

磁性流体界面における磁場解析と安定性解析

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering, Hokkaido Univ.

1 はじめに

磁性流体自由表面に印加する磁場を強めていくとき、一様界面から六角格子状界面などのパターンへの遷移が見られる。その理論解析は、Cowley-Rosensweig により線形調和理論の立場から [1, 2], Gailitis により弱非線形理論の立場から [3] 行われている。一方数値解析は、計算機と連続体のシミュレーション技術の急速な発展の中で、幾度となく提案されている。このような自由表面現象は、磁場と流体の相互作用に敏感であるが、その解析は、界面形状変化のたびに磁場・流体両方の解析を必要とし、手間がかかる。このためこれまで、磁性流体界面の安定性について、数値解析を用いて実際に扱った例を見ることはなかった。

本研究では、規則的・不規則的な格子で実空間を刻む数値解析法の代わりに、界面形状・界面応力・界面磁場を周期関数列に展開するときの展開係数を扱う。これはいわゆるスペクトル法であり、界面形状や印加磁場分布は任意として厳密に導いた展開係数同士の関係から展開係数を決める。展開係数は界面量に限られたもので、また有限個なので、解析の負担を減らすことができる。さらに、従来の理論解析と結果を比較することも容易である。本稿では、本研究における磁場解析・流体解析についてまとめた後、従来の線形調和解析における界面磁場・界面応力・分散関係との関係を調べる。さらに、2次元単一モード形状または六角格子状の界面に一様な鉛直磁場を印加して、数値解析と理論解析で分散関係を比較し、安定性解析に用いる分岐図式を描く。

2 界面磁場解析の概要 [4, 5]

本研究で用いている界面磁場解析の概要を以下にまとめる。

接線磁場 $h_{X,Y}$, 法線磁束密度 b_Z は, 任意の界面形状と印加磁場分布のもとで, 摂動法などによらず厳密に求める. これらの界面磁場成分をそれぞれ基本場 $h_{X,Y}^0, b_Z^0$ と誘導場 $h_{X,Y}^1, b_Z^1$ に分ける. 基本場は, 既知の外部印加磁場 h^0 から $h_{X,Y}^0 = t_{X,Y} \cdot h^0$, $b_Z^0 = t_Z \cdot h^0 / P$ のように直接定義できる. 誘導場は, 基本場と共に調和性と界面条件を満たすように **3次元界面磁場方程式**から決める必要があるが, この過程は, 余分な近似を用いることなく, 次のように簡単化される.

$$\begin{cases} h_X^1 = \hat{G}_X (1 + M\hat{G}_Z)^{-1} \tilde{h}_Z, \\ h_Y^1 = \hat{G}_Y (1 + M\hat{G}_Z)^{-1} \tilde{h}_Z, \\ b_Z^1 = \hat{G}_Z (1 + M\hat{G}_Z)^{-1} \tilde{h}_Z. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, μ_j を透磁率 ($j=1$:流体, $j=2$:真空), $M_n = 2Mb_Z^0$ を界面磁化の法線成分として, 次のように, 透磁率パラメータ M, P と誘導場の生成項 $\tilde{h}_Z$ を定義した.

$$M \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right), \quad P \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right), \quad \tilde{h}_Z = -Mb_Z^0 = -\frac{1}{2}M_n. \quad (2)$$

3次元Hilbert変換演算子 $\hat{G}_I$ ($I=X, Y, Z$) は, $t_{X,Y}$ を接線単位ベクトル, t_Z を法線単位ベクトル, $g(\mathbf{R}')$ を任意関数として, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} \hat{G}_{X,Y}[g(\mathbf{R}')] &= \hat{H}[t_{X,Y} \cdot \nabla' g(\mathbf{R}')], \quad \hat{G}_Z[g(\mathbf{R}')] = \frac{1}{P} \hat{H}[t_Z \cdot \nabla' g(\mathbf{R}')], \\ \hat{H}[g(\mathbf{R}')] &\equiv -2 \iint_F d\mathbf{S}' \psi g(\mathbf{R}'). \end{aligned} \quad (3)$$

磁場が調和性を持つことと関連して, (3) には3次元Poisson方程式 $\Delta' \psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の基本解

$$\psi = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \quad \nabla' \psi = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \quad (4)$$

が現れる. ここで, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(\mathbf{R}')$ はソース点, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R})$ は観測点であり, ソース点に関する関数・微分には “ $\prime$ ” をつけてある. また, $\iint_F d\mathbf{S}'$ は界面 F 上のソース点にわたる積分である.

