

Weighted Dynkin diagrams and nilpotent orbits of a graded semisimple Lie algebra

阪大・理 川中宣明 (Noriaki Kawanaka)

§1. 問題. G を, 代数的閉体 K 上の連結な半単純代数群とし, $\mathfrak{g}$ をその Lie 環, $\text{Lie } G$, とする. K 上の対角化可能群 D が G に代数群の自己同型として作用している, とする. $X(D)$ を D の指標加群 $\text{Hom}_{\text{alg}}(D, K^\times)$ とすると, $\mathfrak{g}$ の $X(D)$ -gradation

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in X(D)} \mathfrak{g}(\lambda), \quad \mathfrak{g}(\lambda) = \{X \in \mathfrak{g}; d \cdot X = \lambda(d)X, \forall d \in D\}$$

が得られる. (一般に, 加群 M に関する Lie 環 $\mathfrak{g}$ の M -gradation とは, $\mathfrak{g}$ の linear subspaces への直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in M} \mathfrak{g}(m)$$

で, 条件

$$[\mathfrak{g}(l), \mathfrak{g}(m)] \subset \mathfrak{g}(l+m), \quad l, m \in M$$

を, 満たすもののことである.) $G(0)$ を部分 Lie 環 $\mathfrak{g}(0)$ に対応する連結な reductive 部分群 ($\subset G$) とすると, $G(0)$ は $\mathfrak{g}(\lambda)$ に adjoint-action により作用する. この状況のも

とて, $G(0)$ -軌道 $G(0) \cdot A$, 固定化群 $Z_{G(0)}(A)$, $A \in \mathfrak{g}(\lambda)$, の記述を与えることを, 問題にする. D -作用が自明な場合と同様に, $A \in \mathfrak{g}(\lambda)$ の Jordan 分解を考えることにより, 問題を, A が半単純な場合と中零な場合の2つに分けて考えることができる. 半単純軌道については, Vinberg の研究 [1] がある. Vinberg [2], [3] は, 中零な場合も扱っている. ここでは, 少し違った方法で中零軌道を, 調べてみたい. 基本的な方針は, D -作用が自明な場合への帰着である. その場合には, Dynkin, Kostant, Springer, Steinberg, Elashvili, Alekseevsky, Mizuno ... 等の詳しい研究のお蔭で, 中零元の軌道や固定化群について, 非常に多くの情報が手に入る. それらの情報が, そっくりそのまま利用できて, 一般の D -作用の場合の $(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ についても, 中零元の軌道や固定化群について, D -作用が自明な場合と同程度に詳しいことが, わかる, というのが, 我々の結論である.

この問題に興味を持つ理由, 他分野との関連などについて述べる. まず, 次の一般的な結果がある.

定理 (Richardson [4]) $(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ の中零軌道は, 有限個である.

特に D がトーラス $(\cong (k^\times)^n)$ のときは, $\mathfrak{g}(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, の

任意の元が中零になる. 従って, このとき, $(G(10), \mathfrak{g}(\lambda))$ は, 概均質ベクトル空間になる [5], [6], [7]. $K = \mathbb{C}$ で D が $\mathfrak{g}$ の実形式の Cartan 対合から生成されるとき, $(G(10), \mathfrak{g}(\lambda))$, $\lambda \neq 0$, の中零軌道は, 実 Lie 環 $\mathfrak{g}_R$ の中零軌道と (Cayley 変換, を通して) 1対1に対応する, という Kostant-関口 [8] の結果により, 我々の結果は, 実半単純 Lie 環の中零軌道の分類をも与えていることになる. 代数的組み合わせ論との関係も予想される ([9; p.297]). 筆者自身が, この問題 (D が 1次元トーラスの場合) に興味を持つに至ったきっかけは, generalized Gelfand-Graev 表現 ([10]–[12]) の研究であった.

§2. 重みつき Dynkin 図形. Σ を抽象ルート系, Π をその単純ルート系とし,

$$H(\Sigma, \Pi) = \{ f: \Pi \rightarrow \mathbb{Z} \},$$

$$H(\Sigma, \Pi)_+ = \{ f \in H(\Sigma, \Pi); f(\alpha) \geq 0, \alpha \in \Pi \}$$

と置く. $H(\Sigma, \Pi)$ の元を, 「重みつき Dynkin 図形」と呼ぶ. $h \in H(\Sigma, \Pi)$ に対して, Weyl 群 $W(\Sigma)$ の元 w を適当にとれば $h_+ = h \circ w \in H(\Sigma, \Pi)_+$ とできる. このような h_+ が h により一意的に定まることに注意する. さて, Σ を, 複素半単純代数群 G の極大トーラス T に関するルート系とすると, $h \in H(\Sigma, \Pi)$ は, $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$ -gradation

$$(*)_h: \begin{cases} \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)_h, \\ \mathfrak{g}(i)_h = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in \Sigma, h(\alpha)=i} \mathfrak{g}_\alpha & (i \neq 0) \\ \text{Lie } T \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Sigma, h(\alpha)=0} \mathfrak{g}_\alpha \right) & (i=0) \end{cases} \end{cases}$$

