

有限個の軌道をもつ単純線型代数群の表現について

筑波大 数学系

木村 達雄

序文 すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。単純代数群 G の有限次元有理表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ は既約表現 $\rho_i (i=1, \dots, \ell)$ の直和 $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_\ell$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_\ell$ に分解するが、本論では、 ρ と各既約成分 $V_i (i=1, \dots, \ell)$ のスカラー倍との合成により、 V が有限個の軌道に分解するものをすべて決定し、その軌道分解を具体的に与える。本質的に、単純代数群の概均質ベクトル空間の分類の結果を使う。尚、 ρ が既約 ($\ell=1$) の場合は、T. Kimura と V. Kac が独立にやっており、([1], [5], [7], [8]) この場合は省く。以下では $\ell \geq 2$ のみ扱う。

準備 有限個の軌道に分解すれば、少なくとも一つの軌道 (実は丁度一つ) の次元は $\dim V$ に一致するから triplet $(GL(1)^\ell \times G, \rho, V)$ (但し $GL(1)^\ell$ は各既約成分にスカラー倍として作用) は概均質ベクトル空間でなければならぬ。このような単純群とスカラー倍の合成による概均質ベクトル空間は分類が完成して

い)る。

定理 (T. Kimura ([4])) 単純代数群 G とその有限次元有理表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ で、各既約成分のスカラー倍との合成が概均質になるのは次の場合に限る。(ρ は既約, 即ち $\ell \geq 2$ とする.)

$$(1) \quad \overset{SL(n)}{\square + \underbrace{\cdots + \square}_{k} + \square^{(*)}} \quad (1 \leq k \leq n) \quad (n \geq 2)$$

(但し $\square$ は $x \mapsto Ax$ ($A \in SL(n)$, $x \in \mathbb{C}^n$), $\square^{(*)}$ は $\square$ の dual, 即ち $x \mapsto {}^t A^{-1}x$ ($x \in \mathbb{C}^n$), $\square^{(*)}$ は $\square$ または $\square^{(*)}$ の意味.)

$$(2) \quad \overset{SL(n)}{\square + \square^{(*)} + \underbrace{\cdots + \square^{(*)}}_k} \quad (1 \leq k \leq 3), \text{ 但し } \overset{SL(2m+1)}{\square + \square + \square + \square^{(*)}} \text{ を除く.} \\ (n \geq 4)$$

($\square$ は n 次歪対称行列の空間に $X \mapsto AX^t A$ (${}^t X = -X$) と作用する表現. 言い換えると $u_1, \dots, u_n$ を $\mathbb{C}^n$ の base とするとき $V = \sum_{i < j} \mathbb{C} u_i \wedge u_j$ に $SL(n)$ を, $\rho_2(g)(\sum x_{ij} u_i \wedge u_j) = \sum x_{ij} \rho_1(g) u_i \wedge \rho_1(g) u_j$ ($\rho_1 = \square$) と作用させたもの.)

$$(3) \quad \overset{SL(2m+1)}{\square + \square} \quad (m \geq 2) \quad (\square + \square^{(*)} \text{ は non P.V.})$$

$$(4) \quad \overset{SL(n)}{\square + \square^{(*)}} \quad \left(\begin{array}{l} \square \text{ は } n \text{ 次対称行列の空間に } X \mapsto AX^t A \\ (A \in SL(n), {}^t X = X) \text{ と作用させたもの.} \end{array} \right)$$

$$(5) \quad \overset{SL(n)}{\square + \square^{(*)}} \quad (n=6, 7) \quad \left(\begin{array}{l} \square \text{ は } SL(n) \text{ が 3-forms の空間} \\ V = \sum_{i < j < k} \mathbb{C} u_i \wedge u_j \wedge u_k \text{ に作用したもの.} \end{array} \right)$$

$$(6) \quad \begin{matrix} SL(6) \\ \square + \square + \square \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} SL(6) \\ \square + \square + \square^* \end{matrix} \text{ は non P.V.} \right)$$

$$(7) \quad \begin{matrix} Sp(n) \\ \square + \underbrace{\dots}_{\ell} + \square \end{matrix} \quad (2 \leq \ell \leq 3, \quad Sp \text{ では } \square = \square^*)$$

$$(8) \quad \begin{matrix} Spin(n) \\ (\text{半})\text{スピン表現} + \text{ベクトル表現} \end{matrix} \quad (n = 7, 8, 10, 12)$$

$\left(\begin{array}{l} n=3, 5, 6 \text{ でもよいが, } n=3 \text{ は (4) の } n=2, \quad n=6 \text{ は (2) の} \\ n=4 \text{ の場合と同値, } n=5 \text{ の場合は 次の (9) と同値, } n=4 \text{ は単純} \\ \text{群ではないので, 省く.} \end{array} \right)$

$$(9) \quad \begin{matrix} Sp(2) \\ \square + \square \end{matrix}$$

$$(10) \quad \begin{matrix} Sp(3) \\ \square + \square \end{matrix}$$

$$(11) \quad \begin{matrix} Spin(10) \\ \text{偶半スピン表現} + \text{偶半スピン表現} \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{偶半スピン表現} + \text{奇半スピン表現} \\ \text{は non P.V., } Spin(10) \text{ の場合} \\ \text{奇'' は偶'' の dual.} \end{array} \right)$$

さて, これ等のなかで有限個の軌道をもつものを決定する。

Lemma 1. ([6]), (reductive とは 限らない) 群 G と表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 及びその dual $\rho^*: G \rightarrow GL(V^*)$ を考える。その時,
 (G, ρ, V) が有限個の軌道をもつ $\iff (G, \rho^*, V^*)$ が有限個の軌道をもつ。そのとき軌道は 1 対 1 に対応する。

証明, ([6] の別証を与えよう。) $\mathfrak{g}$ を G のリー環, dP を P の微分とする。 $V \times V^*$ 内の Zariski-closed set W を $W \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^*; \langle dP(A)x, y \rangle = 0 \text{ for all } A \in \mathfrak{g}\}$ と定める。 V の点 x に対し, V^* の部分空間 V_x^* (x の conormal vector space とよばれる) を, $V_x^* = \{y \in V^*; \langle dP(A)x, y \rangle = 0 \text{ for all } A \in \mathfrak{g}\}$ と定める。 V 内の G -軌道 S に対して, その conormal bundle T_S^*V を $\{(x, y) \in V \times V^*; x \in S, y \in V_x^*\}$ の $V \times V^*$ における Zariski-closure として定義する。同様に V^* 内の G -軌道 S^* についても $T_{S^*}^*V^*$ を定義する。これは n 次元の algebraic set ($n = \dim V$) である。定義から

$$(*) \quad W = \bigcup_{x_0 \in V} T_{P(G)x_0}^*V = \bigcup_{y_0 \in V^*} T_{P^*(G)y_0}^*V^*$$

となる。 $\langle dP(A)x, y \rangle = -\langle x, dP^*(A)y \rangle$ ゆえ, W は V と V^* に関して対称であることに注意する。然るば, Lemma をいうには

(G, P, V) が有限軌道をもつ $\iff \dim W = n$, を示せばよい。

$\Rightarrow$) は conormal bundle の次元が n ゆえ (*) より明らか。

$\Leftarrow$) $T_{P(G)x_0}^*V$ の n 次元の既約成分を $\wedge_{P(G)x_0}$ とすると, $\dim W = n$ より, $\wedge_{P(G)x_0}$ は, W の既約成分, 従って有限個でなければならぬ。

さて $\dim W = n$ のとき, $T_{P(G)x_0}^*V = T_{P^*(G)y_0}^*V^*$ により V の軌道 $P(G)x_0$ と V^* の軌道 $P^*(G)y_0$ が 1 対 1 に対応する。これを互いに, dual orbit という。 //

Proposition 2. 次の空間(と各既約成分のスカラー倍との合成)は無数個の異なる軌道をもつ。

$$(1) \quad \begin{matrix} SL(n) \\ \square + \underbrace{\dots + \square}_k + \square^* \end{matrix} \quad (k \geq 3)$$

$$(2) \quad \begin{matrix} SL(n) \\ \square + \square^{(*)} + \square^{(*)} + \square^{(*)} \end{matrix} \quad (n \geq 4)$$

$$(3) \quad \begin{matrix} SL(2m+1) \\ \square + \square \end{matrix}$$

$$(4) \quad \begin{matrix} SL(6) \\ \square + \square + \square \end{matrix}$$

$$(5) \quad \begin{matrix} Spin(10) \\ \text{偶半スピン表現} + \text{偶半スピン表現} \end{matrix}$$

証明) (1) $k \geq 3$ で有限個の軌道をもつと仮定すると, lemma 1 を各既約成分の *isotropy subgroup* 等に適用して,

$\square + \square + \square^* + \square^*$ も有限個の軌道をもつことになるが, これは non P.V. ゆえ矛盾. (2) の $n = 2m+1$ の場合, 及び (3) ~ (5) も全く同様である. $n = 2m$ のとき, 有限個の軌道をもてば, lemma 1

より, $\square + \square + \square + \square^*$ も有限個の軌道をもつ. $V = \{(X; x, y, z);$

${}^tX = -X \in M(2m), x, y, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$ の部分空間 $V' = \{(X'; x', y', z');$

$X' = \begin{pmatrix} X'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^tX'' = -X'' \in M(2m-1), x' = \begin{pmatrix} x'' \\ 0 \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y'' \\ 0 \end{pmatrix}, z' = \begin{pmatrix} z'' \\ 0 \end{pmatrix}, x'', y'', z'' \in \mathbb{C}^{2m-1}\}$

も有限個に分解し, V' の元が G -equivalent になる条件を書き

下してみれば, $SL(2m-1)$, $\square + \square + \square + \square^*$ が少なくとも P.V. (i.e. 概均質) であることがわかり, これは矛盾. Prop 2.

定理3. 単純代数群 G とその表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ で, 各既約成分のスカラー倍との合成が有限個の軌道をもつものは, 次のものに限る。

$$(1) \quad SL(n) \quad (\square), \square + \square, \square + \square^*, \square + \square + \square, \square + \square + \square^*$$

(例えば $\square^*, \square^* + \square^*, \square + \square^* + \square^*$ などは $SL(n)$ の外部自己同型 $A \mapsto {}^t A^{-1}$ により, それぞれ $\square, \square + \square, \square^* + \square + \square$ にうつるから, triplet として同値ゆえ省いてある.)

$$(2) \quad SL(n) \quad \square + \square, \square + \square^*, \square + \square + \square, \square + \square + \square^*, \square + \square^* + \square^*$$

$$(3) \quad SL(n) \quad \square + \square, \square + \square^*$$

$$(4) \quad SL(6) \quad \square + \square \quad (SL(6) \text{ では } \square^* = \square \text{ ゆえ } \square + \square^* \text{ は } \square + \square \text{ と triplet として同値になる.})$$

$$(5) \quad SL(7) \quad \square + \square, \square + \square^*$$

$$(6) \quad Sp(n) \quad (\square), \square + \square, \square + \square + \square$$

(8) $\text{Spin}(n)$ $(n=7, 8, 10, 12)$
 (半)スピンの表現 + ベクトル表現

(9) $\text{Sp}(2)$
 $\square + \square$

(10) $\text{Sp}(3)$
 $\square + \square$

証明) 2頁の定理と Prop. 2 により, 有限個の軌道に分解するなら, これらのうちの一つであることがわかる。次の § で各空間の軌道分解を行ない実際に有限個の軌道に分解する事を確かめる。 //

§ 1. 軌道分解 (orbital decomposition)

Lemma 1 により, 例えば $\text{SL}(n)$
 $\square + \square + \square$ の場合にやれば十分である。 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ が ℓ 個の既約表現の直和: $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_\ell$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_\ell$ で $\text{GL}(1)^\ell$ が各既約成分にスカラー倍として作用する時は単に $(\text{GL}(1)^\ell \times G, \rho, V)$ または $(\text{GL}(1)^\ell \times G, \rho)$ と略記する。それ以外の場合, $\text{GL}(1)^k$ の作用を $\begin{smallmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{smallmatrix}$, $\dots$, $\begin{smallmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{smallmatrix}$ と表わす事にする。例えば $(\text{GL}(1)^2 \times \text{SL}(n), \begin{smallmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{smallmatrix} \otimes \square + \begin{smallmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \otimes (\square + \square))$ は $(\text{GL}(1) \times \text{GL}(1) \times \text{SL}(n), \square \otimes 1 \otimes \square + 1 \otimes \square \otimes (\square + \square))$ の意味である。 $k=1$ のときは, $\begin{smallmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{smallmatrix}$ のかわりに $\square$ とかく。

$\mathbb{C}^n$ の元 e_i を $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ($i=1, \dots, n$) と定める

一般に $\mathbb{C}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^n \ni x = (x_1, \dots, x_\ell)$ に対し, $r_{i_1 \dots i_k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{rank}(x_{i_1} \dots x_{i_k})$ と定めると, これは $(\text{GL}(1)^\ell \times \text{SL}(n), \square \oplus \dots \oplus \square)$ の作用による不変量である。

Proposition 4.