(3)における被演算関数を $g(\mathbf{R}') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{g}_{\nu} f_{\nu}(\mathbf{R}')$ のように周期関数 $f_{\nu}(\mathbf{R}')$ で展開しておくと, 数値積分によらないで, $\hat{G}_I$ の作用を解析的に求めることができる. 特に $\hat{G}_Z$ の場合は, 界面形状と印加磁場の非線形モード結合の形にまとめられるが, これについては8節で述べる.

3 界面力学方程式 [6]

界面形状変化の大きさや複雑さに制限されず自由表面現象の解析を行えるように、非回転性・非粘性を仮定し磁化の温度依存性は無視して、Bernoulli 方程式 (5) および界面での力学的条件 (6) から始める [7].

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla (D + G + p), \quad (5)$$

$$p = C + T + p_0. \quad (\text{界面上}) \quad (6)$$

ここで、圧力 p ・大気圧 p_0 ・流体密度 ρ ・流速 $\mathbf{v}$ ・重力加速度 g ・鉛直座標 z ・界面形状の主曲率 $\kappa_{1,2}$ ・表面張力係数 γ ・接線磁場 $h_{X,Y}$ ・法線磁束密度 b_Z ・透磁率 μ_j ($j=1$: 流体, $j=2$: 真空)・界面を横切る値の跳び [...] (2-1) を用い、動圧・重力ポテンシャル・表面張力・磁気応力差を次のように表す.

$$D \equiv \rho |\mathbf{v}|^2 / 2, \quad G \equiv \rho g z, \quad (7)$$

$$C \equiv \gamma(\kappa_1 + \kappa_2), \quad T \equiv -[1/\mu_j]\{\mu_1\mu_2(h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2\}/2.$$

流体の運動が遅いとして D を落とし、(5) の鉛直成分を無限水深から $z=0$ 付近の界面変位 z^1 まで鉛直方向に積分する. さらに、力学的条件 (6) より $p_{z=z^1} = C + T + p_0$ を用いれば $-(G + p)_{z=-\infty}$ は p_0 に含める),

$$\int_{-\infty}^{z^1} dz \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -(G + p)_{z=z^1} + (G + p)_{z=-\infty} = -(G + C + T + p_0). \quad (8)$$

第 1 辺で $\varphi = \int_{-\infty}^{z^1} dz v_z$ は速度ポテンシャルに他ならない. これより、次の界面力学方程式が導かれる.

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S + p_0 = 0, \quad S \equiv G + C + T. \quad (9)$$

4 一様鉛直印加磁場における線形調和解析 [1, 2]

一様鉛直磁場のもとで線形調和解析を行うため、まず、界面変位 $z^1 \propto \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$ を微小として、界面力学方程式の中の量を

$$\begin{aligned} \rho \partial \varphi / \partial t &\rightarrow (\rho/k) \partial^2 z^1 / \partial t^2, & G &\rightarrow \rho g z^1, \\ C &\rightarrow -\gamma (\partial^2 z^1 / \partial x^2 + \partial^2 z^1 / \partial y^2), & T &\rightarrow -M_n b_Z^1. \end{aligned} \quad (10)$$

と近似する. ただし、 ω , $\mathbf{k}$ は角振動数と波数ベクトルである. ここでは、流速場が調和場なら $v_z = (\partial z^1 / \partial t) e^{kz}$ となること、線形解析で磁気応力差が $T \simeq -[1/\mu_j] b_Z^0 b_Z^1$ と近似されることを用いている. ところで、界面磁

場に対する界面条件を用いて求めた線形磁場（法線磁束密度の誘導場）は $b_z^1 = M_n k z^1 / 2P$ となる．以上により，線形波動の分散関係が導かれる．

$$\omega^2 = gk + (\gamma/\rho) k^3 - (M_n^2/2\rho P) k^2. \quad (11)$$

印加磁場を強めていくとき，安定状態から不安定状態への遷移が生じる臨界磁場強度 H_c とそのときの臨界波数 k_c は，Fig. 1 で $M_n = M_c$ の曲線が示すように，分散関係 (11) を満たす ω が初めて虚部を持つ条件，すなわち $\omega^2 = 0$ かつ $\partial\omega^2/\partial k = 0$ から

$$k = \left(\frac{\rho g}{\gamma} \right)^{1/2} \equiv k_c, \quad M_n^2 = 4P(\rho g \gamma)^{1/2} \equiv M_c^2, \quad H_c = \frac{P}{2M} M_c \quad (12)$$

と求められる [2]．

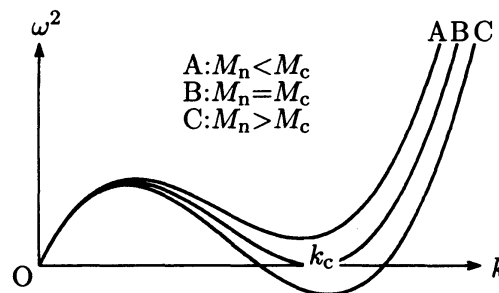


Fig. 1: Dispersion relation for linear wave on the horizontal free surface of magnetic fluid under homogeneous vertical magnetic field.

