

乱流中のエネルギーカスケード

大阪大学 基礎工学研究科 本告 遊太郎, 後藤 晋

Yutaro Motoori and Susumu Goto

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

コルモゴロフの相似仮説 [1] が示唆するように, 乱流の小スケールの統計は境界条件によらず普遍的である. この相似仮説はエネルギーカスケード (つまり, エネルギーが大スケールの渦からより小スケールの渦に順繰りに伝達される過程) の結果であると説明される. コルモゴロフの相似仮説は様々な乱流理論や乱流モデルの根幹を成すので, エネルギーカスケードの物理描像を深く理解することは, 新しい理論やモデルの構築の礎となる.

ところで, 近年, 大規模な直接数値シミュレーション (DNS) が盛んに行われるようになり, 十分に発達した乱流中の 3 次元構造の詳細やその動力学を明らかにする土台ができた. 本稿では, 周期箱乱流 [2-4] および乱流境界層 [5] に関する我々の最近の研究が明らかにした「エネルギーカスケードの物理描像」について概説し, また, 今後の展望についてまとめる.

2 周期箱乱流

発達した乱流は大小さまざまな渦からなる. しかし, エンストロフィー $W (= \frac{1}{2}\omega^2)$ や速度勾配テンソルの第二不変量 Q の等値面を可視化しても, 微細な構造が見えるだけである. 高レイノルズ数の乱流のエネルギースペクトルは波数の $-5/3$ 乗に比例する. このとき, 距離 ℓ の流速差の大きさの平均値は $\ell^{1/3}$ に比例し, したがって, スケール ℓ で見た速度勾配は $\ell^{-2/3}$ に比例する. つまり, 速度勾配には最小スケールが支配的に寄与する. これが速度勾配に関する量で渦構造を可視化すると, 最小スケール (コルモゴロフ長 η) の渦のみが際立つ理由である. したがって, 渦の階層を捉えるためには, 流速場の粗視化やスケール分解が必要となる.

周期箱乱流では流速場をフーリエ変換できるので, ローパスあるいはバンドパスフィルタを用いて流れ場をスケール分解することは容易である. その結果, 渦の階層は簡単に同定される. 結果は文献 [2-4] あるいは解説 [6] に示すが, 乱流を維持する外力の種類によらず, (i) 発達した乱流は管状渦の階層からなり, (ii) とくに, 同一スケールでは互いに逆向きに回転する渦同士が互いに平行に揃う傾向がある.

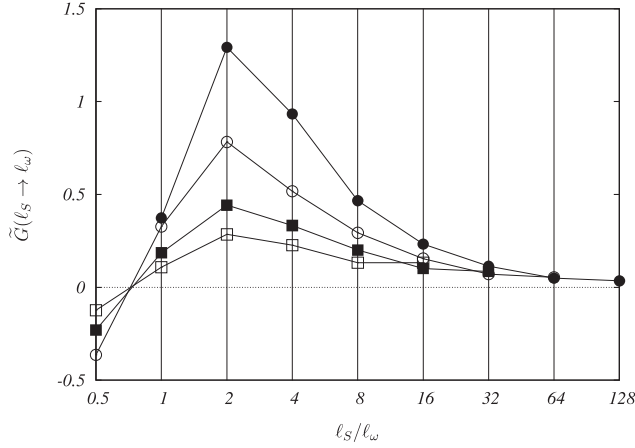


図 1: $Re_\lambda = 750$ の周期箱乱流における, 自分自身 (ℓ_w のスケール) に対して, ℓ_S/ℓ_w 倍のスケールからの伸長の寄与 $\tilde{G}$ ($= G/(u'/L)$). u' は流速の 1 成分の標準偏差, L は積分長である. ● は $\ell_w = 25\eta$, ○ は $\ell_w = 50\eta$, ■ は $\ell_w = 100\eta$, □ は $\ell_w = 200\eta$ のスケールに対する結果.

ところで, エンストロフィー W の支配方程式が

$$\frac{DW}{Dt} = \omega_i S_{ij} \omega_j + \nu \nabla^2 W - 2\nu \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (1)$$

と表されることに注意する. ここで, ω_i および S_{ij} は渦度および歪み速度テンソル, ν は動粘性係数である. 粘性に依存する 2 項は W を小さくするはたらしめない, W は渦伸長項 $\omega_i S_{ij} \omega_j$ のみにより生成される. そこで, W の生成率,

$$G = \frac{\omega_i S_{ij} \omega_j}{|\omega_i|^2} \quad (2)$$

の右辺の ω_i と S_{ij} をそれぞれスケール分解し, スケール ℓ_w の渦伸長が, どのスケールの歪み速度から最も寄与を受けるかを検討した. 結果の一例を図 1 に示す. この図には, テイラー長レイノルズ数 $Re_\lambda = 750$ の乱流で, スケール $\ell_w/\eta = 200, 100, 50, 25$ の渦の伸長への, ℓ_S のスケールからの寄与を示す. 自分より 2 倍大きなスケールからの寄与がもっとも大きいことが分かる. この傾向は, 慣性領域のスケールにおいて, 外力やレイノルズ数によらず確かめられる.