(I) $(GL(1) \times SL(n), \square)$ (実は $(SL(n), \square)$ で十分, $n \geq 2$) の軌道分解

(1) 代表点 0 , $\gamma_1 = 0$ (2) 代表点 e_1 , $\gamma_1 = 1$

(II) $(GL(1)^2 \times SL(n), \square + \square)$ (実は $(GL(1) \times SL(n), \blacksquare \otimes \square + \square)$ で十分) は

5個の orbits をもつ.

代表点	γ_1	γ_2	γ_{12}
$(0, 0)$	0	0	0
$(e_1, 0)$	1	0	1
$(0, e_1)$	0	1	1
(e_1, e_1)	1	1	1
(e_1, e_2)	1	1	2

(III) $(GL(1)^3 \times SL(n), \square + \square + \square)$ は $n \geq 3$ なら 16, $n = 2$ なら

15個 ($(e_1 e_2 e_3)$ を除いたもの) の orbits をもつ.

代表点	γ_1	γ_2	γ_3	γ_{12}	γ_{23}	γ_{31}	γ_{123}
(1) $(0, 0, 0)$	0	0	0	0	0	0	0
(2) $(e_1, 0, 0)$	1	0	0	1	0	1	1
(3) $(0, e_1, 0)$	0	1	0	1	1	0	1
(4) $(0, 0, e_1)$	0	0	1	0	1	1	1
(5) $(0, e_1, e_1)$	0	1	1	1	1	1	1
(6) $(e_1, 0, e_1)$	1	0	1	1	1	1	1
(7) $(e_1, e_1, 0)$	1	1	0	1	1	1	1

代表点	γ_1	γ_2	γ_3	γ_{12}	γ_{23}	γ_{31}	γ_{123}
(8) (e_1, e_1, e_1)	1	1	1	1	1	1	1
(9) $(0, e_1, e_2)$	0	1	1	1	2	1	2
(10) $(e_1, 0, e_2)$	1	0	1	1	1	2	2
(11) $(e_1, e_2, 0)$	1	1	0	2	1	1	2
(12) (e_1, e_1, e_2)	1	1	1	1	2	2	2
(13) (e_1, e_2, e_2)	1	1	1	2	1	2	2
(14) (e_1, e_2, e_1)	1	1	1	2	2	1	2
(15) (e_1, e_2, e_1+e_2)	1	1	1	2	2	2	2
(16) (e_1, e_2, e_3)	1	1	1	2	2	2	3

証明) (III)を示せば十分である。表現空間を $n \times 3$ 行列全体と同一視すると, $GL(n)$ の左からの作用で階段行列にできる。

即ち $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ & 0 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 のいずれかの形になる。

$GL(1)$ の作用で $*$ は 0 か 1 とできるから, (III) の 16 通りを得る。これらが異なる orbits である事は $\gamma_i, \gamma_{ij}, \gamma_{123}$ 等の不変量が異なることから明らか。 // Q.E.D.

注意) $(SL(n), \square + \square^* \text{ または } \square + \square + \square^*)$ の軌道分解も全く同じである事が Lemma 1 よりわかる。 $(SL(n), \square + \square + \square + \square^{(*)})$ において $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ は, $*$ が異なれば異なる orbits に属し, この事からも無限個の軌道をもつ事がわかる。

$SL(n)$ の軌道分解をする前に $Sp(n)$ の軌道分解をやろ。
 $(Sp(n), \square)$ の表現空間は $\mathbb{C}^{2n}$ で, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に $(i=1, \dots, 2n)$ とおく。
 $Sp(n)$ のリ-環は $\mathfrak{sp}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \in M(2n); {}^t B = B, {}^t C = C \right\}$
 で与えられる。 $\square + \dots + \square$ ($1 \leq k \leq 3$) $\ni X = (x_1, \dots, x_k)$ に対して
 $r_i = \text{rank } x_i, r_{ij} = \text{rank}(x_i, x_j), r'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \langle x_i, x_j \rangle = {}^t x_i J x_j \neq 0 \\ 0 & \text{if } \quad \quad = 0 \end{cases}$
 $r = \text{rank}(x_1 x_2 x_3)$, とおくと, これらは群の作用による不変量である。即ち, これ等の値が異なる点は, 異なる軌道に属す。

Proposition 5.

(I) $(GL(1) \times Sp(n), \square)$ (実は $(Sp(n), \square)$ で十分) は 2 個の軌道をもつ。 (1) $0, r_1 = 0$, (2) $e_1, r_1 = 1$

(II) $(GL(1)^2 \times Sp(n), \square + \square)$ (実は $(GL(1) \times Sp(n), \square \otimes (\square + \square))$ で十分) ($n \geq 2$) は 6 個の軌道をもつ。

代表点	r_1	r_2	r_{12}	r'_{12}
(1) (e_1, e_{n+1})	1	1	2	1
(2) (e_1, e_2)	1	1	2	0
(3) (e_1, e_1)	1	1	1	0
(4) $(0, e_1)$	0	1	1	0
(5) $(e_1, 0)$	1	0	1	0
(6) $(0, 0)$	0	0	0	0

(III) $(GL(1)^3 \times Sp(n), \square + \square + \square)$ は, $n \geq 3$ なる 30 個, $n = 2$ なる 29 個の軌道に分解する。

代表点	$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$	$\gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{31}$	$\gamma'_{12} \gamma'_{23} \gamma'_{31}$	γ
(1) $(e_1, e_{n+1}, e_1+e_2+e_{n+1})$	1 1 1	2 2 2	1 1 1	3
(2) $(e_1, e_2, e_{n+1}+e_{n+2})$	1 1 1	2 2 2	0 1 1	3
(3) $(e_1, e_{n+1}, e_2+e_{n+1})$	1 1 1	2 2 2	1 0 1	3
(4) (e_1, e_{n+1}, e_1+e_2)	1 1 1	2 2 2	1 1 0	3
(5) (e_1, e_{n+1}, e_2)	1 1 1	2 2 2	1 0 0	3
(6) (e_1, e_2, e_{n+2})	1 1 1	2 2 2	0 1 0	3
(7) (e_1, e_2, e_{n+1})	1 1 1	2 2 2	0 0 1	3
(8) (e_1, e_2, e_3)	1 1 1	2 2 2	0 0 0	3 ($n \geq 3$ の時)
(9) $(e_1, e_{n+1}, e_1+e_{n+1})$	1 1 1	2 2 2	1 1 1	2
(10) (e_1, e_1, e_{n+1})	1 1 1	1 2 2	0 1 1	2
(11) (e_1, e_{n+1}, e_{n+1})	1 1 1	2 1 2	1 0 1	2
(12) (e_1, e_{n+1}, e_1)	1 1 1	2 2 1	1 1 0	2
(13) (e_1, e_2, e_1+e_2)	1 1 1	2 2 2	0 0 0	2
(14) (e_1, e_1, e_2)	1 1 1	1 2 2	0 0 0	2
(15) (e_1, e_2, e_2)	1 1 1	2 1 2	0 0 0	2
(16) (e_1, e_2, e_1)	1 1 1	2 2 1	0 0 0	2
(17) $(0, e_1, e_{n+1})$	0 1 1	1 2 1	0 1 0	2
(18) $(e_1, 0, e_{n+1})$	1 0 1	1 1 2	0 0 1	2
(19) $(e_1, e_{n+1}, 0)$	1 1 0	2 1 1	1 0 0	2
(20) $(0, e_1, e_2)$	0 1 1	1 2 1	0 0 0	2

代表点	$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$	$\gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{31}$	$\gamma'_{12} \gamma'_{23} \gamma'_{31}$	γ
(21) $(e_1, 0, e_2)$	1 0 1	1 1 2	0 0 0	2
(22) $(e_1, e_2, 0)$	1 1 0	2 1 1	0 0 0	2
(23) (e_1, e_1, e_1)	1 1 1	1 1 1	0 0 0	1
(24) $(0, e_1, e_1)$	0 1 1	1 1 1	0 0 0	1
(25) $(e_1, 0, e_1)$	1 0 1	1 1 1	0 0 0	1
(26) $(e_1, e_1, 0)$	1 1 0	1 1 1	0 0 0	1
(27) $(e_1, 0, 0)$	1 0 0	1 0 1	0 0 0	1
(28) $(0, e_1, 0)$	0 1 0	1 1 0	0 0 0	1
(29) $(0, 0, e_1)$	0 0 1	0 1 1	0 0 0	1
(30) $(0, 0, 0)$	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0

証明)

(I)
$$\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_n \end{array} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ b_{1n} & \dots & b_n \end{array} & \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} c_1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{1n} & \dots & c_n \end{array} & \begin{array}{ccc} -a_1 & -a_{21} & \dots & -a_{n1} \\ -a_{12} & -a_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ -a_{1n} & \dots & -a_n \end{array} & \begin{array}{c} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{において } x \neq 0 \text{ なる } a_{12}, \dots, a_{1n}, b_1, \dots, b_{1n} \\ \text{により } x_1 \neq 0 \text{ とでき, } a_1 \text{ により } x_1 = 1 \text{ と} \\ \text{して可. その時, } a_{21}, \dots, a_{n1}, c_1, c_{12}, \dots, c_{1n} \\ \text{により } x_2 = \dots = x_{2n} = 0 \text{ とできる. 即} \end{array}$$

$\uparrow$
 $S_p(n)$ のリ-環

$\parallel$
 x

ち $x \neq 0$ なる $x \sim e_1$. ここで例えば " a_{12} より" という意味は, a_{12} 以外すべて 0 とした行列を A としたとき, $S_p(n)$ の元 $\exp A$ の作用によりという事で, 以下でも簡単の為に, この言い方をする。

(II) $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \ni \tilde{x} = (x, y)$ とする時, (I) により $x = 0$ の e_1 とし

