_{k\sigma}^*]]_+ \rangle. \end{aligned}$$

具体的な  $H'$  の表式を上式に代入して, 次式を得る。

$$\langle H' \rangle = \frac{1}{-|J|} \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega + t(\omega)] + \frac{|J|}{2N} S(S+1) \left( \sum_k 1 \right). \quad (4.1)$$

$$t(\omega) = \frac{1}{2} (T_{\uparrow\uparrow} + T_{\downarrow\downarrow}) \text{ であり, } \sum_k 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx$$

である。

$$S_n(z) = 1 - 2\pi i \rho(z) t_n(z) \text{ として, } S(z) = 1 - 2\pi i \rho(z) t(z)$$

であったから, (1.5) より次式を得る。

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z t(z) = \frac{\Delta}{\rho \pi} + \lim_{z \rightarrow \infty} z t_n(z)。$$

これを (4.1) に代入し、次式を得る。

$$\langle H' \rangle = - \frac{\Delta}{\frac{|J|}{2N} \rho \pi} + \langle H' \rangle_n,$$

$$\text{ここに } \langle H' \rangle_n = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z t_n(z)}{-\frac{|J|}{2N}} + \frac{|J|}{2N} S(S+1) \frac{1}{k}。$$

$|J| = g|J|$  と結合常数  $g$  を導入すると energy shift は、

$$E - E_0 = \int_0^1 \frac{\langle H' \rangle}{g} g \, dg \text{ の故,}$$

$$E - E_0 = (\Delta E)_{ab} + (\Delta E)_n. \text{-----(4.2) '}$$

$$(\Delta E)_{ab} = -\frac{2}{\pi} \Delta, \quad (\Delta E)_n = \int_0^1 \frac{\langle H' \rangle_n \cdot g}{g} dg \text{ --(4.2) ''}$$

ここで  $\Delta = D e^{-\frac{1}{\rho_1 |J|}}$  を用いた。

$(\Delta E)_n$  の式を以下で計算する。

$$t_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \frac{|t_n(x)|^2 + 4S(S+1)|\tau(x)|^2}{z - X} dx$$

$$\text{より, } \lim_{z \rightarrow \infty} z t_n(z) = 4S(S+1) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) |\tau(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) |t_n(x)|^2 dx.$$

$\tau$  の具体的形を入れると次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle H' \rangle_n &= - \frac{|J|}{2N} S(S+1) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) [A(x) - 1] dx \\ &\quad - \frac{1}{\frac{|J|}{2N}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) |t_n(x)|^2 dx \text{ -----(4.3) '} \end{aligned}$$

$$A(x) \equiv \frac{1}{\left| 1 - \frac{|J|}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x') \tanh \frac{\beta x'}{2}}{x + i\epsilon - x'} dx' \right|^2 + \frac{|J|^2}{N^2} S(S+1) \pi^2 \rho^2(x)} \quad (4.3)''$$

$\langle H' \rangle_n$  及び  $(\Delta E)_n$  の  $|J|$  についての展開についての議論は, Appendix である。

上述の事より,  $(\Delta E)_{ab}$  として Nagaoka と同じ式を得た。従って異常比熱も Nagaoka と同じ結果を得る。

## § 5 帯磁率

§ 2 に於て, c 電子の spin operator  $s_z$  の orbital average が, 基底状態が縮退している系では,

$\langle\langle s_z \rangle\rangle = A_0 S_z$  と表される事を見出した。 $A_0$  は, Fermi 面での singlet と triplet な S マトリックスの phase shift の差で書かれる。c 電子と, Impurity spin が同じ値の  $g$  factor をとる時の, Pauli - Para 以外の帯磁率  $\chi$  が,  $A_0$  で表されないかを考える。

磁場  $H$  の下の Hamiltonian  $\bar{H}$  を

$$\bar{H} = H + g \mu_B (s_z + S_z) H \quad \text{とする。}$$

$$\chi = (-g \mu_B) \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\langle s_z + S_z \rangle_H}{H}$$