5 周期関数列による展開

界面力学方程式 (9) において，界面応力和 S および速度ポテンシャル φ は界面変位 z^1 に応じて変化する．しかし， z^1 は界面座標 $\mathbf{R}$ の連続的な関数であるため，(9) のままで界面形状の変化や特性を明らかにすることは難しい．そこで， z^1 と界面応力和 S を，

$$z^1(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R}) \tilde{z}^1, \quad S(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R}) \tilde{S}. \quad (13)$$

のように周期関数列で展開する．ここで $\Phi^{(zS)}(\mathbf{R})$ は，波数ベクトル $\mathbf{k}_\mu$ に対応する対称周期関数 f_μ^S および反対称周期関数 f_μ^A を成分とする，次のよ

うな行ベクトルである.

$$\Phi^{(zS)}(\mathbf{R}) = \left(\cos \Theta_\mu \mid \sin \Theta_\mu \right) \equiv \left(f_\mu^S(\mathbf{R}) \mid f_\mu^A(\mathbf{R}) \right) \equiv (f_\mu(\mathbf{R})), \quad (14)$$

$$(N = N_S + N_A, \quad \Theta_\mu \equiv \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}).$$

展開 (13) により, 界面形状は, 展開係数列ベクトル $\tilde{z}^1 \equiv (\tilde{z}_\mu^1)$ の有限個の成分で特徴づけられる. このとき, S の展開係数列ベクトル $\tilde{S} \equiv (\tilde{S}_\mu)$ は, $\tilde{z}^1$ の関数となる. また, $v_z = (\partial z^1 / \partial t) e^{kz}$ と $\varphi = \int_{-\infty}^{z^1} dz v_z$ に基づけば, 速度ポテンシャルも $\varphi(\mathbf{R}, Z) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R}) (\partial \tilde{z}^1 / \partial t) e^{kZ} / k$ ($k \equiv |\mathbf{k}_\mu|$) と展開される. 以上により, 界面力学方程式 (9) は, $\tilde{z}^1$ に対する次の方程式に書き直される.

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}^1}{\partial t^2} = -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{z}^1), \quad (15)$$

$$\tilde{S}(\tilde{z}^1) = \tilde{G}(\tilde{z}^1) + \tilde{C}(\tilde{z}^1) + \tilde{T}(\tilde{h}_X(\tilde{z}^1), \tilde{h}_Y(\tilde{z}^1), \tilde{b}_Z(\tilde{z}^1)).$$

ここで, $\tilde{G}, \tilde{C}, \tilde{T}$ は G, C, T の展開係数列ベクトルである. (15) は, 界面形状に与えた波数 $\mathbf{k}_\mu$ と同じ波数における界面応力和の応答 $k \tilde{S}_\mu / \rho \tilde{z}_\mu^1 \equiv R_\mu$ が, 分散関係 (11) の右辺に対応することを示している.

6 展開係数の間の関係 [6, 8]

(15) を用いて静的および動的な自由表面解析を実際に行うためには, 応力和の展開係数 $\tilde{S}$ が界面形状の展開係数 $\tilde{z}^1$ にどのように依存しているか, 具体的に知る必要がある [6, 8]. G, C は界面形状から直接決まるため, $\tilde{G}(\tilde{z}^1), \tilde{C}(\tilde{z}^1)$ は直接的な関係である (表面張力の表式はやや複雑であるが). しかし, 磁気応力差 T は界面磁場を通して界面形状に依存するため, (15) に示すように, $\tilde{T}$ と $\tilde{z}^1$ は間接的な関係になる.

関数関係 $\tilde{S}(\tilde{z}^1)$ が決まれば, 勾配行列

$$\mathbf{H} \equiv \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{z}_\mu^1} \right) \quad (16)$$

が得られるが, これは次の目的に用いる.