て可、 $x=0$ なる (I) により $y=0$ の e_1 , 即ち (6) と (4) を得る。

$x=e_1$ とする。 $GL(1) \times Sp(n)$ の e_1 における isotropy subalgebra $\mathfrak{g}$

は,
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha \\ a_{21} \\ a_{n1} \\ c_{12} \\ c_{1n} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{より}$$

$$(\alpha) \oplus \begin{pmatrix} -\alpha & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{12} & b_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_{1n} & \dots & \dots & b_n \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & -a_{12} & -a_2 & \dots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & \dots & c_{nn} & -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & -a_n \end{pmatrix} \quad (\cong sp(n-1) \oplus \mathfrak{u}(2n-1))$$

$= (\alpha) \oplus A_0$, とおく。

これを $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$ に $A_0 y + y(\beta)$ と作用させる。 $y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_n \\ y_{n+2} \\ y_{2n} \end{pmatrix}$ には $Sp(n-1)$ が作用するから (I) により $y'=0$ の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

$y_{n+1} \neq 0$ なる α により $y_{n+1}=1$, b_1, b_{12} により $y_1=y_2=0$ 即ち

$y \sim e_{n+1}$ となり (1) を得る。 $y_{n+1}=0$ のとき, $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ なる a_{12} により

$y_1=0$, 即ち $y \sim e_2$ となり (2) を得る。 $y'=0$ なる $y_1 \neq 0$ の 0 に依り

て (3) または (5) を得る。

(III) $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \ni \hat{x} = (x, y, z)$ において (x, y) は (II) の 6 つのうちどれかとしてよい。(4)~(6) なる (II) を再びくり返せばよいから $(x, y) \sim (e_1, e_{n+1}), (e_1, e_2), (e_1, e_1)$ のいずれかとして可。

$(x, y) = (e_1, e_{n+1})$ の場合,
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha & b_1 \\ a_{21} & b_{12} \\ a_{n1} & b_{1n} \\ c_{12} & -a_{12} - \beta \\ c_{1n} & -a_{1n} \end{pmatrix} = 0$$

ゆえ
$$(-a_1, a_1) \oplus \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{12} & b_2 & & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_{1n} & \dots & \dots & & \\ \hline c_{22} & \dots & c_{2n} & -a_{12} & -a_2 & \dots & -a_{n2} \\ c_{2n} & \dots & c_{nn} & -a_{2n} & -a_{n2} & \dots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} (\gamma)$$
 を調べればよい。

(e_1, e_{n+1}) の isotropy subalg.

$$\bar{z}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} \text{ には } Sp(n-1) \text{ が働くから } \bar{z}' = 0 \text{ の } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ として}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + \delta & \\ & -a_1 + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_{n+1} \end{pmatrix} \quad \forall z_1, z_{n+1} = 0 \text{ の } 1,$$

即ち $\bar{z} = e_1 + e_2 + e_{n+1}, e_1 + e_{n+1}, e_2 + e_{n+1}, e_1 + e_2, e_1, e_2, e_{n+1}, 0$ の 8 通りになる。

$$(\alpha, \beta) = (e_1, e_2) \text{ の場合, } \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -A^T \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{n1} & a_{n2} \\ \hline c_1 & c_{12} \\ c_2 & c_{22} \\ \vdots & \vdots \\ c_m & c_{2n} \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{よ} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_{12} & b_2 & \dots & b_{2n} \\ a_3 & \dots & a_{3n} & \vdots & \vdots & b_3 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n3} & \dots & a_n & b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \dots & b_n \\ \hline & & & -a_1 & & & & \\ & & & -a_2 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ c_3 & \dots & c_{3n} & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 & \dots & -a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{3n} & \dots & c_n & -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ z_{n+3} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} (\delta)$$

を調べればよい。

$(-a_1, -a_2) \oplus$
 $(e_1, e_2) \text{ の isotropy subalg.}$

$$\bar{z}' = \begin{pmatrix} z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+3} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} \text{ には } Sp(n-2) \text{ が働くから (I) より } \bar{z}' = 0 \text{ の } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ として可.}$$

(i) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = 0$ のとき, $\bar{z}' = 0$ なる $z_1, z_2 = 0$ の 1, 即ち $\bar{z} = 0, e_1, e_2, e_1 + e_2$.

$$\bar{z}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき, } a_{13}, a_{23} \text{ により } z_1 = z_2 = 0 \text{ として可, 即ち, } \bar{z} = e_3.$$

(ii) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる b_1, b_{12} により $z_1 = z_2 = 0$, b_{13} により $\bar{z}' = 0$ として可, 即ち $\bar{z} = e_{n+1}$

(iii) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる b_2, b_{12} により $z_1 = z_2 = 0$, b_{23} により $\bar{z}' = 0$, 即ち $\bar{z} = e_{n+2}$.

(iv) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる, b_1, b_2 により $z_1 = z_2 = 0$, b_{13} により $\bar{z}' = 0$, 即ち $\bar{z} = e_{n+1} + e_{n+2}$.

以上まとめて, $(\alpha, \beta) = (e_1, e_2)$ の場合, $\bar{z} = 0, e_1, e_2, e_3, e_{n+1}, e_{n+2}, e_1 + e_2, e_{n+1} + e_{n+2}$ の 8 通りになる。

$$(x, y) = (e_1, e_1) \text{ の場合, } \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -A \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha & a_1 + \beta \\ a_{21} & a_{21} \\ a_{n1} & a_{n1} \\ c_1 & c_1 \\ c_{12} & c_{12} \\ \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{1n} \end{pmatrix} = 0 \text{ より,}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_2 & \dots & a_{2n} & b_{12} & b_2 & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ a_{n2} & \dots & a_n & b_{1n} & \dots & b_n & & \\ \hline c_2 & \dots & c_{2n} & -a_1 & & & & \\ & & & -a_{12} & -a_2 & \dots & -a_{n2} & \\ & & & & & & & \\ c_{2n} & \dots & c_n & -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & -a_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} (\gamma) \text{ を調べればよい。}$$

$(-a_1, -a_1) \oplus$

(e_1, e_1) の isotropy subalg.

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} \text{ には } Sp(n-1) \text{ が作用するから (I) より } z' = 0 \text{ の } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$z_{n+1} \neq 0$ の場合, a_1 で $z_{n+1} = 1$, b_1 で $z_1 = 0$, b_{12} で $z' = 0$, 即ち $z = e_{n+1}$.

$z_{n+1} = 0$ の場合, $z' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ なる a_{12} により $z_1 = 0$, 即ち $z = e_2$,

$z' = 0$ のとき $z_1 = 0$ の 1, 即ち, $z = 0$ または e_1 .

(Prop 5 の証明終)

次に $SL(n)$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d} + \mathfrak{q}^{(*)}$, $\mathfrak{d} + \mathfrak{q}^{(*)} + \mathfrak{q}^{(*)}$ 等の軌道分解を

やる。Lemma 1 により, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d} + \mathfrak{q}^*$, $\mathfrak{d} + \mathfrak{q}^* + \mathfrak{q}^*$ をやれば十分である。

$J_k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array} \right)$, $J'_k = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n)$ とおく。 $\mathfrak{d}$ の表現空間 V_1 は $V_1 = \{X \in M(n); {}^t X = -X\}$ であり, $X \mapsto AX {}^t A$ と作用する。

従って $\text{rank } X$ は不変量である。 $\mathfrak{d} + \mathfrak{q}^*$ は $\{(X, x_1); X \in V_1, x_1 \in \mathbb{C}^n\}$

で, $(X, x_1) \mapsto (AX {}^t A, {}^t A^{-1} x_1)$ と作用する。 $\text{rank } X$, $\text{rank } x_1$ は

不変量だが, $X x_1 \mapsto A(X x_1)$ ゆえ, $\text{rank } X x_1$ も不変量。同様に

$\mathfrak{d} + \mathfrak{q}^* + \mathfrak{q}^* \ni (X, x_1, x_2)$ に於ては, $r = \text{rank } X$, $r_1 = \text{rank } x_1$,

$r_2 = \text{rank } x_2$, $r_{12} = \text{rank}(x_1 x_2)$, $r'_1 = \text{rank } X x_1$, $r'_2 = \text{rank } X x_2$,

$$r_2' = \text{rank}(Xx_1, Xx_2), \quad r' = \begin{cases} 1 & \text{if } {}^t x_2 X x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{if } {}^t x_2 X x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{等は不変量である。}$$

さて $[]$ を Gauss 記号 として,

$$n' = \left[\frac{n}{2} \right] = m \quad \text{if } n=2m \text{ or } n=2m+1$$

$$n'' = \left[\frac{n-1}{2} \right] = \begin{cases} m-1 & \text{if } n=2m \\ m & \text{if } n=2m+1 \end{cases} \quad \text{と定める。}$$

以上の記号のもとで,

Proposition 6. (I) $(GL(1) \times SL(n), \theta)$ (但し n =奇数のとき $(SL(n), \theta)$ で十分) は, $(n'+1)$ 個の軌道に分解する。

代表点 J_k' , $r = 2k$ ($k=0, 1, \dots, n'$)

(II) $(GL(1)^2 \times SL(n), \theta + \square^*)$ は $2n' + n'' + 2$ ($= 3m+1$ if $n=2m$, $= 3m+2$ if $n=2m+1$) 個の軌道に分解する。

代表点	r	r_1	r_1'	
(1) $(J_k' e_1)$	$2k$	1	1	$(1 \leq k \leq n')$
(2) $(J_k' e_n)$	$2k$	1	0	$(0 \leq k \leq n')$
(3) $(J_k' 0)$	$2k$	0	0	$(0 \leq k \leq n')$

(III) $(GL(1)^3 \times SL(n), \theta + \square^* + \square^*)$ (実は n =偶数なる $(GL(1)^2 \times SL(n), \square^* \otimes \theta + \square^* \otimes (\square^* + \square^*))$, n =奇数なる $(GL(1)^3 \times SL(n), \theta + \square^* \otimes \square^* + \square^* \otimes \square^*)$ で十分) は, $7n' + 6n'' + 3$ ($= 13m-3$ if $n=2m$, $= 13m+3$ if $n=2m+1$) 個の軌道に分解する。

代表点	r	r_1	r_2	r_2'	r_1'	r_2'	r_2'	r'	
(1) $(J_k' e_1, e_{n+1})$	$2k$	1	1	2	1	1	2	1	$(1 \leq k \leq n')$
(2) $(J_k' e_1, e_2)$	$2k$	1	1	2	1	1	2	0	$(2 \leq k \leq n')$
(3) $(J_k' e_1, e_1 + e_n)$	$2k$	1	1	2	1	1	1	0	$(1 \leq k \leq n')$

代表点	r	r_1	r_2	r_{12}	r'_1	r'_2	r'_{12}	r'
(4) $(J'_k e_1 e_n)$	$2k$	1	1	2	1	0	1	0 $(1 \leq k \leq n'')$
(5) $(J'_k e_n e_1)$	$2k$	1	1	2	0	1	1	0 $(1 \leq k \leq n'')$
(6) $(J'_k e_n e_{n-1})$	$2k$	1	1	2	0	0	0	0 $(0 \leq k \leq n'-1)$
(7) $(J'_k e_1 e_1)$	$2k$	1	1	1	1	1	1	0 $(1 \leq k \leq n')$
(8) $(J'_k e_1 0)$	$2k$	1	0	1	1	0	1	0 $(1 \leq k \leq n')$
(9) $(J'_k 0 e_1)$	$2k$	0	1	1	0	1	1	0 $(1 \leq k \leq n')$
(10) $(J'_k e_n e_n)$	$2k$	1	1	1	0	0	0	0 $(0 \leq k \leq n'')$
(11) $(J'_k e_n 0)$	$2k$	1	0	1	0	0	0	0 $(0 \leq k \leq n'')$
(12) $(J'_k 0 e_n)$	$2k$	0	1	1	0	0	0	0 $(0 \leq k \leq n'')$
(13) $(J'_k 0 0)$	$2k$	0	0	0	0	0	0	0 $(0 \leq k \leq n')$