$\langle \rangle_H$  は, 磁場のある系についての平均。

次式を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{(-g \mu_B) \langle S_z \rangle_H}{H} &= \beta g^2 \mu_B^2 \langle (S_z + s_z) S_z \rangle_H = 0 \\ &= \beta g^2 \mu_B^2 \frac{S(S+1)}{3} (1 + A_0) \end{aligned}$$

$\langle s_z \rangle_H$  の中, 我々が求め度いのは, 不純物スピンにより誘起された部分

(それを  $\langle s_z(\text{induce}) \rangle_H$  と書く) である。  $\langle s_z(\text{induce}) \rangle_H = A(H) \langle s_z \rangle_H$  の形を有し,  $A(H)$  は原理的には, 散乱理論で計算され得る。この  $A(H)$  を用いると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{(-g \mu_B) \langle s_z(\text{induce}) \rangle_H}{H} &= -g \mu_B A(H=0) \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\langle s_z \rangle_H}{H} \\ &= A(H=0) \frac{g^2 \mu_B^2 \beta S(S+1)}{3} (1 + A_0) \end{aligned}$$

しかし,  $A(H=0)$  は  $A_0$  とは異なる。何故ならば,  $\langle\langle s_z \rangle\rangle \neq S_z$  の故,

$$\langle\langle s_z \rangle\rangle / S_z \equiv f_r \quad \text{-----} (5.1)$$

とすると,  $\langle\langle s_z \rangle\rangle = A_0 S_z = \frac{A_0}{f_r} \langle\langle s_z \rangle\rangle$  の故,  $A(H=0) = \frac{A_0}{f_r}$  である。故に, 次式を得る。

$$\chi / \chi_0 = (1 + A_0) \left(1 + \frac{A_0}{f_r}\right), \quad \chi_0 \equiv \frac{g^2 \mu_B^2 \beta S(S+1)}{3} \quad (5.2)$$

$f_r$  は, Yosida - Okiji<sup>⑦</sup> により計算されたスピンのちぢみの効果を表す量である。Suhl は, Chew - Low の散乱理論を用いる時, Chew - Low 理論に固有なくりこみ常数 ( $s-d$  の問題では, この  $f_r$  である。) を考えず,  $f_r = 1$  としている。

しかし, この論文では, この効果に立入らぬ事にする。只, 注意すべきは,  $f_r \leq 1$  で, Suhl の理論に表れる  $|J|$  は正しくは  $f_r |J|$  で,  $f_r$  の効果は決して trivial で無い。

$f_r = 1$  の近似を採用すると,

$$\chi / \chi_0 \doteq (1 + A_0)^2 \quad \text{-----} (5.3)$$

前節迄と同様に, 上で導出した基底状態が縮退している系でのみ成立する式を, 接続した  $S(z)$  を用いると,  $T < T_k$  でも成立すると仮定して話を進める。  $A_0$  は,  $S_t$  と  $S_s$  の phase shift 差で定る故,  $\delta_{ab}$  は  $A_0$  に効果を有しない。

§ 1 の Suhl の解を用いると次式を得る。

$$\ell n S_s(\omega) = 2i\delta'(\omega) + i \tan^{-1} \frac{2(S+1) \cos \Psi(\omega) \sin \Psi(\omega)}{1 - 2(S+1) \sin^2 \Psi(\omega)},$$

$$\ell n S_+(\omega) = 2i\delta'(\omega) - i \tan^{-1} \frac{2S \cos \Psi(\omega) \sin \Psi(\omega)}{1 + 2S \sin^2 \Psi(\omega)}.$$

$$\text{ここに } \Psi(\omega, T) = \tan^{-1} \frac{2\pi\rho(\omega)}{\frac{4N}{|J|} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x) \tanh \frac{\beta x}{2} dx}{x - \omega}} \quad (5.4)$$

§ 2 の  $A_0$  の式が,  $T \neq 0$  でも成立つように  $\omega = 0$  で  $T \neq 0$  でも unitary な形をとると, 次式を得る。

$$A_0(T) = -\frac{1}{(2\pi)(2S+1)} \times \left[ \tan^{-1} \frac{(2S+1) \sin(2\Psi(\omega, T))}{(1-2(S+1) \sin^2 \Psi(\omega, T)) (1+2S \sin^2 \Psi(\omega, T))} \right]_{\omega=0} \quad (5.5)$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho & |z| < D \\ 0 & |z| > D \end{cases} \quad \text{ととると,}$$

$$\tan \Psi(\omega=0, T) = \frac{\frac{|J|\rho\pi}{2N}}{1 + \frac{|J|\rho}{N} \log \frac{T}{D}} \quad (5.6)$$