を与える。(但し, $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Sigma$) は $\mathfrak{g}$ のルート部分空間とし, 各 $h \in H(\Sigma, \Pi)$ は, 線型に拡張することにより $h: \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$ と見做す。) 逆に, $\mathfrak{g}$ の任意の $\mathbb{Z}$ -gradation は, 適当な極大トーラスを選ぶことにより $(*)_h$ の形に書けることがわかる。従って, h_+ の定義の所で述べたことにより,

補題. $H(\Sigma, \Pi)_+ \ni h \longmapsto (*)_h \in \{\mathfrak{g} \text{ の } \mathbb{Z}\text{-gradation の } G\text{-共役類}\}$ なる対応は bijection である。

§3. D-作用が自明な場合 (Dynkin-Kostant 理論). やはり, $G, \mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上で考えておく. $\mathfrak{g}$ の中零軌道の研究には, 次の Jacobson-Morozov および Dynkin の定理が基本的である。

定理 (Jacobson-Morozov). N を $\mathfrak{g}$ の中零元とすると Lie 環の準同型 $f_N: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}$ で $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto N$ となるものが存在し, $\mathbb{Z}_G(N)$ -共役を除き一意である。

このとき $H_N = H = f_N \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ を N の characteristic とする。

定理 (Dynkin). $\mathfrak{g}$ の 2 つの中零元が共役であるための必要十分条件は、それらの characteristics が共役であることである。

H をある中零元の characteristic とする。次のようにして $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$ -gradation (Dynkin-Kostant gradation) が作れる:

$$(*)_H: \begin{cases} \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{(i)}_H, \\ \mathfrak{g}^{(i)}_H = \{ X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = iX \}. \end{cases}$$

このとき, Dynkin の定理は、次のように言い換えられる:

「 N, N' を中零元, H, H' をそれらの characteristic とする。 N と N' が共役となる必要十分条件は、2 つの $\mathbb{Z}$ -gradation $(*)_H$ と $(*)_{H'}$ が共役であること。」

従って §1 の補題により, $\mathfrak{g}$ の中零軌道の全体と bijective に対応するような $H(\Sigma, \Pi)_{nil} (\subset H(\Sigma, \Pi)_+)$ が存在する。 $H(\Sigma, \Pi)_{nil}$ は、すべて具体的に決定されている ([13; 13.1]).

定理. K, G を §1 の通りとし, $p = \text{char}(K)$ は、 G に関し、"good" ([4; I, 4.3]) である, とする。 T を G の極大トーラスとし, Σ を G の T に関するルート系とする。 $h \in H(\Sigma, \Pi)_{nil}$ に対し, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ の $\mathbb{Z}$ -gradation $(*)_h$ を考える。

$G(0)_h$ を $g(0)_h$ に対応する連結 reductive 部分群 ($\subset G$) とする.

(i) $(G(0)_h, g(2)_h)$ は open, dense な軌道 $\mathcal{O}_h$ を持つ. $N_h \in \mathcal{O}_h$ とする.

(ii) $h \rightarrow G \cdot N_h = G \cdot \mathcal{O}_h$ は $H(\Sigma, \Pi)_{\text{nil}}$ から g の中零軌道全体への bijection.

(iii) $\mathcal{U}_h$ を $\bigoplus_{i \geq 1} g(i)_h$ に対応する中単部分群とすると,

$$Z_G(N_h) = Z_{G(0)_h}(N_h) Z_{\mathcal{U}_h}(N_h) \quad (\text{semi-direct product})$$

かつ, $Z_{\mathcal{U}_h}(N_h), Z_{G(0)_h}(N_h)$ は、それぞれ左辺の中単根基, reductive 部分群である. 特に $Z_G(N_h) \subset G(0)_h \mathcal{U}_h$.

注意 1. $p=0$ のとき, この定理は Dynkin と Kostant による. $p>0$ で, G が classical groups のときは, Springer と Steinberg [14], G が E_6, E_7, E_8 型のときは, 水野 [15] が調べた.

注意 2. $Z_{G(0)_h}(N_h)$ の具体的構造は, 分かっている.

(Alekseevsky [16], 水野 [15], Springer-Steinberg [14])

注意 3. $\mathcal{O}_h$ の代表元 N_h のとり方は, 具体的に分かっている.

注意 4. p が good という条件は, 落とせない.

§4. 一般の D -作用の場合. $G, \mathfrak{g}, D$ は, 最初, $\mathbb{C}$ 上で考え, §3 と平行して話を進める.