(証明) (I)は、線型代数でよく知られた結果である。

(II) J'_k における isotropy subalgebra は $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ ($A \in Sp(k)$) である。

よって, x_1 には $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ C & B \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ($x \in \mathbb{C}^{2k}, y \in \mathbb{C}^{n-2k}$) ($x_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) と作用する。

よって $k \neq 0, \frac{n}{2}$ なら Prop 5, (I) より $x = 0$ 或 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $x = 0$ のとき, B に

より $y = 0$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 即ち $x_1 = 0$ 或 e_n . $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, C により $y = 0$

即ち $x = e_1$. $k = 0$ なら B より, $y = 0$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i.e. $x = 0$ 或 e_n . $k = \frac{n}{2}$

なら $x = 0$ 或 e_1 . 不変量が異なるから, すべて異なる軌道である。

(III) $(J'_k 0 x_2)$ の場合は (II) をくり返して (9), (12), (13) を得る。

$(J'_k e_1 x_2)$ の場合, $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ C & B \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ ($x \in \mathbb{C}^{2k}, y \in \mathbb{C}^{n-2k}, A \in Sp(k)$) を考える。
($1 \leq k \leq n'$)

る。 $k \neq 1, \frac{n}{2}$ の場合, Prop 5 (II) より $x = 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k+1$) の4つ

になり, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (k+1) の場合は C により $y = 0$ とできる. 即ち (2), (1) を得る. $x = 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の時, B により $y = 0$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とできる. 即ち (8) (4) (7) (3) を得る. $k=1$ のときは $x = 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 3 つで, y に関しては今と同様. $k = \frac{n}{2}$ の時 Prop 5 (II) より $x = 0, e_1, e_2, e_{k+1}$ の 4 つである.

$(J'_k e_n x_2)$ ($0 \leq k \leq n$, 特に $k \neq \frac{n}{2}$) の場合, $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$ を考える. $k \neq 0$ の時, $x = 0$ 或 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = 0$ のとき $y = 0$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($n-2k \geq 2$) 即ち (11) (10) (6) を得る. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の時 C により $y = 0$, 即ち (5) を得る. $k=0$ の時は $y = 0, e_n, e_{n-1}$ 即ち (11) (10) (6) のいずれかである.

(Prop 6 の証明終)

次に $SL(n)$, $\square$ を考える. 表現空間は $\{X \in M(n), {}^tX = X\}$ で $X \mapsto AX {}^tA$ と作用する. $\square + \square$ と $\square + \square^*$ の orbits は (どちらかが有限個なる) 1対1に対応する (Lemma 1) から $\square + \square^*$ の軌道分解を行なう. $(X, x) \mapsto (\alpha AX {}^tA, \beta {}^tA {}^t x)$ ($\alpha, \beta \in GL(1), A \in SL(n)$) ($x \in \mathbb{C}^n$) と作用するから, $\text{rank } X, \text{rank } x, \text{rank } Xx, \text{rank } {}^t x X x$ はすべて不変量である. I_k を k 次単位行列, $I'_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n)$ ($k=0, 1, \dots, n$) とおく.

Proposition 7. $(GL(1)^2 \times SL(n), \square + \square^*)$ は $4n$ 個の軌道に分解する.

その代表点, 及び rank 等の不変量は次の通り.

代表点	$\text{rank } X$	$\text{rank } x$	$\text{rank } Xx$	$\text{rank } {}^t x X x$	
(1) (I'_k, e_1)	k	1	1	1	$(1 \leq k \leq n)$
(2) $(I'_k, e_1 + \sqrt{-1}e_2)$	k	1	1	0	$(2 \leq k \leq n)$
(3) (I'_k, e_n)	k	1	0	0	$(0 \leq k \leq n-1)$
(4) $(I'_k, 0)$	k	0	0	0	$(0 \leq k \leq n)$

(証明) I'_k に於る isotropy subalgebra は, $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ C & B \end{smallmatrix}\right)$ ($A \in O(k)$)
 即ち $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ C & B \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ($x_1 \in \mathbb{C}^k, x_2 \in \mathbb{C}^{n-k}$) を考えればよい。 $k=0$ なら
 $x=x_2=0$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ として可, 即ち (4)(3)。 $k=1$ なら $x_1=0$ の $\perp$, $x_1=0$ なら
 $x_2=0$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ i.e. (4)(3)。 $x_1=1$ なら, C により $x_2=0$ として可, 即ち (1)。
 $k=n$ なら $(GO(n), \square)$ の分類に帰着し, $x=e_1, e_1+\sqrt{-1}e_2, 0$ として可, 即ち (1)(2)(4)。
 $2 \leq k \leq n-1$ なら, $x_1=0, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 3 つで, $x_1=0$ なら, $x_2=0$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, 即ち (3)(4)。 $x_1 \neq 0$ なら C で $x_2=0$ となり (2)(1) を得る。
 (Prop 7 の証明終り) //

$$(u_i = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix})_{i=1}^6$$

次に $(SL(6), \square + \square)$ を考える。 $\mathbb{C}^6$ の base を $u_1, \dots, u_6$ とすると,
 表現空間の元は $(\underbrace{\sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k}_{x}, \underbrace{\sum_{\ell=1}^6 y_\ell u_\ell}_{y})$ と表わせる。

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^6 y_i \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad x \wedge \hat{x} = \sum_{i,j=1}^6 \varphi_{ij}(x) y_i u_j, \quad u_j \wedge u_j = \omega (= u_1 \wedge \dots \wedge u_6)$$

として, $\varphi(x) = (\varphi_{ij}(x))$ なる 6 次行列を作ると, $\varphi(\rho(g)x) = \det g \cdot g \varphi(x) g^{-1}$ ($g \in GL(6), \rho = \square$) となる事が知られている ([3])。

よって, $\text{rank } \varphi(x), \text{rank } \varphi(x)y, \text{rank } y, \text{rank } x$ (x を 20 次元ベクトルとみなして) は不変量である。 また $x \wedge y$ は $SL(6)$ $\square = \square^*$ の元を

定めらるから, 6 次歪対称行列 $(x \wedge y)^*$ が存在して $(p(g)x \wedge g y)^* = {}^t g^{-1}(x \wedge y)^* g^{-1}$ となり, $\text{rank}(x \wedge y)^*$ も不変量である。

Proposition 8. $(GL(1)^2 \times SL(6), \text{目} + \square)$ (実は $(GL(1) \times SL(6), \text{目} + \square)$ で十分) は, 次の 15 個の軌道に分解する。

代表点	$\text{rank } x$	$\text{rank } y$	$\text{rank } \varphi(x)$	$\text{rank } \varphi(x)y$	$\text{rank}(x \wedge y)^*$
(1) $(123+456, u_1+u_4)$	1	1	6	1	4
(2) $(123+456, u_1)$	1	1	6	1	2
(3) $(123+456, 0)$	1	0	6	0	0
(4) $(123+145+246, u_6)$	1	1	3	1	4
(5) $(123+145+246, u_1)$	1	1	3	0	2
(6) $(123+145+246, 0)$	1	0	3	0	0
(7) $(123+145, u_6)$	1	1	1	1	4
(8) $(123+145, u_2)$	1	1	1	0	2
(9) $(123+145, u_1)$	1	1	1	0	0
(10) $(123+145, 0)$	1	0	1	0	0
(11) $(123, u_6)$	1	1	0	0	2
(12) $(123, u_1)$	1	1	0	0	0
(13) $(123, 0)$	1	0	0	0	0
(14) $(0, u_1)$	0	1	0	0	0
(15) $(0, 0)$	0	0	0	0	0

但し $u_i \wedge u_j \wedge u_k$ を $i j k$ と略記した。

(証明) ($GL(6)$, 目) は 5 つの軌道に分かれる事が知られてお

り, $\chi_0 = 123+456 (=u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$ の意味. 以下同様),

$\chi_1 = 123+145+246$, $\chi_5 = 123+145$, $\chi_{10} = 123$, $\chi_{20} = 0$ で, $\varphi(\chi_0) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$\varphi(\chi_1) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(\chi_5) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(\chi_{10}) = \varphi(\chi_{20}) = 0$ である ([2], [3]).

$\chi = \chi_0 = 123+456$ の場合) *isotropy subalg.* は $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}; A, B \in \mathfrak{sl}(3) \right\}$ 中

で, $y = u_1 + u_4$, $u_1, u_4, 0$ のいずれかに帰着. $\begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} \in GL(6)$

により $u_1 \sim u_4$ 中 (1)(2)(3) を得る.

$\chi = \chi_1 = 123+145+246$ の場合), [2] で $126+234-135$ における

isotropy subalg. = $\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A - (\text{tr } A)I_3 \end{pmatrix}; A, B \in M(3), \text{tr } B = 0 \right\}$ となるから

この場合 $0, e_3, e_6$ の 3 通り. 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ で χ_1 の場合にもとせば

$0, u_1, u_6$ の 3 通り, (3)(5)(4) に帰着する.

$\chi_5 = 123+145$ の場合) *isotropy subalg.* は $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \mathfrak{sp}(2) & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_5 \end{pmatrix}$ 中 $y_6 \neq 0$

なる $y_1 = \dots = y_5 = 0$ とできる. 即ち (7). $y_6 = 0$ なる $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_5 \end{pmatrix}$ に $\mathfrak{sp}(2)$ が作用す

るから $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の (0) , $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる $y_1 = 0$ とできる. 即ち (8). (0) なる $\chi_1 = 1$ の 0 即ち (9)(10).

$\chi_{10} = 123$ の場合) *isotropy subalg.* は $\left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}; A \in \mathfrak{sl}(3), \right\}$ 中 $\begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の (0) . $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき, C により $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ とし得, 即ち (11). (0) の

時, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の (0) 即ち (12), (13).

$\chi_{20} = 0$ の場合は, $y = u_1$ の 0 . // (Prop 8 の証明終わり)

次に $(GL(1)^2 \times SL(7), \text{目} + \square^*)$ を考える. Lemma 1 により,

$\text{目} + \square^*$ を考えれば十分. $\mathbb{C}^7$ の base $u_i = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ に $(i=1, \dots, 7)$ を

とると, $\text{目} + \square^*$ の元は (χ, y) , $\chi = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 7} \chi_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k$, $y = \sum_{i=1}^7 y_i u_i$

と表わせる。 $\hat{\alpha} = \sum_{l=1}^7 z_l \frac{\partial \alpha}{\partial u_l}$ (z_l は不定元) とする。 $\alpha \wedge \hat{\alpha} \wedge \hat{\alpha}$
 $= \sum_{i,j=1}^7 \varphi_{ij}(x) z_i z_j \omega$ ($\omega = u_1 \wedge \cdots \wedge u_7$) となり, $\varphi(x) = (\varphi_{ij}(x))$ とお
く。 $\varphi(P(g)x) = (\det g) g \varphi(x) {}^t g$ ($g \in GL(7)$, $P = \text{目}$) となる ([37]).