Weak-coupling で  $|J|$  につき展開すると,

$$A_0(T) \simeq -\frac{\Psi(0, T)}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \frac{\frac{|J|\rho\pi}{2N}}{1 + \frac{|J|\rho}{N} \log \frac{T}{D}}$$

と,  $\frac{\chi}{\chi_0} \simeq 1 + 2 A_0(T)$  とすると,

Scalpino<sup>⑧</sup>の結果を得る。

(5.5) と (5.6) を用いて,  $\frac{x}{x_0}$  を  $S = \frac{1}{2}$  の場合に数値計算した。その結果を図7に示す。図は,  $|J|\rho_1 = 0.1$  の場合であるが, 曲線の形は  $|J|\rho_1 \ll 1$  の限り,  $|J|\rho_1$  には殆んどよらぬ。この場合,  $\left(\frac{x}{x_0}\right)_{T=0} = \frac{1}{4}$  である。

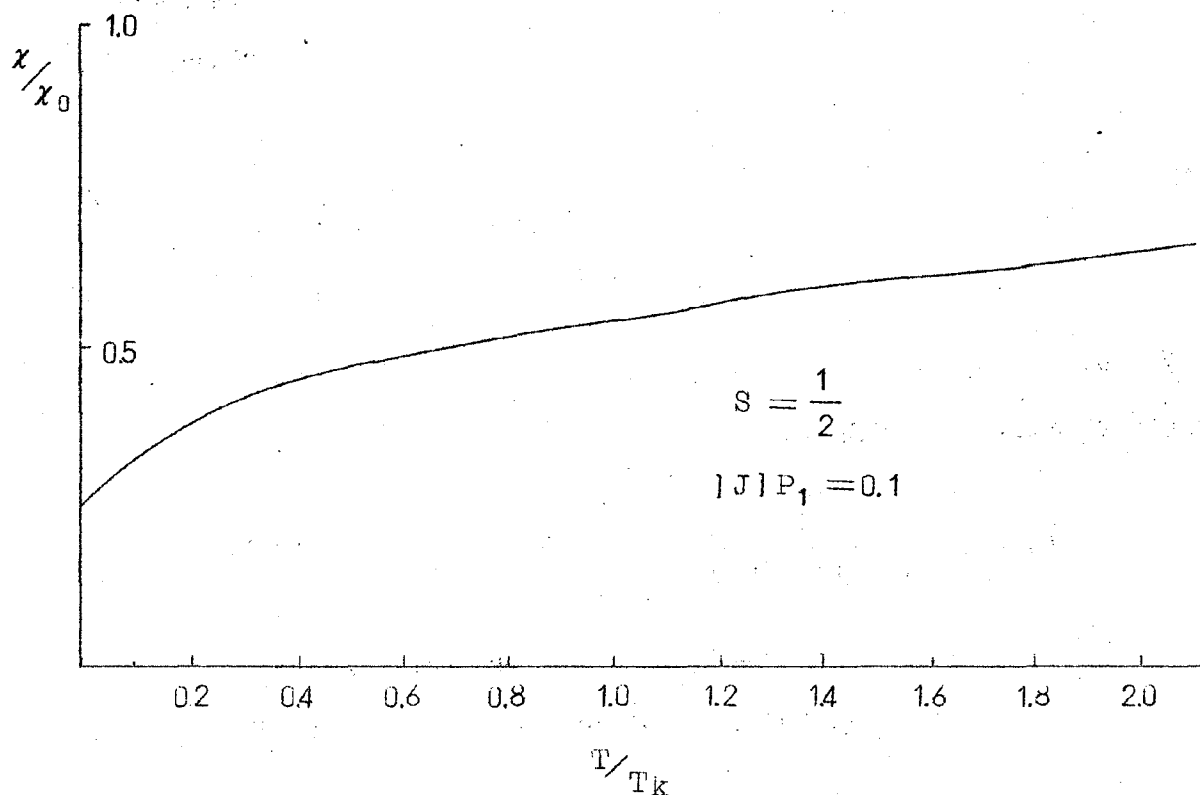


Fig 7.