以上の結果をまとめると, 各階層で渦は管状となり, しかも, 互いに逆旋回するものどうしが互いに平行に揃う傾向がある. これらの渦は, その周囲に強い歪み速度を伴うので, そのような領域でより小さなスケールの渦が効率よく生成される. これが周期箱乱流におけるエネルギーカスケードの物理描像である.

なお, こうして渦の階層が維持されるとすれば, より小さな渦はより大きな渦の周囲に形成される. つまり, 小スケールの渦のクラスタは大スケールの渦には対応しない. また, カスケードの描像でよく使われる「大きな渦がより小さな渦に壊れていく」という表現も適切ではないかも知れない.

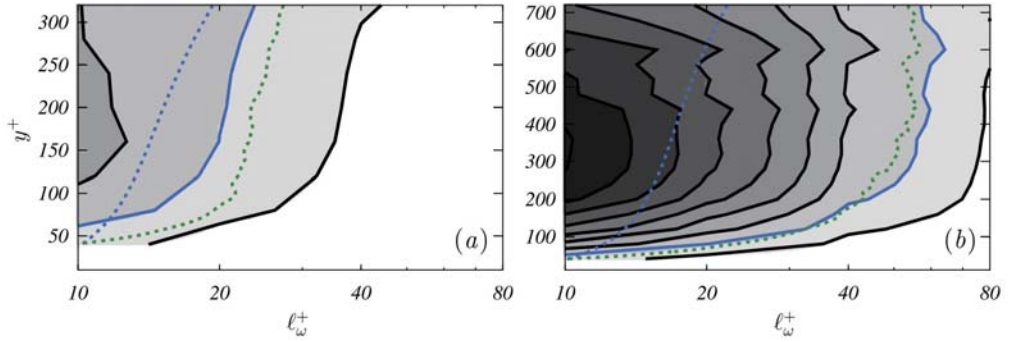


図 2: (a) $Re_\theta = 1250$, (b) 3170 における Γ [式 (3)] . 外層の影響が顕著に現れない領域 ($y \lesssim 0.7\delta_{99}$) のみを示す. 等高線の間隔は 0.5 で, 濃い色ほど値が大きく, 青の実線が $\Gamma = 1$ を示す. 破線は $\ell_\omega = 5\eta$ (青) および $\ell_\omega = 0.7L_c$ (緑) を表す.

3 乱流境界層

次に乱流境界層を考える. 本研究では, 流入条件に別の DNS [7, 8] の結果を用いることで, 助走区間なしに比較的小さな解像度 ($6112 \times 616 \times 768$) で, 十分に発達した乱流境界層をシミュレートした. 計算領域の入口と出口における運動量厚さと一様流速に基づくレイノルズ数は, それぞれ $Re_\theta = 1200$ と 3620 である. 下流部の対数層では, プレマルチプライドエネルギースペクトルにいわゆる「第二ピーク」が現れる. 第二ピークは, 多くの DNS[9] や実験 [10–12] で確認されており, 大規模構造の存在を示唆したものであるとされるが, 対数層におけるコロモゴロフスペクトルの出現に対応するので, 対数層に渦の階層が現れることに対応する.

近年, 高いレイノルズ数の壁乱流の DNS により, その統計性質の詳細が明らかになってきた [13]. しかし, 壁乱流中のエネルギーカスケードの詳細を明らかにしようとする試みは必ずしも多くはない (例えば, 文献 [14, 15]). これは, 壁乱流が壁と垂直な方向に非一様であり, さらに平均せん断流との相互作用のために, エネルギーの伝達過程が周期箱乱流と比べて著しく複雑になることに起因する. 我々は, 周期箱乱流での経験を活かし, まずは, 発達した乱流境界層中に存在する渦の階層の抽出から始める [5].

乱流境界層に対しても, 渦の階層の抽出にはスケール分離が不可欠である. 例えば, 得られた流速の勾配を用いて渦構造を同定すると, 周期箱乱流と同様, 最小スケールの渦のみが同定される. そこで, 物理空間に粗視化を施し, それぞれのスケールの渦の形状に着目する. 境界層厚さ δ_{99} 程度の大スケール渦はヘアピン状である一方, より小さな渦はランダムな向きをもつ管状の構造となる. これが乱流境界層中の渦の階層の正体である.