$(x, y) \mapsto (P(g)x, {}^t g {}^t y)$ ゆえ $r = \text{rank } \varphi(x)$, $r_1 = \text{rank } \varphi(x) y$,
 $r_2 = \text{rank } y$, $r' = \begin{cases} 1 & {}^t y \varphi(x) y \neq 0 \\ 0 & {}^t y \varphi(x) y = 0 \end{cases}$, 及び軌道の次元は不変量
である。

Proposition 9. $(GL(1)^2 \times SL(7), \text{目} + \square^*)$ は次の 38 個の軌道
に分解する。但し $U_i \wedge U_j \wedge U_k$ を $i\bar{j}k$ と略記する。

代表元	r	r_1	r_2	r'	dim
(1) $(234+567+1 \cdot (25+36+47), e_1)$	7	1	1	1	42
(2) $(234+567+1 \cdot (25+36+47), e_2)$	7	1	1	0	41
(3) $(235+346+1 \cdot (27-45), e_5)$	4	0	1	0	41
(4) $(235+346+1 \cdot (27-45), e_6)$	4	0	1	0	40
(5) $(235+346+1 \cdot (27-45), e_1+e_4)$	4	1	1	0	38
(6) $(134+256+127, e_7)$	2	0	1	0	38
(7) $(235+346+1 \cdot (27-45), e_1)$	4	1	1	0	37
(8) $(134+256+127, e_3+e_5)$	2	0	1	0	37
(9) $(234+567+1 \cdot (25+36+47), 0)$	7	0	0	0	35
(10) $(134+256+127, e_3)$	2	0	1	0	35
(11) $(234+1 \cdot (25+36+47), e_5)$	1	0	1	0	35
(12) $(235+346+1 \cdot (27-45), 0)$	4	0	0	0	34
(13) $(134+256+127, e_1+e_2)$	2	1	1	0	33

代表点	γ	γ_1	γ_2	γ'	dim
(14) $(123+456, e_7)$	0	0	1	0	33
(15) $(134+256+127, e_1)$	2	1	1	0	32
(16) $(234+1 \cdot (25+36+47), e_2)$	1	0	1	0	32
(17) $(123+456, e_1+e_4)$	0	0	1	0	32
(18) $(126-135+234, e_7)$	0	0	1	0	32
(19) $(126-135+234, e_4)$	0	0	1	0	31
(20) $(134+256+127, 0)$	2	0	0	0	31
(21) $(234+1 \cdot (25+36+47), e_1)$	1	1	1	0	29
(22) $(123+456, e_1)$	0	0	1	0	29
(23) $(234+1 \cdot (25+36+47), 0)$	1	0	0	0	28
(24) $(126-135+234, e_1)$	0	0	1	0	28
(25) $(1 \cdot (25+36+47), e_2)$	1	0	1	0	28
(26) $(1 \cdot (24+35), e_6)$	0	0	1	0	27
(27) $(123+456, 0)$	0	0	0	0	26
(28) $(126-135+234, 0)$	0	0	0	0	25
(29) $(1 \cdot (24+35), e_2)$	0	0	1	0	25
(30) $(1 \cdot (25+36+47), e_1)$	1	1	1	0	22
(31) $(1 \cdot (25+36+47), 0)$	1	0	0	0	21
(32) $(1 \cdot (24+35), e_1)$	0	0	1	0	21
(33) $(1 \cdot (24+35), 0)$	0	0	0	0	20
(34) $(123, e_4)$	0	0	1	0	20
(35) $(123, e_1)$	0	0	1	0	16

代表点	γ	γ_1	γ_2	γ'	dim
(36) (123, 0)	0	0	0	0	13
(37) (0, e_1)	0	0	1	0	7
(38) (0, 0)	0	0	0	0	0

(証明) ($GL(7)$, 目) は 10 個の orbits をもち, その代表点は以下の通り ([2]). χ_i は i -codimensional orbit の代表点を表わす.
 $\chi_0 = 234 + 567 + 1 \cdot (25 + 36 + 47)$, $\chi_1 = 235 + 346 + 1 \cdot (27 + 45)$, $\chi_4 = 134 + 256 + 127$, $\chi_7 = 234 + 1 \cdot (25 + 36 + 47)$, $\chi_9 = 123 + 456$,
 $\chi_{10} = 126 + 135 + 234$, $\chi_{14} = 1 \cdot (25 + 36 + 47)$, $\chi_{15} = 1 \cdot (24 + 35)$, $\chi_{22} = 123$,
 $\chi_{35} = 0$.

(χ_0, γ) の場合; χ_0 における isotropy subgroup は (G_2) 中へ ($G_2 \times GL(1)$, $V(7)$) の軌道分解に帰着し 3 つに分解する. ([5])

$(\chi_0, 0)$ (χ_0, e_1) (χ_0, e_2) i.e. (9)(1)(2).

(χ_1, γ) の場合; isotropy subalg. は ([]),

$$\left[\begin{array}{cc|cc|ccc|c} \frac{d}{2} + d + \beta & a_{12} & b_{12} & & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_1 \\ a_{21} & \frac{d}{2} - d + \beta & & & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_2 \\ \hline b_{21} & & \frac{d}{2} + d - \beta & a_{12} & -\gamma_2 & \gamma_7 & -\gamma_1 & \gamma_3 \\ & b_{21} & a_{21} & \frac{d}{2} - d - \beta & -\gamma_5 & \gamma_8 & -\gamma_4 & \gamma_4 \\ \hline & & & & -d & 2b_{21} & 2b_{12} & \gamma_5 \\ & & & & b_{12} & -d + 2\beta & 0 & \gamma_6 \\ & & & & b_{21} & 0 & -d - 2\beta & \gamma_7 \end{array} \right] \gamma' \quad \text{中}$$

$\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \end{pmatrix}$ には $GO(3)$ が作用するから, $\gamma' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のいずれか.

$\gamma' \neq 0$ なる γ_i たちにより $\gamma_1 = \dots = \gamma_4 = 0$ 即ち $\gamma = e_5, e_6$. $\gamma' = 0$ のとき

$\gamma'' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$ には $GL(1) \times SL(2) \times SL(2) = GL(1) \times SO(4)$ が作用しているから

$y'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のいずれか。即ち $y = e_1 + e_4, e_1, 0$ となり
結局, (3)(4)(5)(7)(12) を得る。

(x_4, y) の場合; isotropy subalg. は以下の通り

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} -\text{tr} X & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_3 \alpha_4 & \alpha_5 & y_1 \\ -\text{tr} Y & \beta_1 \beta_2 & \beta_3 \beta_4 & \beta_5 & y_2 \\ \hline & X & & \beta_2 & y_3 \\ & & & -\beta_1 & y_4 \\ \hline & & Y & -\alpha_4 & y_5 \\ & & & \alpha_3 & y_6 \\ \hline & & & \text{tr}(X+Y) & y_7 \end{array} \right) (\varepsilon) \quad (X, Y \in \mathfrak{gl}(2))$$

$y_7 \neq 0$ なる $y_7 = 1, y_1 = \dots = y_6 = 0$ とできる。即ち $y = e_7, y_7 = 0$ とする。

$y' = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ には $\begin{smallmatrix} GL(2) \times GL(2) \\ \square \oplus 1 + 1 \oplus \square \end{smallmatrix}$ が作用するから $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

のいずれかで、 $y' \neq 0$ なる $y_1 = y_2 = 0$ とできる。即ち $y = e_3 + e_5, e_3,$

$e_5, y' = 0$ のとき $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 即ち $e_1 + e_2, e_2, e_1, 0$

とこるが $(u_1 \leftrightarrow u_2, u_3 \leftrightarrow u_5, u_4 \leftrightarrow u_6, u_7 \leftrightarrow -u_7)$ なる変換により

$(x_4, e_1) \sim (x_4, e_2), (x_4, e_3) \sim (x_4, e_5)$ であるから、結局 $y = e_7,$

$e_1 + e_2, e_1, e_3 + e_5, e_3, 0$ 即ち (6)(13)(15)(8)(10)(20) に帰着。

(x_7, y) の場合; isotropy subalg. は $([2])$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \varepsilon & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \\ \hline 0 & X & & \gamma_4 & \gamma_3 + \gamma_5 & \gamma_2 & \\ & & & \gamma_3 & \gamma_5 & \gamma_1 + \gamma_1 & \\ & & & (\gamma_2 + \gamma_6) & \gamma_1 & \gamma_6 & \\ \hline 0 & 0 & & -\varepsilon I_3 - {}^t X & & & \end{array} \right) (\gamma) \quad (X \in \mathfrak{sl}(3))$$

よって $y' = \begin{pmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) , $y' \neq 0$ なる $y_1 = \dots = y_4 = 0$ とし可, i.e. $y = e_5,$

$y' = 0$ なる $y'' = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) , $y'' \neq 0$ なる $y_1 = 0$ とし可, i.e. $y = e_2$

$y'' = 0$ なる $y_1 = 1$ 或 0 , i.e. $y = e_1$ 或 0 , 結局 $y = e_5, e_2, e_1, 0$

即ち (11)(16)(21)(23) のいずれかである。

(χ_9, y) の場合; isotropy subalg. は $([2])$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} X & & Z \\ \hline & Y & W \\ \hline & & \varepsilon \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \quad (7) \quad (X, Y \in \mathfrak{sl}(3))$$

$y_7 \neq 0$ なる Z, W により $y_1 = \dots = y_6 = 0$ とできる. 即ち $y \sim e_7$.

$y_7 = 0$ のとき $y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \\ y_6 \end{pmatrix}$ には $SL(3) \times SL(3)$ が作用するから $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (0)$

i.e. $y = e_1 + e_4, e_1, e_4, 0$ のいずれか. 然るに $1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 5, 3 \leftrightarrow 6$

なる変換により $(\chi_9, e_4) \sim (\chi_9, e_1)$. よて $y = e_7, e_1 + e_4, e_1, 0$

即ち (14), (17), (22), (27).

(χ_{10}, y) の場合; isotropy subalg. は $([2])$,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \varepsilon I_3 + X & B & C \\ \hline 0 & -2\varepsilon I_3 + X & F \\ \hline 0 & 0 & \eta \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \quad (8) \quad (\text{tr} B = 0, X \in \mathfrak{sl}(3))$$

$y_7 \neq 0$ なる C, F により $y_1 = \dots = y_6 = 0$ とできる. 即ち $y \sim e_7$.

$y_7 = 0$ なる $y' = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) , $y' \neq 0$ なる B により $y_1 = y_2 = y_3 = 0$

とできる. 即ち $y \sim e_4$. $y' = 0$ なる $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 0 即ち $y \sim e_1, 0$.

即ち $y \sim e_7, e_4, e_1, 0$ i.e. (18) (19) (24) (28).

(χ_{14}, y) の場合; isotropy subalg. は $([2])$,

$$\left(\begin{array}{c|c} -2\varepsilon & Y \\ \hline 0 & \varepsilon I_6 + X \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix} \quad (9) \quad (X \in Sp(3)) \quad \text{Prop 5 (I) により}$$

$y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) . $y' \neq 0$ なる Y により $y_1 = 0$ i.e. $y \sim e_2$,

$y' = 0$ なる $y_1 = 1$ 或 0 i.e. $y \sim e_1, 0$. i.e. (25) (30) (31).

(χ_{15}, γ) の場合; isotropy subalg. は $([2])$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} -2\varepsilon & W & U \\ \hline 0 & \varepsilon I_4 + X & Z \\ \hline 0 & 0 & \eta I_2 + Y \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (X \in \mathfrak{Sp}(2), Y \in \mathfrak{sl}(2))$$

$\gamma' = \begin{pmatrix} y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cap (0)$, $\gamma' \neq 0$ なる U, Z で $y_1 = \dots = y_5 = 0$ i.e. $\gamma \sim e_6$.