定理 (Jacobson-Morozov の定理の一般化). $\lambda \in X(D)$ とし, N を $\mathfrak{g}(\lambda)$ の中零元とする. このとき, Lie 環の準同型: $f_N: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}$ で, $f_N\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = N$, $f_N\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(0)$, $f_N\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ となるものが存在し $\Sigma_{G(0)}(N)$ -共役を除き一意である.

このとき $H_N = H = f_N\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ を, N の normalized characteristic と呼ぶ.

定理 (Dynkin の定理の一般化). $\mathfrak{g}(\lambda)$ の 2 つの中零元が $G(0)$ -共役であるための必要十分条件は, それらの normalized characteristics が $G(0)$ -共役であることである.

従って, $\mathfrak{g}(\lambda)$ の中零軌道の全体から, $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$ -gradations の $G(0)$ -共役類全体の中への injection が存在する. この像を, 記述することを考える. G は, D -stable な極大トーラス T を持つこと, $T \cap G(0)$ は, $G(0)$ の極大トーラスとなることが知られている. 従って, Σ を T に関する G のルート系, $W(G(0))$ を, $G(0) \cap T$ に関する $G(0)$ の Weyl 群とすると,

$$\{\mathfrak{g} \text{ の } \mathbb{Z}\text{-gradation}\} / \sim_{G(0)} \xleftrightarrow{1 \leftrightarrow 1} H(\Sigma, \Pi) / \sim_{W(G(0))}.$$

ここまでは、まとめると次のようになる。 $\mathfrak{g}(\lambda)$ の中零元 N の normalized characteristic H を、使、て $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$ -gradation $(*)_H$ を、作る。 $h \in H(\Sigma, \Pi)$ を、 $(*)_H = (*)_h$ とするよう、に、とると、 h は modulo $(h \rightarrow h \circ w, w \in W(G(0)))$ を除いて、一意的に決まる、という訳である。後は、このようにして得られた h を特徴づければよい。まず、 H が中零元の characteristic であることから

$$(i) \quad h = k \circ w, \quad k \in H(\Sigma, \Pi)_{\text{nil}}, \quad w \in W(\Sigma)/W(G(0)).$$

また、 H が normalized, i.e. $H \in \mathfrak{g}(0)$, であることから

$$(ii) \quad h \text{ は } D\text{-invariant.}$$

である。(D が Σ に作用すること、従、て $H(\Sigma, \Pi)$ に作用すること、に注意する。 D が トーラス のとき、この作用は、自明なものになってしまう。) さて (ii) を満たす $h \in H(\Sigma, \Pi)$ に対しては、

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\substack{\mu \in X(D) \\ i \in \mathbb{Z}}} (\mathfrak{g}(\mu) \cap \mathfrak{g}(i)_h)$$

となり、これは $\mathfrak{g}$ の $(X(D) \oplus \mathbb{Z})$ -gradation を与える。この「対角線部分」を、抜き出して、

$$(*)_{\lambda, h} \quad \bar{\mathfrak{g}}_{\lambda, h} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_{\lambda, h}(i), \quad \bar{\mathfrak{g}}_{\lambda, h}(i) = \begin{cases} \mathfrak{g}((\frac{1}{2})\lambda) \cap \mathfrak{g}(i)_h, & \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \\ \{0\}, & \text{その他} \end{cases}$$

と置くと、明きらかた、 $\bar{\mathfrak{g}}_{\lambda, h}$ は reductive な部分環で、

$\{\bar{g}_{\lambda,h}(i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ は、その $\mathbb{Z}$ -gradation を与える。もし、 $(*)_H = (*)_h$ となるなら、 h は次の条件を満たさなければならない。

- (iii) $(*)_{\lambda,h}$ は、 $\bar{g}_{\lambda,h}$ の Dynkin-Koetant gradation.
- (iv) S_h を、 T の 1次元部分トーラスで、その作用により得られる $\mathfrak{g}$ の gradation が $(*)_h$ と一致するようなものとする。また $\bar{G}_{\lambda,h}$ を $\bar{g}_{\lambda,h}$ に対応する連結 reductive 部分群 ($\subset G$) とする。 S_h は $\bar{G}_{\lambda,h}$ の半単純部分 $[\bar{G}_{\lambda,h}, \bar{G}_{\lambda,h}]$ に含まれる。

実は、条件 (i) - (iv) が、我々の求むる条件であることがわかる。即ち

$H(\Sigma, \Pi, \lambda)_{nil} = \{h \in H(\Sigma, \Pi) \mid (i) \sim (iv)\}$
と置けば、 $(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ の中零軌道全体と $H(\Sigma, \Pi, \lambda)_{nil}$ が 1対1 に対応することがわかる。 $H(\Sigma, \Pi, \lambda)_{nil}$ は、 p が good であれば、意味を持つことに注意する。