しかし、今迄述べた帯磁率の結果は、物理的に考えにくい。それは、最初  $\tau$  に表れた上半面の complex pole を消すように  $\delta_{ab}$  を導入したが、 $\tau$  と関係が深いと思れる  $x$  には、この事が何も効果を与えないという事である。

( $\delta_{ab}(\omega)$  は, spin-independent ポテンシャルの phase shift に相当し, spin-independent ポテンシャルが,  $x$  に寄与しないと考えれば, 理解出来るが。)

この事は,  $f_T = 1$  の近似によると思われる。特に,  $\frac{x}{x_0}$  の  $T=0$  での値は,  $f_T$  の効果を考慮して計算する迄は, 疑問と思われる。§3で述べたように, 電子1ヶが縮退した基底状態に trap し, 仮りに singlet になったとすると,

$\langle\langle s_z + S_z \rangle\rangle = 0$ , 即ち  $\frac{A_0}{f_r} = -1$  で,  $\frac{\chi}{\chi_0} = 0$  である。

## § 6 B-H 及び Hamaun の理論との比較

B-H の理論では,  $|z| \ll D$  でのみ我々の  $S(z)$  に対応する  $S_{BH}(z)$  が与えられている。それは, Suhl の記号で, Practically に, 次のように与えられる。

$$S_{BH}(\omega) = \frac{\bar{X}^+(\omega)}{\sqrt{(\bar{X}^+(\omega))^2 + a(\omega=0)}} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-D}^D \frac{\ln|\bar{H}(\omega')|}{\omega - \omega' + i\epsilon} d\omega'\right) \quad (6.1)'$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}^+(\omega) &= X(\omega + i\epsilon), \quad \bar{X}^-(\omega) = X(\omega - i\epsilon) \\ a(\omega=0) &= 16\pi^2 \rho^2 S(S+1) \equiv a, \\ \bar{H}(\omega) &= \frac{\bar{X}^+(\omega) \bar{X}^-(\omega) + a}{(\bar{X}^-(\omega))^2 + a} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)''$$

$|\omega| \ll D$  の場合に, 我々の結果 (1.5) の  $S(\omega)$  と  $S_{BH}(\omega)$  を比較する。

$J^2 \rho_1^2 S(S+1) \rightarrow 0$  の limit では,

$$S_{BH}(\omega), \quad S(\omega) = \begin{cases} 1 & T > T_k \\ \frac{\omega - i\Delta}{\omega + i\Delta} & T < T_k \end{cases}$$

と同様に振舞う。  $S(\omega) = e^{2i\delta'(\omega)} e^{-2\delta''(\omega)}$  とすると,

$e^{2i\delta'_{BH}(\omega=0)} \equiv e^{2\delta''(\omega=0)} S_{BH}(\omega=0)$  として我々の  $\delta_{ab}(\omega=0)$

に相当する  $\delta'_{BH}(\omega=0)$  を考えると, 次式を得る。

$$e^{2i\delta'_{BH}(\omega=0)} = \begin{cases} 1 & T > T_k \\ -1 & T < T_k \end{cases} \quad (6.2)$$

これは我々の  $e^{2i\delta_{ab}}(\omega=0)$  と同じように振舞。 § 4 の (4.1) を、 $S_{BH}(\omega) = 1 - 2\pi i \rho_{t_{BH}}(\omega)$  に機械的に用いると、 $\langle H' \rangle$  中には  $\langle H' \rangle_n$  に相当する項は無いが、(これは  $S_{BH}(\omega)$  の意味が  $S(\omega)$  と異なるためで、 $S_{BH}(\omega)$  が不正確の事を、意味しない)、我々の  $\Delta$  に対応する量として、次のような量をうる。

$$\Delta \rightleftharpoons \frac{1}{4\pi^2} \int_{-D}^D \ln |\bar{H}(\omega')| d\omega' \quad \text{----- (6.3)}$$