1. 解析的に求めた $\tilde{z}_\mu^1$ に関する $\tilde{S}$ の微分と, $\tilde{z}_\mu^1$ をわずかに変えて数値的に求めた $\tilde{S}$ の差分を比較し, 計算精度を確認する.
2. 定常界面形状を求める際に, $\mathbf{H}$ による Newton 法を適用する.

3. (12) の代わりに次節の方法で，界面変位が有限な場合の臨界磁場強度 H_c を求める．

7 臨界磁場強度の決定

安定性の遷移は，印加磁場強度 $t_z \cdot h^0 \equiv H_0$ を増すにつれて， H の (符号も含めた) 最小固有値 h が初めて 0 を横切るときに生じる．これは， kH/ρ と (11) 右辺の対応関係からわかるように，(12) を一般化した条件である．すなわち，線形調和解析の $\omega^2 = 0$ に相当するのが $h = 0$ である．

界面変位 z^1 の典型的な大きさを v_0 とする． v_0 を変えながら $h = 0$ を満たす $H_0 = H_c$ を求めて (H_0, v_0) 面内に点を打ち，これらの点を結べば分岐の枝が描ける．分岐の枝の右側の領域で系の状態は不安定になる．

8 3次元 Hilbert 変換演算子 [9]

界面磁場解析では，3次元 Hilbert 変換演算子 $\hat{G}_I$ ($I=X, Y, Z$) を定義した．(3)において，任意関数 $g(\mathbf{R}')$ を2節の周期関数 $f_\nu(\mathbf{R}')$ とし，多少の近似を行うと，

$$\begin{aligned}\hat{G}_X[f_\nu(\mathbf{R}')] &\simeq \frac{x_\nu}{k_\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \Theta_\nu} = \frac{1}{k_\nu |\mathbf{r}_X|} \frac{\partial f_\nu}{\partial X}, \\ \hat{G}_Y[f_\nu(\mathbf{R}')] &\simeq \frac{y_\nu}{k_\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \Theta_\nu} = \frac{1}{k_\nu |\mathbf{r}_Y|} \frac{\partial f_\nu}{\partial Y}, \\ \hat{G}_Z[f_\nu(\mathbf{R}')] &\simeq -\frac{1}{2P} \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_\mu (k_{\nu+\mu} f_{\nu+\mu} + k_{\nu-\mu} f_{\nu-\mu})\end{aligned}\quad (17)$$

が導かれる [9]．ここでは，界面形状を界面座標 (X, Y) の関数 $\mathbf{r}(X, Y)$ として $|\mathbf{r}_X| \equiv |\partial \mathbf{r} / \partial X|$, $|\mathbf{r}_Y| \equiv |\partial \mathbf{r} / \partial Y|$ と表し，有効波数 $x_\nu \equiv k_{\nu X} / |\mathbf{r}_X|$, $y_\nu \equiv k_{\nu Y} / |\mathbf{r}_Y|$, $k_\nu^2 \equiv x_\nu^2 + y_\nu^2$ を定義した．また， $\zeta(\mathbf{R}') \equiv t_z \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ で定義した界面形状関数を周期関数列で $\zeta(\mathbf{R}') = \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_\mu f_\mu(\mathbf{R}')$ と展開してから，周期関数が三角関数の場合について，積和の公式 $f'_\nu f'_\mu = (f'_{\nu+\mu} + f'_{\nu-\mu})/2$ でまとめ直した (符号などは周期関数の定義に含める)．(17) の $\hat{G}_Z$ は，界面形状と磁場の波数の和または差のスペクトル成分が発生するという，非線形なモード結合を表している．

(17)を用いると、一様鉛直磁場のもとでの線形調和解析 (4節) における線形磁場を再導出したり、高次の項を求めることが容易にできる。

鉛直磁場を一様とすれば、 $\nu = 0$ である。また、界面形状モードの対称性から、 $k_{-\mu} = k_{\mu}$, $f_{-\mu} = f_{\mu}$ が使える。これらによりまず、

$$\hat{G}_Z[f_{\nu}(\mathbf{R}')] = -\frac{1}{P} \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_{\mu} k_{\mu} f_{\mu}. \quad (18)$$

次に、次節で扱う場合のように、界面形状のモードが単一であったり、全てのモードで有効波数の大きさが等しい ($k_{\mu} = k$) ときは、 $\zeta = \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_{\mu}$ より、

$$\hat{G}_Z[f_{\nu}(\mathbf{R}')] = -\frac{k\zeta}{P} \quad (19)$$

となり、 $\nu = 0$ なる f_{ν} に対する $\hat{G}_Z$ の演算は、単に $-k\zeta/P$ をかけることになってしまう。一方、 $\hat{G}_{X,Y}$ の演算は、 X, Y についての微分である。