$\gamma' = (0)$ のとき Prop 5 (I) により $\gamma'' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cap (0)$.

$\gamma'' \neq 0$ なる $y_1 = 0$ (W により) とするとき $\gamma \sim e_2$, $\gamma'' = 0$ なる $y_1 = 1$ かつ 0

i.e. $\gamma \sim e_1, 0$ 結局 $\gamma \sim e_6, e_2, e_1, 0$ 即ち (26), (29) (32) (33).

(χ_{22}, γ) の場合; isotropy subalg. は $([2])$,

$$\left(\begin{array}{c|c} X & Z \\ \hline 0 & \varepsilon I_4 + Y \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_7 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (X \in \mathfrak{sl}(3), Y \in \mathfrak{sl}(3))$$

ゆえ $\begin{pmatrix} y_4 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cap (0)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき Z により $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, i.e. $\gamma \sim e_4$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cap (0)$ i.e. $\gamma \sim e_1, 0$, 結局 (34) (35) (36).

$(\chi_{35}, \gamma) = (0, \gamma)$ の場合; この場合 $\gamma \sim e_1, 0$ 即ち (37) (38).

尚, $\varphi(x) = (\varphi_{ij}(x))$ は, 計算すれば,

$$\varphi(x_0) = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & & 3I_3 \\ & -3I_3 & \end{pmatrix}, \quad \varphi(x_1) = \begin{pmatrix} 3^3 & & \\ & -3^3 & \\ & & 3^3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x_4) = \begin{pmatrix} 3^3 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x_7) = \varphi(x_{14}) = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad \text{その他は } \varphi(x) = 0.$$

Prop 9 の証明終わり //

次に $(GL(1)^2 \times Sp(2), \square + \square)$ を考えよう. $\square$ の表現空間は

$$V_1 = \{ X \in M(4); {}^t X = -X, \operatorname{tr} X J = 0 \}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

即ち $V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & -x_2 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_5 \\ -x_3 & x_2 & -x_5 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. $X \mapsto AX^tA$ ($A \in Sp(2)$) と作用

し, $PfX = x_2^2 + x_1x_5 + x_3x_4$ は, 不変式 $\phi \in (Sp(2), \mathfrak{g}) =$

$(SO(5), \mathfrak{o}) = (Spin 5, \text{ベクトル表現})$ となる。特に $(GL(1) \times Sp(2), \mathfrak{g})$

は 3 つの軌道に分解し, 代表点として $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

をとれる。 $\mathfrak{g} + \mathfrak{o} \ni (X, Y) \mapsto (\alpha X^tA, \beta AY)$ $\phi \in$,

$XJY \mapsto AX^tAJAY = A(XJY)$, $XJ \mapsto AX^tAJ(AA^{-1}) = A(XJ)A^{-1}$

$\phi \in$, $\text{rank } X, \text{rank } Y, \text{rank } XJY, r = \begin{cases} 1 & \text{tr}(XJ)^2 \neq 0 \\ 0 & \text{tr}(XJ)^2 = 0 \end{cases}$ 等は,

不変量である。

Proposition 10. $(GL(1)^2 \times Sp(2), \mathfrak{g} + \mathfrak{o})$ (実は $(GL(1) \times Sp(2), \mathfrak{g} + \mathfrak{o})$)

で十分) は, 次の 8 個の軌道に分解する。

代表点	$\text{rank } X$	$\text{rank } Y$	$\text{rank } XJY$	r	$\dim$	isotropy subgp.
(1) $\left(\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$	4	1	1	1	9	G_a^2
(2) $\left(\begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$	2	1	1	0	8	$GL(1) \cdot U(2)$
(3) $\left(\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$	4	1	1	0	7	$SL(2) \cdot G_a$
(4) $\left(\begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$	2	1	0	0	6	$GL(1) \cdot U(4)$
(5) $\left(\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, (0) \right)$	4	0	0	0	5	$SL(2) \times SL(2)$
(6) $\left(\begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix}, (0) \right)$	2	0	0	0	4	$(GL(1) \times SL(2)) \cdot G_a^3$
(7) $\left((0) \right), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$	0	1	0	0	4	$(GL(1) \times SL(2)) \cdot U(3)$
(8) $\left((0) \right), (0) \right)$	0	0	0	0	0	$GL(1) \times Sp(2)$

(証明) $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ における $GL(1) \times Sp(2)$ の isotropy subalgebra は

$$(0) \oplus \left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & a_{12} & b_1 & b_{12} \\ a_{21} & -a_1 & b_{12} & b_2 \\ \hline b_2 & b_{12} & -a_1 & -a_{21} \\ b_{12} & -b_1 & -a_{12} & a_1 \end{array} \right] \cong \underbrace{\mathfrak{sl}(2)}_{\square} \oplus \underbrace{\mathfrak{sl}(2)}_{\square} \quad \text{ゆえ } y \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{4\text{次元}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2\text{次元}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\text{次元}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0\text{次元}}$$

の4つに分かれる。しかし $A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right)$ の作用で $(A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}^t A, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ となるから、結局 $y \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (0)$ 即ち (1)(3)(5)。

(II) $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ における isotropy subalgebra は

$$(-a_1 - a_{21}) \oplus \left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & a_{12} & b_1 & b_{12} \\ a_{21} & a_2 & b_{12} & b_2 \\ \hline 0 & 0 & -a_1 & -a_{21} \\ & & -a_{12} & -a_2 \end{array} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \text{よって } \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる b_1, b_{12} により $y_1 = y_2 = 0$ として可 即ち (2)。

$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim (0)$ なる $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e. (4), (6)。

(III) $\chi = 0$ なる $y \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) i.e. (7)(8)。

(Prop 10 の証明終) //

次に $(GL(1)^2 \times Sp(3), \text{目} + \square)$ を考える。 $(GL(6), \text{目}, V(20))$ を $Sp(3) (\subset GL(6))$ に制限すると、 $\text{目} + \square$ と分解するのである。

目の base は $u_i \wedge u_j \wedge u_k$ を $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ と略記する時、 $\omega_1 = 123, \omega_2 = 456,$

$\omega_3 = 234, \omega_4 = 156, \omega_5 = 135, \omega_6 = 246, \omega_7 = 126, \omega_8 = 345, \omega_9 = 125 - 136,$

$\omega_{10} = 245 - 346, \omega_{11} = 124 + 236, \omega_{12} = 145 + 356, \omega_{13} = 134 - 235, \omega_{14} = 146 - 256$

である。 $(GL(1) \times Sp(3), \text{目})$ は5つの軌道に分解し、 $\chi_0 = 123 + 456,$

$\chi_1 = 126 + (134 - 235), \chi_4 = 134 - 235, \chi_7 = 123, \chi_{14} = 0$ がその代表点で

ある([2])。

Proposition 11 ($GL(1)^2 \times Sp(3)$, 目+口, $V(14) \oplus V(6)$) は 19 個

の軌道をもつ。

	代表元	次元
(1)	$(123 + 456, e_1 + e_4)$	20
(2)	$(123 + 456, e_1 + e_5)$	19
(3)	$(126 + (134 - 235), e_6)$	19
(4)	$(126 + (134 - 235), e_5)$	18
(5)	$(123 + 456, e_1)$	17
(6)	$(126 + (134 - 235), e_3)$	16
(7)	$((134 - 235), e_6)$	16
(8)	$(126 + (134 - 235), e_1)$	15
(9)	$((134 - 235), e_1 + e_2)$	15
(10)	$(123 + 456, 0)$	14
(11)	$(126 + (134 - 235), 0)$	13
(12)	$((134 - 235), e_1)$	13
(13)	$(123, e_4)$	13
(14)	$((134 - 235), e_3)$	11
(15)	$((134 - 235), 0)$	10
(16)	$(123, e_1)$	10
(17)	$(123, 0)$	7
(18)	$(0, e_1)$	6
(19)	$(0, 0)$	0

(証明) $\chi_0 = 123 + 456$ における isotropy subalgebra は

$$\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix}; A \in \mathfrak{sl}(3) \right\} \text{ 従って } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ に作用すれば,}$$

Prop 4 (II) により $y \sim e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_1, e_4, 0$. こゝで

$$(\chi_0, e_4) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & I_3 \\ -I_3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(3)} (-123 + 456, e_1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(3)} (-\sqrt{1}123 - \sqrt{1}456, e_1)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{1} \in \text{GL}(1)} (123 + 456, e_1) \text{ かつ } y \sim e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_1, 0 \text{ 即ち (1)(2)(5)(10).}$$

$\chi_1 = 126 + (134 - 235)$ における isotropy subalg. は $([2])$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -d+d & & \beta & b_1 & b_{12} & b_{13} \\ & -d-d & \gamma & b_{12} & b_2 & b_{23} \\ \gamma & \beta & -d & b_{13} & b_{23} & 2b_{12} \\ \hline & & 0 & d-d & & -\gamma \\ & & & & d+d & -\beta \\ & & & -\beta & -\gamma & d \end{array} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} (\varepsilon)$$

$$\text{ゆえ, } y' = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} \text{ なる}$$

$\mathfrak{go}(3)$ が作用しており, $y' \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。 b_{ij}, b_i

たちにより, $y' \neq 0$ なる $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ にできる。即ち $y \sim e_6, e_5$.

$y' = 0$ のとき, $y'' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に $\mathfrak{go}(3)$ が作用し, $y'' \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i.e. $y \sim e_3, e_1, 0$. 結局 (3)(4)(6)(8)(11) を得る。

$\chi_4 = (134 - 235)$ における isotropy subalg. は $([2])$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & & & b_1 & & \beta \\ \alpha_2 & & & b_2 & & \gamma \\ \alpha & \gamma & -d & \beta & \gamma & \varepsilon \\ \hline c_1 & & & -\alpha_1 & & -\alpha \\ & c_2 & & -\alpha_2 & -\gamma & \\ & & & & d & \end{array} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} (\varepsilon)$$

ゆえ, $y_6 \neq 0$ なる $\alpha, \beta, \gamma, \gamma, \varepsilon$ により

$$y_1 = \dots = y_5 = 0, \text{ i.e., } y \sim e_6.$$

$y_6 = 0$ とする。 $y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0$ なる $y_3 = 0$ にとできる。即ち $y \sim 0, e_3$.

y_1, y_2, y_4, y_5 のどれかが $\neq 0$ なるば, $y_3 = 0$ として可。そのとき,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \text{ i.e. } SL(2) \times SL(2) \text{ による 4つの軌道にわかれる.}$$

仮定から $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \neq 0$ としているから $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を代表点とする3つの軌道にわかれる。 (x_4, e_2) に $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Sp(3)$ を施すと (x_4, e_1) になるから, $(x_4, e_2) \sim (x_4, e_1)$. 従って

$$y \sim e_6, 0, e_3, e_1 + e_2, e_1 \text{ 即ち } (7)(15)(14)(9)(12).$$

$x_7 = 123$ における isotropy subalg. は,

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -{}^t A \end{pmatrix}; A \in \mathfrak{sl}(3), {}^t B = B \right\}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} \text{ は } -{}^t A \text{ により } y' \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } (0),$$

$$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ なる } B \text{ により } y_1 = y_2 = y_3 = 0, \text{ i.e. } y \sim e_4 \text{ となる.}$$

$$y' = 0 \text{ なる } y'' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ は } A \text{ により } y'' \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } (0) \text{ i.e. } y \sim e_1, 0$$

$$\text{結局, } y \sim e_4, e_1, 0, \text{ 即ち } (13)(16)(17).$$

$$x_{14} = 0 \text{ のときは } y \sim 0 \text{ 或 } e_1 \text{ 即ち } (19), (18) \quad // \text{ Prop 11.}$$