従ってオーダー的に、B.H の  $(\Delta E)_{ab}$  は

$$(\Delta E_{ab})_{B.H} \doteq - \frac{1}{2\pi^3} \int_{-D}^D \ln |\bar{H}(\omega')| d\omega' \quad \text{----- (6.4)}$$

(6.4) に対応する式は、Nagaoka<sup>⑨</sup> が既に得ている。B.H のように、 $T=0$  で

$$\ln \bar{H}(\omega') \doteq \begin{pmatrix} 1 & |\omega'| < T_k \\ 0 & |\omega'| > T_k \end{pmatrix} \quad \text{の近似をとると}$$

$$(\Delta E_{ab})_{B.H} \doteq - \frac{T_k}{\pi^3}$$

上の事より、Hamann は  $\ln H(\omega)$  を含む項が落ちている式を用いている故、 $(\Delta E)_{ab}$  従って異常比熱を見出し得なかった。Hamann は、 $\chi$  を  $S = \frac{1}{2}$  の場合に計算し、 $(\frac{\chi}{\chi_0})_{T=0} = 0$  と述べている。しかし彼の計算は、電気抵抗の場合と異り、 $\ln H(\omega)$  を含む項が  $\chi$  にも寄与し、結果は可成変ると思われる。

## § 討 論

我々の結果は、 $T < T_k$  の電子 trap という事から、Yosida 理論と或る種の類似性があると考えられる。Yosida 理論では、 $(\frac{\chi}{\chi_0})_{T=0} = 0$ <sup>⑩</sup> であるが、この点は、我々の計算に  $f_T \neq 1$  の効果が落ちてゐるために、比較には

早いと思われる。

Yosida 理論による電気抵抗の計算が望まれる。Kondo, Anderson, Yoshimori, 等の計算では, ground state energy は,  $cDe^{-\frac{1}{\rho_1|J|\alpha}}$  ( $c, \alpha$ : 数係数) の形であるが, 人により  $\alpha$  が大分ずれている。 $f_r$  の効果は, 上の形にも効くはずで, 我々の理論に,  $f_r \approx 1$  の効果を取り入れる計算が望まれる。

我々の接続した解と, Yosida 理論の singlet ground state との関係は, 次のようなものと考えて良からう。 $s-d$  の  $T < T_k$  と  $T > T_k$  の状態の差は, 超伝導の Super と normal のような severe な差で無からう。従って,  $s-d$  の一つの多体的状態は, unique な記述で表され無くとも良く,  $c$  電子  $2N$  け, 不純物スピン 1 けの系で, この状態を記述すると ebe-trap の Virtual state ( $S$  マトリックスの  $\omega = -i\Delta$  の pole で, unstable particle 的な状態) として表され,  $c$  電子 ( $2N+1$ ) け不純物スピン 1 けの系では, 内存的 bound state として眺められると思われる。

親切に preprint を送って頂いた事に対して, 芳田さん及び長岡さんに深く感謝します。

§ Appendix.  $\langle H' \rangle_n$  及び  $(\Delta E)_n$  の  $|J|$  についての展開.

(4.3)' の  $A(x)$  を含む項を考える。 $\rho(x) = \begin{cases} \rho & |x| < D \\ 0 & |x| > D \end{cases}$  の近似

で, 次式を得る。

$$A(Dx) = \frac{1}{(1 + |J|\rho_1 \log \frac{(x)}{\sqrt{1-x^2}})^2 + \pi^2 \rho_1^2 S(S+1)}$$

$$\text{ここに } \overline{S(S+1)} = S(S+1) + \frac{1}{4}$$

これにより, (4.3)' の  $(A(x)-1)$  を含む項は, 次のように求まる。

$$\langle H' \rangle_n = -D |J| \rho_1 F(|J|), \quad \text{-----} (A.1)'$$

$$F(|J|) = \left[ \frac{1}{(1 + \pi^2 \rho_1^2 |J|^2 S(S+1))^2} - 1 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (|J| \rho_1)^n B_n, \quad \text{----- (A.1)'}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi \rho_1 |J| \sqrt{S(S+1)}} \frac{\text{Im} \left[ 1 + i \pi \rho_1 |J| \sqrt{S(S+1)} \right]^{n+1}}{\left[ 1 + \pi^2 \rho_1^2 |J|^2 S(S+1) \right]^{2(n+1)}} \quad \text{----- (A.1)''}$$