ここで、(1) から界面磁場の誘導場を導く。界面変形が微小で $|k\zeta| \ll 1$ 、また $M/P < 1$ より $M\hat{G}_Z$ は小さな量になる。さらに、一様鉛直磁場の場合、 $\tilde{h}_Z = -Mb_Z^0 = -M_n/2$ も近似的に一様になる。これらを (1) に用いれば、

$$\begin{aligned} b_Z^1 &\simeq \hat{G}_Z(1 - M\hat{G}_Z)\tilde{h}_Z \simeq \hat{G}_Z\tilde{h}_Z \simeq \frac{k\zeta}{P} \frac{M_n}{2}, \\ h_X^1 &\simeq \hat{G}_X(1 - M\hat{G}_Z)\tilde{h}_Z = -M\hat{G}_X\hat{G}_Z\tilde{h}_Z = -\frac{M}{P} \frac{1}{|\mathbf{r}_X|} \frac{\partial \zeta}{\partial X} \frac{M_n}{2}, \\ h_Y^1 &\simeq \hat{G}_Y(1 - M\hat{G}_Z)\tilde{h}_Z = -M\hat{G}_Y\hat{G}_Z\tilde{h}_Z = -\frac{M}{P} \frac{1}{|\mathbf{r}_Y|} \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \frac{M_n}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 b_Z^1 は線形調和解析の線形磁場と同じもので、界面変形 ζ に比例する。 $|k\zeta| \ll 1$ でないときは、 $\hat{G}_Z$ による多重演算のため、界面磁場には界面形状に与えた以外のモード成分が多数生じる。一方、 $h_{X,Y}^1$ は M について2次のオーダーで、これは線形調和解析には現れない。これらの量を $b_Z^0 = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0 / P = H_0 / P$, $h_{X,Y}^0 = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0 = H_0 \partial \zeta / \partial X, H_0 \partial \zeta / \partial Y$ に加えて、全界面磁場が求められる。

9 数値解析と理論解析の比較

本節では、水平界面に単一モードの2次元界面形状または六角格子状の変

形を与えて一様な鉛直磁場を印加した場合に、界面応力の応答、勾配行列の固有値の印加磁場強度に対する依存性、界面変位の大きさと印加磁場強度の分岐図式を数値的に求め、理論解析の結果と比較する。ここで磁性流体は、密度 $\rho=1.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 、表面張力係数 $\gamma=2.6 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$ 、比透磁率 $\mu_1/\mu_0=1.40$ ($\mu_2/\mu_0=1.00$, $\mu_0=4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$) とした。これらと (12) より、臨界波数 $k_c=6.14 \times 10^2 \text{ m}^{-1}$ (臨界波長 $\lambda_c=1.02 \times 10^{-2} \text{ m}$)、臨界磁場強度 $H_c=1.98 \times 10^4 \text{ A/m}$ (磁気圧 $9.77 \times 10^{-3} \text{ mH}_2\text{O}$) が得られる。

9.1 2次元界面形状の場合

臨界波長 λ_c の数倍程度に系の水平長 $h_0=5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ を選ぶ。 $k_0=\pi/h_0$ を基本波数、 n_μ ($0 \leq n_\mu \leq M=36$) を偶数として、波数 $k_\mu=n_\mu k_0$ と振幅 v_0 ($0.2 \times 10^{-4} \text{ m} \leq v_0 \leq 5.0 \times 10^{-4} \text{ m}$) を持つ単一モードの界面変形を与える。

Fig. 2 では、強度 $H_0=H_c$ の一様鉛直磁場のもとで、界面形状の波数 k_μ を変えながら、5節に述べた界面応力和の応答 R_μ を、線形調和解析による線形分散関係と比較している。ここではまた、界面磁束密度 b_z^1 も較べている。界面変位の小さい(1)では数値解析を表す点は線形調和解析の線によく乗っているが、(2)では数値解析の点は理論解析の線より上方へずれている。界面変位が大きくなると、界面形状と磁場の非線形モード結合のため、誘導界面磁場では k_μ 以外のスペクトル成分が成長し、これが波数 k_μ での界面磁場と磁気応力差を弱める。磁気応力差は、線形分散関係において、重力ポテンシャル・表面張力とは逆符号に応力和を引き下げている。したがって、Fig. 2 で数値解析の点は上方へずれることになる。