定理. K, G, D を、§1 の通りとし、 $p = \text{char}(K)$ は、 G に関し good であるとする。 T を G の D -stable な極大トーラスとし、 Σ を G の T に関するルート系とする。
 $\lambda \in X(D)$, $h \in H(\Sigma, \Pi, \lambda)_{nil}$ とする。条件 (iii) より $\bar{g}_{\lambda,h}(2)$ の $\bar{G}_{\lambda,h}(0)$ -軌道 $\alpha_{\lambda,h}$ で open, dense なものが

存在する. $N_{\lambda,h} \in \mathcal{O}_{\lambda,h}$ とする.

(i) $h \mapsto G(0) \cdot N_{\lambda,h}$ は $H(\Sigma, \Pi, \lambda)_{\text{nil}}$ から, $(G(0), g(\lambda))$ の中零軌道全体への bijection である.

$$(ii) \quad Z_{G(0)}(N_{\lambda,h}) = Z_{\bar{G}(0)_{\lambda,h}}(N_{\lambda,h}) \cdot Z_{G(0) \cap \bar{U}_h}(N_{\lambda,h})$$

(semi-direct product),

で, $Z_{G(0) \cap \bar{U}_h}(N_{\lambda,h})$, $Z_{\bar{G}(0)_{\lambda,h}}(N_{\lambda,h})$ は, それぞれ, 左辺の中単根基, および reductive 部分群である.

注意1. D -作用が自明な場合 (§3) の注意2 から $Z_{\bar{G}(0)_{\lambda,h}}(N_{\lambda,h})$ の構造がわかる. また, $\dim Z_{G(0)}(N_{\lambda,h}) = \sum_{i \geq 0} \dim g(0) \cap g(i)_h - \sum_{i \geq 2} \dim g(1) \cap g(i)_h$ である.

注意2. やはり, §3 の注意3 から, 代表 $N_{\lambda,h} \in \mathcal{O}_{\lambda,h}$ は, 具体的に選ぶことができる.

注意3. 上の定理は, $(G(0), g(\lambda))$ の中零軌道の決定と中零元 N の固定化群 $Z_{G(0)}(N)$ (の reductive 部分, と次元) の決定についての, 十分に実行可能なアルゴリズムを与えている.

さらに詳しいことについては文献表の [17] を見て頂ければ幸いです.

文 献

- [1] Vinberg, E. B., The Weyl group of a graded Lie algebra, Math. USSR-Izv. 10 (1976), 463-495
- [2] ———, On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras, Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 1517-1520.
- [3] ———, Classification of homogeneous nilpotent elements of semisimple graded Lie algebras, (ロシア言語), Trudy Seminar vector & tensor analysis 19 (1979), 155-177.
(英訳も Selecta Math. Sovietica 8:3 近く出てくる.)
- [4] Richardson, R.W., Finiteness theorems for orbits of algebraic groups, Indag. Math. 88 (1985), 337-344.
- [5] Sato, M. and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100 (1974), 131-170.
- [6] Sato, M. and T. Kimura, A classification of irred. prehomogeneous vector spaces..., Nagoya Math. J. 65 (1979), 1-155.
- [7] Kimura, T., S. Kasai, and O. Yasukura, A classification of the repr. of red. alg. gps..., Amer. J. Math. 108 (1986), 643-692.
- [8] Sekiguchi, J., Remarks on nilpotent orbits of a symmetric pair, J. Math. Soc. Japan 39 (1987), 127-138.

- [9] Bannai, E., and T. Ito, Current research on algebraic combinatorics, *Graphs and combinatorics* 2 (1986), 287-308.
- [10] Kawanaka, N., Generalized Gelfand-Graev repr. and Enada duality, *Alg. Groups and Related Topics*, Kinokuniya, 1985, pp.
- [11] ———, Generalized Gelfand-Graev repr. of exceptional simple alg. gps -I, *Invent. Math.* 84 (1986), 575-616.
- [12] ———, Shintani lifting and Gelfand-Graev repr., to appear in *Proc. Symp. Pure Math.*
- [13] Carter, R., *Finite Groups of Lie Type: Conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, 1985.
- [14] Springer, T. and R. Steinberg, *Conjugacy classes*, Part E in Springer L.N.M. vol. 131, 1970.
- [15] Mizuno, K., The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7, E_8 , *Tohoku J. Math.* 3 (1980), 391-459.
- [16] Alekseevsky, A.V., Component groups of centralizer for unipotent elem. --- (ロシア語), *Trudy Tbiliss. Math. Inst.* 62 (1979), 5-27.
- [17] Kawanaka, N., Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a graded semisimple Lie algebra, preprint,