

Mathematica を活用した中学生に対する数学教育支援

日本大学・理工学部 荒井 裕明 (Hiroaki Arai)

藤井利江子 (Rieko Fujii)

戸塚 英臣 (Hideomi Totsuka)

鈴木 潔光 (Kiyomitsu Suzuki)

College of Science and Technology,
Nihon University

1 はじめに

本稿では、都内の私立中学校の生徒に対して実践した Mathematica を活用した数学教育について報告する。昨今は中学校においても電子黒板が普及し始めている。この電子黒板を有効に利用した数学教育コンテンツの作成は、今後重要な研究課題になると考えられる。コンテンツを利用するには市販の教材を購入する方法もあるが、問題を差し替えたり、図やグラフ等をカスタマイズしたりすることは難しい。また、Java 等のプログラミング手法を用いて教員が自作する場合には、カスタマイズは可能であるが、プログラミングに多大な時間を要する。そこで、本研究で利用したのが Mathematica である。

Mathematica は単純なものであれば、1 行の命令でグラフを描画することができる。また解析解を求めることもでき、動画コンテンツも比較的容易に作成することができる。しかし Mathematica は高価なソフトウェアである。ただし Wolfram が無償提供しているプラグインである CDF Player を用いれば、ブラウザを介することにより、Mathematica で作成したコンテンツを閲覧することができる。すなわち Mathematica のライセンスは教員が 1 本所持していればよく、コンテンツをインターネットに公開しておけば、生徒は自宅においても自由に利用することができる。

本研究で作成したコンテンツは、①解説ページ、②動画等によるシミュレーションのページ、③確認テストのページ、という 3 部構成を基本としている。このうち本稿では、1 次関数および 2 次関数に関する授業において利用した、動画を用いたシミュレーションの紹介と、動画利用による教育効果に関する報告を行う。

2 1 次関数に関するコンテンツとその教育効果

本章では、電子教材を用いた 1 次関数に関する動画コンテンツの内容、およびその授業実践に関して記述する。この実践の目的は、「電子教材に対する生徒の反応」、「電子教材による教育効果」の 2 点を調査することである。

2.1 授業の概要

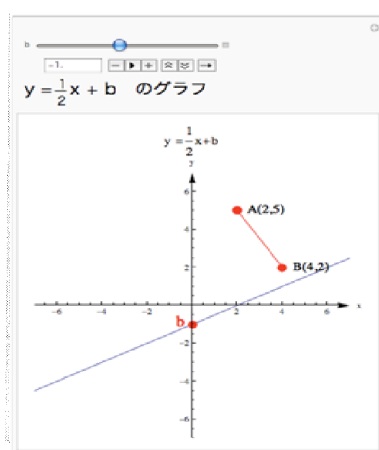
実践を行った学年は中学2年，単元は1次関数である．1学級を2つに分割した17人（男子5人，女子12人）のクラスと，16人（男子8人，女子8人）のクラスで行った．実践の目的は，1次関数とそのグラフの関係について，視覚的に理解を深めさせることである．すなわち1次関数の式に現れるパラメータを変化させることにより，グラフの概形を頭の中にイメージできるような実践を行った．以下，その概要について説明する．

2.2 1次関数に関するコンテンツとその教育実践

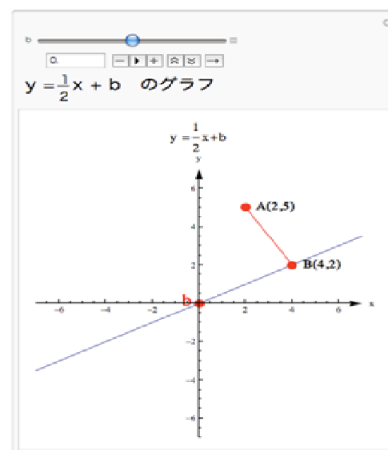
2.2.1 与えられた線分とグラフの y 切片の関係

以下の問題を視覚的に解けることを目的としたコンテンツを作成し，線分とグラフの y 切片との関係を理解させる実践を行った．作成した動画コンテンツを図2-1に示す．

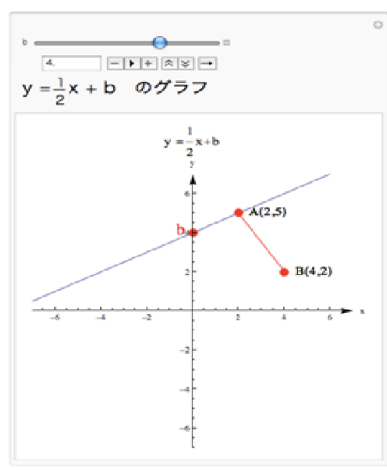
[問題] 2点 $A(2,5)$, $B(4,2)$ がある．直線 $y = \frac{1}{2}x + b$ のグラフが線分 AB と交わるように，定数 b の値の範囲を求めなさい．