Fig. 3(a) は、界面変形の波数を臨界波数付近に固定した上で、印加磁場強度 H_0 を増やすとき、勾配行列 H の最小固有値 h が減少していく様子を示している。 h は v_0 が大きいほど大きいので、臨界磁場強度 H_c も大きくなる。したがって、7節に述べた方法で (H_0, v_0) 面内に描いた分岐の枝は、Fig. 3(b) に示すように超臨界分岐になる。

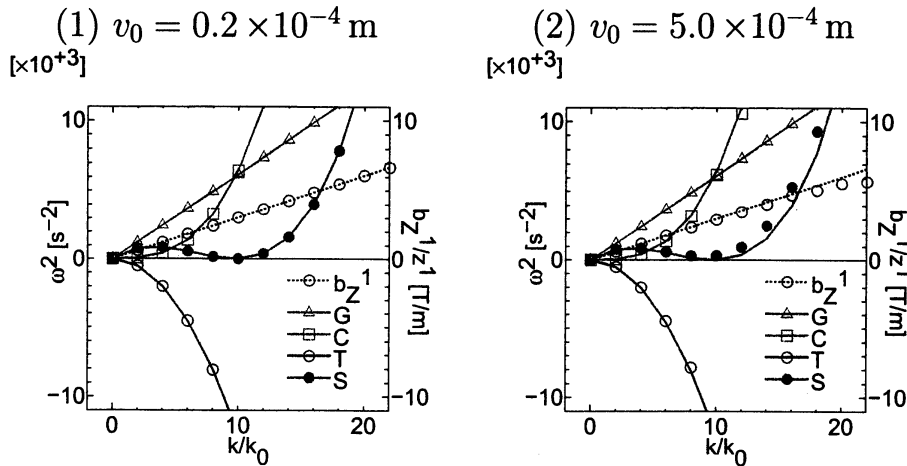


Fig. 2: Comparison of the interface stress response R_μ and the induced part of the normal magnetic flux $b_Z^1/\tilde{z}_\mu^1$ in the wavenumber space between the numerical analysis (dots) and the linear harmonic analysis (lines).

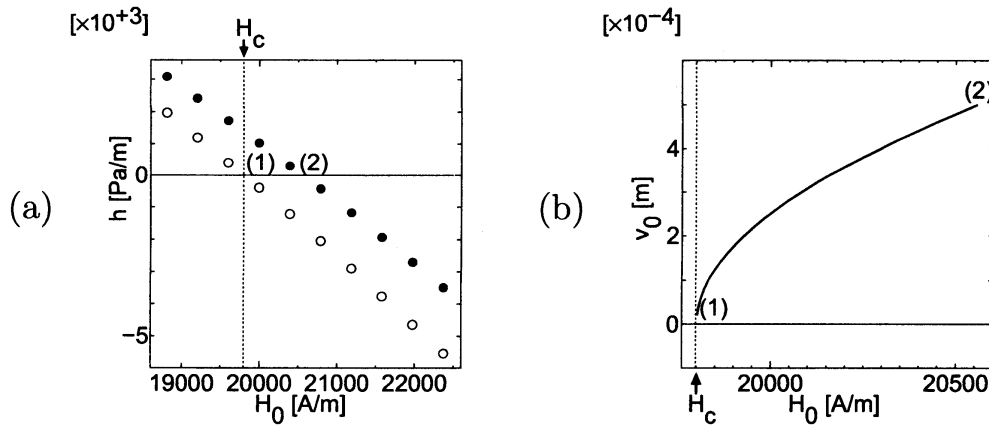


Fig. 3: Case of two-dimensional interface profile. (a) Dependence of the smallest eigenvalue h of H on the intensity of the applied magnetic field H_0 for (1) $v_0=0.2 \times 10^{-4}$ m (open circle) and (2) $v_0=5.0 \times 10^{-4}$ m (closed circle). (b) Branch line in the bifurcation diagram of (H_0, v_0) .