周期箱乱流の最大スケールの渦は, 注入した外力そのものによる. それよりも小さなスケールの渦は, エネルギーカスケードによって生成される. それでは, 乱流境界層中の渦の階層はどのように形成されるのであろうか. ここでも, 前節と同様, W の成長率 G に注目する. ただし, G が壁からの距離 y に依存することに注意する. まず, 平均流を除いて G を評価すると, 周期箱乱流 (図 1) と同様, どの高さにおいても自分自身の 2 倍の渦

による伸長の寄与が最も大きくなる．つまり，乱流境界層中の ℓ_ω のスケールの渦は，自分自身の2倍からの寄与 $G(2\ell_\omega \rightarrow \ell_\omega)$ ，もしくは（上では一旦，除いて考えた）平均流からの寄与 $G(M \rightarrow \ell_\omega)$ を最も強く受けて生成される．この両者の優位性を

$$\Gamma(\ell_\omega, y) = \frac{G(2\ell_\omega \rightarrow \ell_\omega; y)}{G(M \rightarrow \ell_\omega; y)} \quad (3)$$

で評価する．つまり， $\Gamma < 1$ のとき，ある高さ y における ℓ_ω のスケールの渦は平均流による伸長の寄与を最も強く受ける．逆に， $\Gamma > 1$ のとき，自分自身の2倍の渦からの伸長の寄与を最も強く受ける．

図2は，(a) $Re_\theta = 1250$ と (b) 3170 における $\Gamma(\ell_\omega, y)$ を示す．青の実線は $\Gamma = 1$ の等高線を示すので，この線よりも左側が $\Gamma > 1$ の領域である．ただし，青の破線は $\ell = 5\eta$ を表しており，この線より左側のスケールは小さすぎるため意味をなさない．つまり，青の2本の線で囲まれた領域は，「平均流」よりも「2倍のスケールの渦」による伸長の寄与を大きく受ける．図2(b)の $Re_\theta = 3170$ では，この青の線で囲まれた領域が対数層 ($y^+ \gtrsim 100$) に広く分布する．これに対して，図2(a)の $Re_\theta = 1250$ では，そのような領域は非常に狭い．つまり， $Re_\theta \gtrsim 1500$ で渦の階層がようやく現れ始め，このとき小スケール渦はエネルギーカスケードによって生成される．実際，このような十分に大きな Re_θ に対しては，対数層で $Re_\lambda \gtrsim 50$ となることが確かめられる．さらに，緑の破線は $0.7L_c$ (L_c はコアシン長 [16, 17]) を表し，クロスオーバー ($\Gamma \gtrsim 1$) が起きるスケールに一致する．これは，渦の伸長の時間スケールと平均せん断流の時間スケールとが釣り合うスケールが $\ell \approx L_c$ であるためである．

4 おわりに

以上で示したように，発達した乱流の DNS が可能となり，エネルギーカスケードの物理描像も明らかになりつつある．しかし，乱流境界層のような非一様乱流におけるカスケード描像の全貌を明らかにするには，まだ，未解決の問題が残っている．

まず，エネルギーカスケードはしばしば「大きな渦から小さな渦へのエネルギー伝達」と表現されるが，本当に渦がエネルギーを保有しているかは自明ではない．周期箱乱流に対しては，周期箱を一边が ℓ の小立方体領域 V_ℓ に分割し，スケール ℓ の流れのもつエネルギーを $\mathcal{E}_\ell = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u} - \mathbf{U}_\ell|^2 dV_\ell$ と定義することができる．ここで， $\mathbf{u}$ は流速， $\mathbf{U}_\ell$ は各領域での局所平均流速である．つまり，あるスケールの渦はより大きなスケールの渦が誘導する流速場により移流されるので，移流のエネルギーを除去することで， ℓ （以下）のスケールのエネルギーを定義できる．実際， $\mathcal{E}_\ell$ の空間分布は，粗視化エンストロフィーのそれと強い相関があることが確かめられる [2, 3]．つまり，この意味では，周期箱乱流中のスケール ℓ のエネルギーは，大きさ ℓ の渦が保有すると考えて良さそうである．

しかし，乱流境界層の場合のエネルギーのスケール分解は自明でない．前節で示したように，発達した乱流境界層の対数層では確かに小スケールの渦は大スケールの渦の周囲での伸長により生成される．しかし，この過程で本当にエネルギーが伝達されているかは分からない．言い換えると，平均せん断流が存在する乱流境界層におけるエネルギーの空間輸送は不明のままである．