次に $(GL(1)^2 \times Spin 8, \text{半スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V_1(8) \oplus V_2(8))$ を考之よう。 $Spin 8$ のリ-環 $\mathfrak{o}(8) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix}; A \in \mathfrak{gl}(4), {}^t B = -B, {}^t C = -C \right\}$

がベクトル表現で, その(偶)半スピノ表現は, $V_1(8) \ni x = x_1 + x_2 e_1 e_2 +$

$$x_3 e_1 e_3 + x_4 e_1 e_4 + x_5 e_1 e_2 e_3 e_4 - x_6 e_3 e_4 + x_7 e_2 e_4 - x_8 e_2 e_3 \text{ に対して}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & -C_{12} & -C_{13} & -C_{14} & & C_{34} & -C_{24} & C_{23} \\ b_{12} & A_2 & a_{23} & a_{24} & -C_{34} & & -a_{14} & a_{13} \\ b_{13} & a_{32} & A_3 & a_{34} & C_{24} & a_{14} & & -a_{12} \\ b_{14} & a_{42} & a_{43} & A_4 & -C_{23} & -a_{13} & a_{12} & \\ & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & -A_1 & -b_{12} & -b_{13} & -b_{14} \\ -b_{34} & & a_{41} & -a_{31} & C_{12} & -A_2 & -a_{32} & -a_{42} \\ b_{24} & -a_{41} & & a_{21} & C_{13} & -a_{23} & -A_3 & -a_{43} \\ -b_{23} & a_{31} & -a_{21} & & C_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \quad (2) \text{ で与えられる. 但し,}$$

$$A_1 = -\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}, A_2 = \frac{a_1 + a_2 - a_3 - a_4}{2}$$

$$A_3 = \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4}{2}, A_4 = \frac{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}{2}$$

(注) 半スピノ表現の $e_i e_j, e_i e_j e_k e_l$ の e_i と

ベクトル表現の $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_i$ とは関係ない!

さて $(Spin 8, \text{半スピン表現}) \cong (SO(8), \square)$ (as triplet) ゆえ,

$V_1(8)$ は 3 個の軌道に分解し, 代表点として,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 + e_1 e_2 e_3 e_4, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{を とれる.}$$

$V_1(8) \oplus V_2(8) \ni \tilde{x} = (x, y)$ に対し, $V_1(8), V_2(8)$ 上の 2 次不変式
 $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(y)$ とするとき, $r_1 = \begin{cases} 1 & \varepsilon_1(x) \neq 0 \\ 0 & \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases}, r_2 = \begin{cases} 1 & \varepsilon_2(y) \neq 0 \\ 0 & \varepsilon_2(y) = 0 \end{cases}$
 $r_1' = \text{rank } x, r_2' = \text{rank } y$, 軌道の次元, 等是不変量である。

Proposition 12. $(GL(1)^2 \times Spin 8, \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現})$
 は, 10 個の軌道に分解する。

代表点	r_1	r_2	r_1'	r_2'	dim
(1) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1 + e_5)$	1	1	1	1	16
(2) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1)$	1	0	1	1	15
(3) $(1, e_1 + e_5)$	0	1	1	1	15
(4) $(1, e_1)$	0	0	1	1	14
(5) $(1, e_5)$	0	0	1	1	11
(6) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, 0)$	1	0	1	0	8
(7) $(0, e_1 + e_5)$	0	1	0	1	8
(8) $(1, 0)$	0	0	1	0	7
(9) $(0, e_1)$	0	0	0	1	7
(10) $(0, 0)$	0	0	0	0	0

(証明) ${}^t(10001000) = 1 + e_1 e_2 e_3 e_4$ における isotropy subalg. は

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \\ \hline 0 & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} \\ -b_{34} & 0 & b_{14} & -b_{13} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} & -a_{42} \\ b_{24} & -b_{14} & 0 & b_{12} & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 & -a_{43} \\ -b_{23} & b_{13} & -b_{12} & 0 & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} \quad (\alpha)$$

で与えられる。これは
Spin 7 のスピノ表現中の
orbits は 3つ, ([5])
即ち $e_1 + e_5, e_1, 0$

即ち (1)(2)(6) を得る。

${}^t(10 \dots 0) = 1$ における isotropy subalg. は $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & -{}^tA \end{array} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} \quad (\alpha)$ 中
 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の (0) , $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる C により $\begin{pmatrix} y_5 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で $y_5 =$
1 or 0 となる。即ち $y \sim e_1 + e_5, e_1$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} \sim (0)$ のとき, $-{}^tA$ により $\begin{pmatrix} y_5 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の (0) 即ち $y \sim e_5, 0$
結局 (3)(4)(5)(8) を得る。

$x=0$ なる, y には $GO(8)$ が作用するから, $e_1 + e_5, e_1, 0$ を
代表点にとりて, (7)(9)(10) を得る。 // Prop 12 の証明終り。

次に $(GL(1)^2 \times \text{Spin } 7, \text{スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現})$ を考える。

$\Theta(8) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \hline C & -{}^tA \end{pmatrix}; {}^tB = -B, {}^tC = -C \right\}$ の元で ${}^t(0001000-1)$ を fix
する subalgebra を $u_1 = {}^t(00010001) = e_4 + e_8, u_2 = e_1, u_3 = u_2, u_4 = e_3,$
 $u_5 = e_5, u_6 = e_6, u_7 = e_7$ で表現すると Spin 7 のベクトル表現のリ-環

$$\Theta(7) = \left\{ \begin{array}{c|ccc|ccc} & -C_{14} & -C_{24} & -C_{34} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} \\ \hline 2b_{14} & a_1 & a_{12} & a_{13} & 0 & b_{12} & b_{13} \\ 2b_{24} & a_{21} & a_2 & a_{23} & -b_{12} & 0 & b_{23} \\ 2b_{34} & a_{31} & a_{32} & a_3 & -b_{13} & -b_{23} & 0 \\ \hline 2C_{14} & 0 & C_{12} & C_{13} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} \\ 2C_{24} & -C_{12} & 0 & C_{23} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} \\ 2C_{34} & -C_{13} & -C_{23} & 0 & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{が得られ, その} \\ \text{スピノ表現は} \end{array} \right\}$$

(証明) $(GL(1) \times Spin\ 7, \text{スピン表現}, V(8))$ は3つの軌道に分解し
 $1 + e_1 e_2 e_3 e_4, 1, 0$ がその代表点である。

$1 + e_1 e_2 e_3 e_4$ における isotropy subgroup は $(G_2) ([1])$ 中2
 3つの軌道に分解し $([5]), u_1, u_2, 0$ がその代表点, 即ち
 (1)(2)(7). 1 での isotropy subalgebra は

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -C_{14} & -C_{24} & -C_{34} & 0 \\ \hline 0 & a_1 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ & a_{21} & a_2 & a_{23} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_3 & \\ \hline 2C_{14} & 0 & C_{12} & C_{13} & -a_1 - a_{21} - a_{31} \\ 2C_{24} & -C_{12} & 0 & C_{23} & -a_{12} - a_2 - a_{32} \\ 2C_{34} & -C_{13} & -C_{23} & 0 & -a_{13} - a_{23} - a_3 \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} (E)$$

で与えられる。

$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) で, $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なら, C_{14}, C_{12}, C_{13} により,
 $y_1 = y_6 = y_7 = 0$ とできる。 $y_5 = 1$ 或 0 即ち $y \sim u_2 + u_5, u_2$.
 $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$ のとき, $y_1 = 1$ 或 0 . $y_1 = 1$ のとき, C_{14}, C_{24}, C_{34} により,
 $y_5 = y_6 = y_7 = 0$ 即ち $y \sim u_1$. $y_1 = 0$ なら $\begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) 即ち
 $y \sim u_5, 0$. 結局 (3)(4)(5)(6)(8) を得る。

$\chi = 0$ なら, $V(7)$ には $GO(7)$ が作用するから, 3つの軌道にわ
 かれ代表点として, $u_1, u_2, 0$ もとれる。即ち, (9)(10)(11). //

(Prop 13 の証明終り)

次に $(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(16) \oplus V(10))$ を
 考えよう。 $((GL(1) \times) Spin(10), \text{半スピン表現})$ は, 3つの軌道に分解
 し, $\chi_0 = 1 + e_1 e_2 e_3 e_4, \chi_5 = 1, \chi_{16} = 0$ がその代表点である。

$(Spin(10), \text{半スピン表現}) \cong (SO(10), \square)$ 中2, その2次の

不変式を $\delta(y)$ とし, $r = \begin{cases} 1 & \delta(y) \neq 0 \\ 0 & \delta(y) = 0 \end{cases}$ とすれば, これは不変量である。

Proposition 14. $(GL(1)^2 \times Spin(10), \text{半スピノ表現} \oplus \text{ベクトル表現})$ は, 13個の軌道に分解する。

代表点	r	$\text{rank } x$	$\text{rank } y$	$\dim$
(1) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_5 + e_{10})$	1	1	1	26
(2) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1 + e_6)$	1	1	1	25
(3) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_5)$	0	1	1	25
(4) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_1)$	0	1	1	24
(5) $(1, e_1 + e_6)$	1	1	1	21
(6) $(1, e_1)$	0	1	1	20
(7) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, e_{10})$	0	1	1	17
(8) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4, 0)$	0	1	0	16
(9) $(1, e_6)$	0	1	1	16
(10) $(1, 0)$	0	1	0	11
(11) $(0, e_1 + e_6)$	1	0	1	10
(12) $(0, e_1)$	0	0	1	9
(13) $(0, 0)$	0	0	0	0

(証明), $(x_{16}, y) = (0, y)$ の場合, $(GO(10), \square)$ に帰着し,

$e_1 + e_6, e_1, 0$, を代表元にする3つの軌道に分かれる。

即ち (11), (12), (13) を得る。

$\chi_5 = 1$ における isotropy subalg. は

$$\left(\left(\frac{TA}{2} \right) \oplus \right) \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & -^t A \end{array} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_{10} \end{pmatrix} (\varepsilon) \quad \text{where } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_5 \end{pmatrix} \text{ is } GL(5) \text{ action}$$

(${}^t C = -C$)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } (0). \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の時, } C \text{ により } y_7 = \dots = y_{10} = 0$$

とでき, $y_6 = 1$ or 0 に応じて, $y \sim e_1 + e_6, e_1$ となる。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_5 \end{pmatrix} = (0) \text{ のとき, } \begin{pmatrix} y_6 \\ y_{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } (0) \text{ 即ち } y \sim e_6, 0$$

即ち (5) (6) (9) (10) を得る。

$\chi_0 = 1 + e_1 e_2 e_3 e_4$ における isotropy subalg. は,

$$\left((a) \oplus \right) \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -\alpha_1 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & -\alpha_2 & -\beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & -\alpha_3 & -\beta_2 & -\beta_3 & 0 & 0 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 \\ \hline 0 & \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & C_{15} & -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & 0 & y_6 \\ -\beta_3 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & C_{25} & -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} & -a_{42} & 0 & y_7 \\ \beta_2 & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & C_{35} & -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} & -a_{43} & 0 & y_8 \\ -\beta_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & C_{45} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_{44} & 0 & y_9 \\ -C_{15} & -C_{25} & -C_{35} & -C_{45} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & -2a & y_{10} \end{array} \right] (\varepsilon)$$