9.2 六角格子界面形状の場合

Fig. 4(a) に示す六角格子状の界面変形は、

$$z^1(X, Y) = v_0 \left\{ \cos \frac{(X - \sqrt{3}Y)\pi}{\sqrt{3}h_0} + \cos \frac{(X + \sqrt{3}Y)\pi}{\sqrt{3}h_0} + \cos \frac{2X\pi}{\sqrt{3}h_0} \right\} \quad (21)$$

で与えることができる。ただし、 v_0, h_0 は鉛直および水平スケール因子である。 (21) は、(13) における界面変位の展開 $z^1(\mathbf{R}) = \sum_{\mu=1}^3 \tilde{z}_{S\mu}^1 \cos \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}$ にお

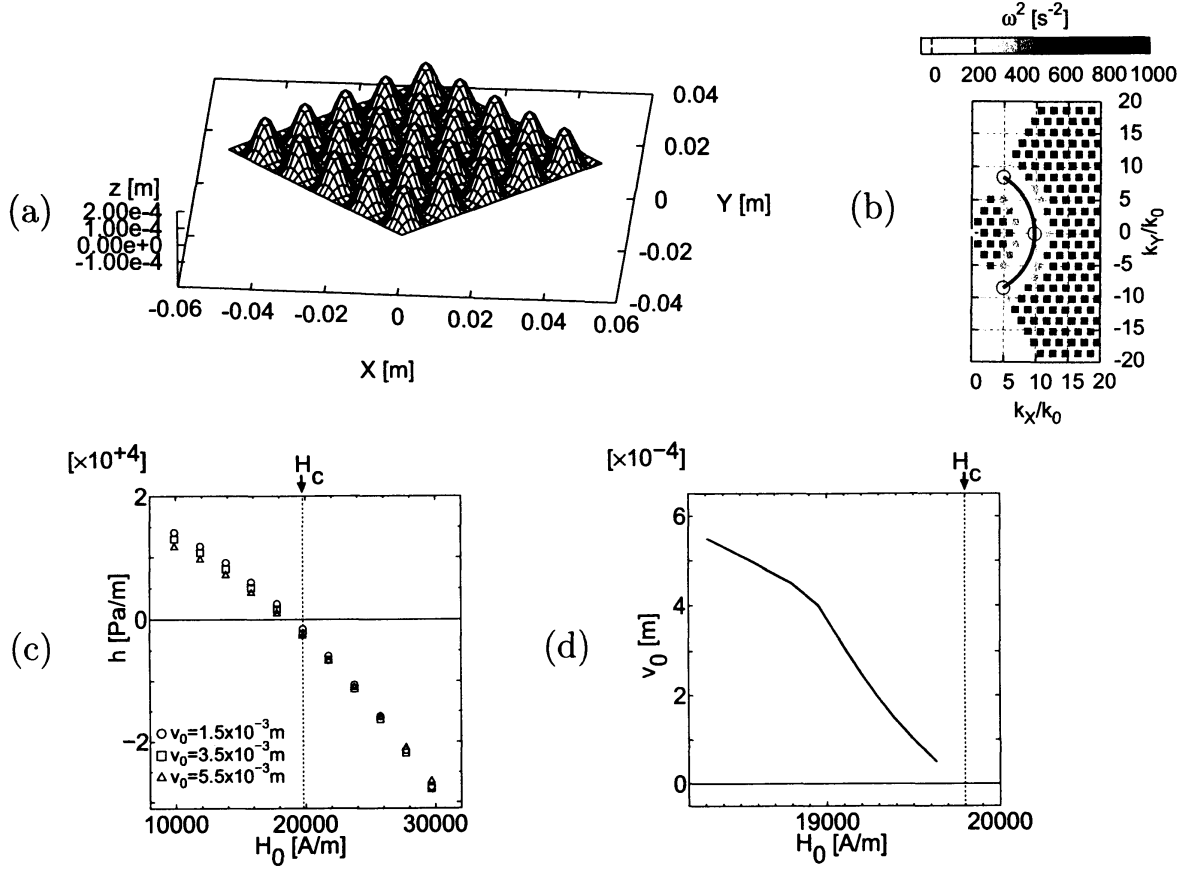


Fig. 4: Case of interface profile with hexagonal lattice. (a) Interface profile. (b) Linear dispersion relation (shaded squares), critical wavenumber (curve) and spectral components for interface profile (circles). (c) Dependence of the smallest eigenvalue h of H on the intensity of the applied magnetic field H_0 for $v_0 = 1.5 \times 10^{-3}$ m (circle), 3.5×10^{-3} m (square) and 5.5×10^{-3} m (triangle). (d) Branch line in the bifurcation diagram of (H_0, v_0) .

いて、逆格子ベクトルを

$$\mathbf{A} = \frac{(\hat{X} - \sqrt{3}\hat{Y})\pi}{2\sqrt{3}h_0}, \quad \mathbf{B} = \frac{(\hat{X} + \sqrt{3}\hat{Y})\pi}{2\sqrt{3}h_0} \quad (22)$$

として ($\hat{X}, \hat{Y}$ は直交単位ベクトル), 波数ベクトルを $\mathbf{k}_1 = 2\mathbf{A} + 0\mathbf{B}$, $\mathbf{k}_2 = 0\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, $\mathbf{k}_3 = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, 振幅を $\tilde{z}_{S1}^1 = \tilde{z}_{S2}^1 = \tilde{z}_{S3}^1 = v_0$ とする場合にあたる.