その他の未解決問題を列挙する．(i) 壁極近傍の乱れの生成素過程として，自己維持サイクル [18, 19] が知られる．つまり，縦渦が平均せん断流を変調することで，ストリークを誘起し，不安定化したストリークにより縦渦が伸長される．一方，本研究の評価法では，バッファ層の渦は主に平均流により伸長されることが示唆される．これらの2つの描像がどのように整合するのかを示す必要がある．(ii) 我々は，乱流境界層に加えて，平行平板間乱流についても解析を進めている．これらの乱流間の相似点や相違点を明らかにすることは，乱流の普遍性の理解に向けて重要である．(iii) 乱流の動力学の理解には渦の客観的な同定が有用である．周期箱乱流では低圧力法 [20] がしばしば用いられ，文献 [4] では，これを拡張して任意のスケールの渦の旋回中心を同定した．しかし，同様の方法で壁乱流中の渦を客観的に同定できるかは定かではない．(iv) 壁乱流中の運動量輸送を渦の動力学で記述できるだろうか．(v) 本稿では，乱流中の渦の階層を同定するために粗視化やスケール分離が必要であることを強調したが，その方法には客観性がなく，系統的な検討が必要である．

謝辞

本研究は，科学研究費補助金（16H04268）の助成を受けて行いました．また，流入条件の時系列データを快く提供していただいた，Zaki 先生ならびに Jung 先生に感謝します．

参考文献

- [1] A. N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**, pp. 301–305, (1941).
- [2] S. Goto, A physical mechanism of the energy cascade in homogeneous isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **605**, pp. 355–366, (2008).
- [3] S. Goto, Coherent structures and energy cascade in homogeneous turbulence, *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **195**, pp. 139–156, (2012).
- [4] S. Goto, Y. Saito and G. Kawahara, Hierarchy of antiparallel vortex tubes in spatially periodic turbulence at high Reynolds numbers, *Phys. Rev. Fluids*, **2**, 064603, (2017).
- [5] Y. Motoori and S. Goto, Generation mechanism of a hierarchy of vortices in a turbulent boundary layer, Submitted to *J. Fluid Mech.*, (2018).
- [6] 後藤晋，発達した乱流：エネルギーカスケードをめぐって，日本物理学会誌，**73**，pp. 457–462, (2018) .
- [7] J. Lee, S. Y. Jung, H. J. Sung and T. A. Zaki, Effect of wall heating on turbulent boundary layers with temperature-dependent viscosity, *J. Fluid Mech.*, **726**, pp. 196–225, (2013).

- [8] J. Lee, H. J. Sung and T. A. Zaki, Signature of large-scale motions on turbulent/non-turbulent interface in boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **819**, pp. 165–187, (2017).
- [9] P. Schlatter, Q. Li, R. Örlü, F. Hussain and D. S. Henningson, On the near-wall vortical structures at moderate Reynolds numbers, *Eur. J. B*, **48**, pp. 75–93, (2014).
- [10] N. Hutchins and I. Marusic, Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **579**, pp. 1–28, (2007).
- [11] D. J. C. Dennis and T. B. Nickels, Experimental measurement of large-scale three-dimensional structures in a turbulent boundary layer. Part 1. Vortex packets, *J. Fluid Mech.*, **673**, pp. 180–217, (2011).
- [12] Y. Hwang, Statistical structure of self-sustaining attached eddies in turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, **767**, pp. 254–289, (2015).
- [13] J. Jiménez, Coherent structures in wall-bounded turbulence, *J. Fluid Mech.*, **842**, pp. 1–100, (2018).
- [14] J. Jiménez, Cascades in wall-bounded turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **44**, pp. 27–45, (2012).
- [15] A. Cimorelli, E. De Angelis, J. Jiménez and C. M. Casciola, Cascades and wall-normal fluxes in turbulent channel flows, *J. Fluid Mech.*, **796**, pp. 417–436, (2016).
- [16] S. Corrsin, Local isotropy in turbulent shear flow, *NACA RM*, 58B11, (1958).
- [17] J. Jiménez, Near-wall turbulence, *Phys. Fluids*, **25**, 101302, (2013).
- [18] S. J. Kline, W. C. Reynolds, F. A. Schraub and P. W. Runstadler, The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **30**, pp. 741–773, (1967).
- [19] J. M. Hamilton, F. Waleffe and J. Kim, Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures, *J. Fluid Mech.*, **287**, pp. 317–348, (1995).
- [20] H. Miura and S. Kida, Identification of tubular vortices in turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66**, pp. 1331–1334, (1997).