$\pi^2 \rho_1^2 |J|^2 S(S+1) \rightarrow 0$  では、 $\langle H' \rangle_n$  中の  $(A(x) - 1)$  を含む項は発散する。しかし、(A.1) を  $(\Delta E)_n$  の式に入れ、その後  $\pi^2 \rho_1^2 |J|^2 x$   $S(S+1) \rightarrow 0$  とすると、

$$(\Delta E)_n = -S(S+1) \sum_{n=1}^{\infty} (|J| \rho_1)^{n+1} A_n, \quad \text{----- (A.2)}$$

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \tan \theta)^n \cos \theta d\theta, \quad A_1 = \log 2.$$

を得る。しかし、この (A.2) の展開は、 $|J|$  の巾級数としては意味なく、漸近展開 ( $\frac{1}{|J|}$  についての) と考えても果して意味があるか、疑問である。

何故ならば、 $A(Dx)$  中の  $\log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  を  $\log x$  で近似すると (A.2) に対応して

$$(\Delta E)_n = -DS(S+1) \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)! (\rho_1 |J|)^n$$

$$= -|J| \rho_1 DS(S+1) \left[ \frac{1}{\rho_1 |J|} e^{-\frac{1}{\rho_1 |J|}} Ei\left(\frac{1}{\rho_1 |J|}\right) - 1 \right]$$

を得る。 $Ei$  は積分指数函数。Ferro ( $|J| < 0$ ) の時は、この式は漸近展開として意味を持つが、 $|J| > 0$  の時は、その意味でも無意味である。

( $Ei(x)$  は  $x < 0$  でのみ定義され得る。) (A.2) は上述の近似の式より、小さい値をとろうが、定性的結果が非常に変るとは思れ無い。

故に、 $|J|$  の展開が意味を持つためには、 $\langle H' \rangle_n$  中の  $|t|^2$  を含む項も考えて、漸近展開である事を示さねばならぬ。しかし、そこ迄考えなくとも、

(A. 1) 式では  $\langle H' \rangle_n$  は発散しない故, そこで  $(1 + \pi^2 \rho_1^2 |J|^2 S(S+1))$  の分母の因子は巾級数展開が許され, それを分子の  $|J|$  についての展開したものとまとめ直すと, その結果は,  $\frac{1}{|J|}$  について漸近展開の意味を,  $\langle H' \rangle_n$  が定義される故, 有するはずである。 $|t|^2$  を含む項についても, 同様な注意必要であろう。しかしながら,  $(\Delta E)_{ab}$  中の  $e^{-\frac{1}{\rho_1 |J|}}$  のような, 形式的にさえも巾展開が不可能なような項を  $(\Delta E)_n$  は含まず,  $|J|$  についての  $|J| = 0$  での特異性は, 当然のように,  $(\Delta E)_{ab}$  と  $(\Delta E)_n$  では, 本質的に異なる。

## References

- ① H-Suhl ; P.R. 138 A515 ('65), physics 2 39 ('65),  
P.R. 141 483 ('66) ; H-Suhl and D.Wong,  
physics 3 1 ('67).
- ② Y.Nagaoka ; P.R. 138 A1112 ('65), P.T.P. 371 3 ('67).
- ③ D.R.Hamaun ; P.R. 158 570 ('67).
- ④ D.E.Bloomfield and D.R.Hamaun ; ( preprint )
- ⑤ K.Yosida ; P.R. 147 223 ('66), P.T.P. 36 875 ('66),  
; A.Okiji ; ibid 36 714
- ⑥ Y.Nagaoka ; ( preprint )
- ⑦ K.Yosida and A.Okiji ; P.T.P. 34 505 ('65).
- ⑧ D.R.Scalpino ; P.R.L. 16 937 ('66).
- ⑨ Y.Nagaoka ; 物性研短期研究会での講演。  
(昭和42年10月)
- ⑩ H.Ishi and K.Yosida ; P.T.P. 38 61 ('67).