3つの波数ベクトルの大きさは等しく $2\pi/\sqrt{3}h_0$ である. このため, 界面応力の線形化 (10), 線形磁場 (20) から導かれるように, 六角格子界面形状でも波数ベクトルの大きさに関する線形分散関係は, 2次元界面形状の場合と同じく, (11) になる. Fig. 4(b) には, この分散関係を濃淡をつけた四角点で示した. このときの磁場強度は, Fig. 2 と同じく, 臨界磁場強度

$H_c = 1.98 \times 10^4$ A/m とした. $\omega^2 = 0$ となる臨界波数の大きさ $k_c = 6.14 \times 10^2 \text{ m}^{-1}$ は円弧で示している. この後の結果では, 丸点で示すように, $k_{1,2,3}$ の大きさを k_c に一致させている.

3つのモードに対応して勾配行列 H の固有値も3つあるが, どのモードでも振幅は同様に变化させているため, 3つの固有値はほとんど一致する. Fig. 4(c) は, いくつかの v_0 について, 印加磁場強度 H_0 の増加と共に最小固有値 h が減少していく様子を示している. 2次元界面形状の場合とは異なり, $h = 0$ となる H_0 は臨界磁場強度 H_c より下に来る.

Fig. 4(d) には, (H_0, v_0) 面内に描いた分岐の枝を示す. これもやはり2次元界面形状の場合とは異なり, v_0 が大きいほど H_0 が下がる. このような亜臨界分岐は, [3] にも述べられているとおり, 一様界面と六角格子界面形状の間での, 履歴を伴う安定性分岐を引き起こす.

10 まとめと今後の課題

磁性流体自由表面における諸現象を数値的に解析するため, これまで, 実空間を分割する代わりに, 界面物理量を周期関数列に展開する方法に基づいて, 界面磁場解析・界面力学方程式・展開係数間の関係・勾配行列などを開発してきた. 特に界面磁場解析では, 任意の界面形状・印加磁場分布で, 調和性と界面条件を厳密に満たす界面磁場を効率的に求めることが可能である.

2次元単一モード形状または六角格子状の界面に一様な鉛直磁場を印加するとき, 界面応力の応答を線形調和解析から求めた線形波動の分散関係と比較したり, 界面変位の大きさごとに勾配行列の固有値を0とする印加磁場強度を求め, 一様界面と六角格子状界面などとの間の安定性の遷移を表す分岐図式を描いた.

本解析では, 3次元 Hilbert 変換演算子の役割を明らかにしながら線形調和解析の線形磁場を再導出するなど, 従来の理論解析との関係を容易に調べることができる. 一方, もっと現実近く, 印加磁場が一様でなかったり水平成分を持つ場合も扱えるが, 当分, 本稿の一様な鉛直磁場の場合につい

て、界面磁場・界面応力の実空間分布と波数空間分布を詳しく調べながら、界面変位の大きさを上げてても数値的な問題が生じていないことを確認する。

参考文献

- [1] M.D.Cowley and R.E.Rosensweig: The interfacial stability of a ferromagnetic fluid; *J. Fluid. Mech.*, **30**(4), p.671 (1967).
- [2] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge), Chap.7 (1985).
- [3] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field; *J. Fluid Mech.*, **82**(3), p.401 (1977).
- [4] 水田 洋: 界面形状と界面磁場の相互関係を用いた磁性流体自由表面解析; 日本流体力学会年会 2007講演要旨集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai2007/cd-rom/index.html>), 2-3-5-1 (2007).
- [5] Y.Mizuta: Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid; *Magnetohydrodynamics*, **44**(2), p.155 (2008).
- [6] 水田 洋: 磁性流体 3次元定常自由表面形状の決定過程; 日本流体力学会年会 2008拡張要旨集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai2008/cd-rom/index.html>) (2008).
- [7] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge), Chap.4, Chap.5 (1985).
- [8] 水田 洋: 磁性流体表面における界面形状変化の影響; 磁性流体連合講演会講演論文集, **22**, p.48 (2008).
- [9] 水田 洋: 汎用解析による磁性流体界面安定性の検証: 水平界面の場合; 日本流体力学会年会 2009拡張要旨集, 34034 (2009).