となる。

$y_5 \neq 0$ なる, $a_{15} \sim a_{45}, C_{15} \sim C_{45}$ により y_{10} 以外すべて 0 にでき,

$y_5 = 1, y_{10} = 1$ or 0 として可, 即ち $y \sim e_5 + e_{10}, e_5, \text{ i.e. (1) (3)}$

$y_5 = 0$ とする。 $y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \\ y_6 \\ y_9 \end{pmatrix}$ には $Spin(7)$ がスピノ表現で作用す

るから $y' \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (0)$ のいずれかで $y' \neq 0$ なる G_5 により $y_{10} = 0$

$y' = 0$ なる $y_{10} = 1$ or 0 , 即ち $y \sim e_1 + e_6, e_1, e_{10}, 0$, 即ち

(2) (4) (7) (8). // Prop 14 の証明終り。

$(GL(1)^2 \times Spin(12), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現}, V(32) \oplus V(12))$ を考える。

$(GL(1) \times Spin(12), (\text{偶})\text{半スピン表現})$ は 5 つの orbit に分解し、

$$\chi_0 = 1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, \chi_1 = 1 + e_2 e_3 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_6, \chi_7 = 1 + e_2 e_3 e_5 e_6$$

$\chi_{16} = 1, \chi_{32} = 0$ がその代表点である。 $(Spin(12), \text{半スピン表現})$

の 4 次不変式を $Q(x)$, $(SO(12), \square)$ の 2 次不変式を $g(y)$,

$$R = \begin{cases} 1 & Q(x) \neq 0 \\ 0 & Q(x) = 0 \end{cases}, \quad \gamma = \begin{cases} 1 & g(y) \neq 0 \\ 0 & g(y) = 0 \end{cases} \quad \text{とおく。}$$

Proposition 15. $(GL(1)^2 \times Spin(12), \text{半スピン表現} \oplus \text{ベクトル表現})$ は、次の軌道に分解する。(但し、(5) と (6) が同一の軌道に属す可能性があり、今のところ不明)

代表点	R	γ	rank x	rank y	dim
(1) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1 + e_7)$	1	1	1	1	44
(2) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1 + e_8)$	1	0	1	1	43
(3) $(1 + e_2 e_3 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_6, e_1 + e_7)$	0	1	1	1	43
(4) $(1 + e_2 e_3 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_6, e_1)$	0	0	1	1	42
(5) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_1)$	1	0	1	1	38
(6) $(1 + e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6, e_7)$	1	0	1	1	38
(7) $(1 + e_2 e_3 e_5 e_6 + e_1 e_3 e_4 e_6, e_7)$	0	0	1	1	37
(8) $(1 + e_2 e_3 e_5 e_6, e_1 + e_7)$	0	1	1	1	37
(9) $(1 + e_2 e_3 e_5 e_6, e_1)$	0	0	1	1	36
(10) $(1 + e_2 e_3 e_5 e_6, e_2 + e_8)$	0	1	1	1	35
(11) $(1 + e_2 e_3 e_5 e_6, e_2)$	0	0	1	1	34

代表点	R	r	rank x	rank y	dim
(12) $(1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6, 0)$	1	0	1	0	32
(13) $(1+e_2e_3e_5e_6+e_1e_3e_4e_6, 0)$	0	0	1	0	31
(14) $(1, e_1+e_7)$	0	1	1	1	28
(15) $(1+e_2e_3e_5e_6, e_7)$	0	0	1	1	27
(16) $(1, e_1)$	0	0	1	1	27
(17) $(1+e_2e_3e_5e_6, 0)$	0	0	1	0	25
(18) $(1, e_7)$	0	0	1	1	22
(19) $(1, 0)$	0	0	1	0	16
(20) $(0, e_1+e_7)$	0	1	0	1	12
(21) $(0, e_1)$	0	0	0	1	11
(22) $(0, 0)$	0	0	0	0	0

(証明) (x_0, y) の場合, x_0 における isotropy subalg. は $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}; A \in \mathfrak{sl}(6) \right\}$ であり 5 つの orbits (Prop 4 (II)) にゆかれ $e_1+e_7, e_1+e_8, e_1, e_7, 0$ がその代表点である。即ち (1)(2)(5)(6)(12)。但し $(x_0, e_7) \sim (x_0, e_1)$ の可能性はまだ捨てきれない。

(x_{16}, y) の場合, x_{16} における isotropy subalg. は $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -A \end{pmatrix}; C=C^t \right\}$ であり, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ C により $y_7=1$ 或 $0, y_8=\dots=y_{12}=0$ 即ち, $y \sim e_1+e_7, e_1$. また $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = 0$ ならば, $\begin{pmatrix} y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 (0) 即ち, $y \sim e_7, 0$, 結局 (14)(16)(18)(19) を得る。

(x_1, y) の場合, x_1 における isotropy subalg. は

a_1	a_{12}	0	a_{14}	a_{15}	0	0	0	C_{46}	0	0	C_{34}	y_1
a_{21}	a_2	0	a_{15}	a_{25}	0	0	0	C_{56}	0	0	C_{35}	y_2
a_{31}	a_{32}	a_3	a_{34}	a_{35}	a_{36}	$-C_{46}$	$-C_{56}$	0	C_{16}	C_{26}	b_{36}	y_3
a_{41}	a_{42}	0	a_4	$-a_{21}$	0	0	0	$-C_{16}$	0	0	C_{13}	y_4
a_{51}	a_{52}	0	$-a_{12}$	a_5	0	0	0	$-C_{26}$	0	0	C_{23}	y_5
a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_6	$-C_{34}$	$-C_{35}$	$-b_{36}$	$-C_{13}$	$-C_{23}$	0	y_6
0	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	$-a_1$	$-a_{21}$	$-a_{31}$	$-a_{41}$	$-a_{51}$	$-a_{61}$	y_7
$-C_{12}$	0	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	$-a_{12}$	$-a_2$	$-a_{32}$	$-a_{42}$	$-a_{52}$	$-a_{62}$	y_8
$-C_{13}$	$-C_{23}$	0	C_{34}	C_{35}	C_{36}	0	0	$-a_3$	0	0	$-a_{63}$	y_9
$-C_{14}$	$-C_{24}$	$-C_{34}$	0	C_{45}	C_{46}	$-a_{14}$	$-a_{15}$	$-a_{34}$	$-a_4$	a_{12}	$-a_{64}$	y_{10}
$-C_{15}$	$-C_{25}$	$-C_{35}$	$-C_{45}$	0	C_{56}	$-a_{15}$	$-a_{25}$	$-a_{35}$	a_{21}	$-a_5$	$-a_{65}$	y_{11}
$-C_{16}$	$-C_{26}$	$-C_{36}$	$-C_{46}$	$-C_{56}$	0	0	0	$-a_{36}$	0	0	$-a_6$	y_{12}

さて, $y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_9 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_{12} \end{pmatrix}$ には $Sp(3)$ が作用して いるから, $y' \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cap (0)$

$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $C_{12}, a_{31}, C_{14}, C_{15}, a_{61}$ により $y_7 = 1 \cap 0, y_8 = y_3 = y_{10} = y_{11} = y_6 = 0$ 即ち $y \sim e_1 + e_7 \cap e_1$.

$y' = (0)$ のとき $y'' = {}^t(y_7 y_8 y_3 y_{10} y_{11} y_6)$ には $Sp(3)$ が作用するから, $y'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cap (0)$ 即ち $y \sim e_7, 0$. 即ち (3)(4)(7)(13).

(x_7, y) の場合, x_7 における isotropy subalg. は

a_1	0	0	a_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	y_1
a_{21}	a_2	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	0	0	C_{56}	0	$-C_{36}$	C_{35}	y_2
a_{31}	a_{32}	a_3	a_{34}	a_{35}	a_{36}	0	$-C_{56}$	0	0	C_{26}	$-C_{25}$	y_3
a_{41}	0	0	a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	y_4
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_5	a_{56}	0	C_{36}	$-C_{26}$	0	0	C_{23}	y_5
a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_6	0	$-C_{35}$	C_{25}	0	$-C_{23}$	0	y_6
0	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	$-a_1$	$-a_{21}$	$-a_{31}$	$-a_{41}$	$-a_{51}$	$-a_{61}$	y_7
$-C_{12}$	0	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	0	$-a_2$	$-a_{32}$	0	$-a_{52}$	$-a_{62}$	y_8
$-C_{13}$	$-C_{23}$	0	C_{34}	C_{35}	C_{36}	0	$-a_{23}$	$-a_3$	0	$-a_{53}$	$-a_{63}$	y_9
$-C_{14}$	$-C_{24}$	$-C_{34}$	0	C_{45}	C_{46}	$-a_{14}$	$-a_{24}$	$-a_{34}$	$-a_4$	$-a_{54}$	$-a_{64}$	y_{10}
$-C_{15}$	$-C_{25}$	$-C_{35}$	$-C_{45}$	0	C_{56}	0	$-a_{25}$	$-a_{35}$	0	$-a_5$	$-a_{65}$	y_{11}
$-C_{16}$	$-C_{26}$	$-C_{36}$	$-C_{46}$	$-C_{56}$	0	0	$-a_{26}$	$-a_{36}$	0	$-a_{56}$	$-a_6$	y_{12}

と なる。

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix}$ に $GL(2)$ が作用するから $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のときは, $a_{21} \sim a_{61}, C_{12} \sim C_{16}$ により $y_7 = 1$ の 0 , $y_2 = \dots = y_6 = y_8 = \dots = y_{12} = 0$ 即ち $y \sim e_1 + e_7, e_1$. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$ のとき,

$y' = {}^t(y_2 y_3 y_5 y_6 y_8 y_9 y_{11} y_{12})$ に $Spin(7)$ がスピノ表現で作用するから $y' \sim {}^t(10001000), {}^t(10 \dots 0), 0$ の 3 つに分れる。

$y' \neq 0$ のとき $C_{12}, -C_{24}$ により $y_7 = y_{10} = 0$ とし得、即ち $y \sim e_2 + e_8, e_2$.

$y' = 0$ なる $\begin{pmatrix} y_7 \\ y_{10} \end{pmatrix}$ に $GL(2)$ が作用するから $\begin{pmatrix} y_7 \\ y_{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

即ち $y \sim e_7, 0$. 結局, (8)(9)(10)(11)(15)(17).

$(\alpha_{32}, y) = (0, y)$ の場合 $(GO(12), 0)$ に帰着し, 3 つに分れる. 即ち $y \sim e_1 + e_7, e_1, 0$ i.e. (20)(21)(22) //

(Prop 15 の証明終り)

参考文献

- [1] M. Sato-T. Kimura, Nagoya Math J. Vol 65 (1977)
- [2] T. Kimura, Nagoya Math. J. Vol 85 (1982)
- [3] T. Kimura, Tsukuba J. Math Vol 5, No 1 (1981)
- [4] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiplication, to appear in J. of Alg.
- [5] 木村達雄, 東京大学修士論文 (1973)
- [6] Pyasetskii, V ; Linear Lie group acting with finitely many orbits, Funct. Anal. Appl 9. 351-353 (1975)

[7] V.G. Kac, Concerning the question of description of the orbit space of a linear group,

Uspechi, Mat. Nauk, 30 (1975), 173-174 (in Russian)

[8] V.G. Kac Some Remarks on Nilpotent Orbits,

J. of Alg., 64-1 (1980), 190-213.