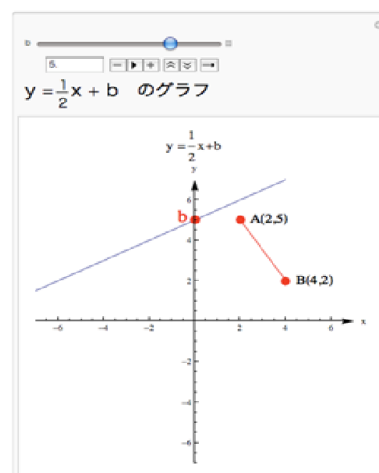
(a) 直線と線分は交わらない ($b = -1$)



(b) 点 B で直線と線分は交わる ($b = 0$)



(c) 点 A 直線と線分は交わる ($b = 4$)



(d) 直線と線分は交わらない ($b = 5$)

図2-1 直線 $y = \frac{1}{2}x + b$ と線分 AB の位置関係を表した動画コンテンツ

このコンテンツでは、スライダーを用いて b の値を変化させることができ、その値に対応したグラフが描画される。すなわち線分 AB と直線の位置関係の変化がイメージできるようにになっている。

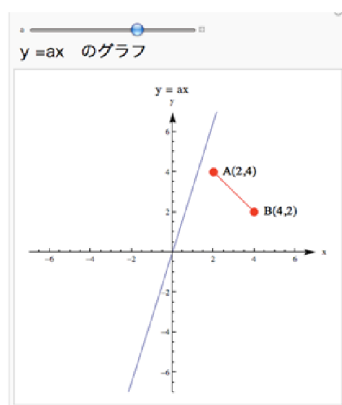
授業では、直線と線分 AB が交わったら「ストップ」と言うように生徒に指示し、 b の値を負の値から増加させていった。次に、直線と線分 AB が離れたら「ストップ」と言うように生徒に指示した。動画コンテンツを見る前、問題を解けるが直線と線分の位置関係についてイメージできていない生徒が多く、問題文の意味がそもそも分からない生徒すらいた。黒板を使って解説もしたが、イメージはわかかなかったようである。しかし、動画コンテンツを見せることで1次関数 $y = \frac{1}{2}x + b$ のグラフと線分 AB の位置関係について視覚的に理解することができたようである。

2.2.2 与えられた線分とグラフの傾きとの関係

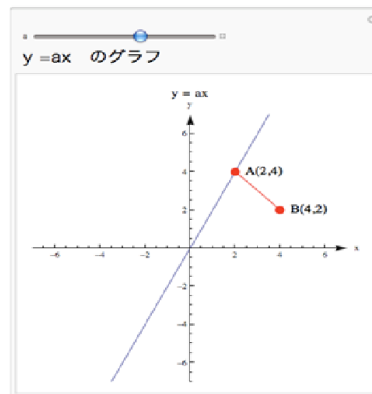
以下の問題を視覚的に解けることを目的としたコンテンツを作成し、線分とグラフの傾きとの関係を理解させる実践を行った。

[問題] 2点 A(2,4), B(4,2) がある。直線 $y = ax$ が線分 AB と交わるように、定数 a の値の範囲を求めなさい。

作成した動画コンテンツを図 2 - 2 に示す。このコンテンツでも、スライダーを用いて $y = ax$ に現れる定数 a の値を変化させることができ、その値に対応したグラフが描画される。この問題でも直線と線分 AB が交わったら「ストップ」と言うように生徒に指示し、 a の値を負の値から増加させていった。前節で与えられた線分とグラフの y 切片の関係と同様、コンテンツにより、生徒はグラフをイメージすることができたようである。



(a) 直線と線分が交わらない場合



(b) 点 A で直線と線分が交わっている場合

図 2 - 2 $y = ax$ のグラフと線分 AB の位置関係を表した動画コンテンツ

2.2.3 図形の上を動く点の視覚化

以下の問題を視覚的に解けることを目的としたコンテンツを作成し、長方形の上を点が移動する際の、時刻と図形の面積との関係を理解させる実践を行った。

[問題] $AB=8\text{cm}$, $AD=4\text{cm}$ の長方形 ABCD がある。2点 P, Q は頂点 B を同時に出発し、この長方形の辺上を頂点 C を通って頂点 D へ向かう。

P, Q の速さは、それぞれ毎秒 1cm, 毎秒 0.5cm である。長方形 ABCD の内部で、P, Q が出発してから x 秒後に線分 AP と AQ にはさまれた部分の面積を $y\text{cm}^2$ とする。P が D に到達した時点では Q は停止する。次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

(2) x と y の関係を表すグラフをかきなさい。

作成した動画コンテンツを図 2 - 3 に示す。これもスライダー機能を使い好きな時刻の点の位置を表示させることができ、またスタートボタン押すと点の移動の様子が動画で再生される。時刻によって、場合分けが必要になることを視覚的に理解できたようである。

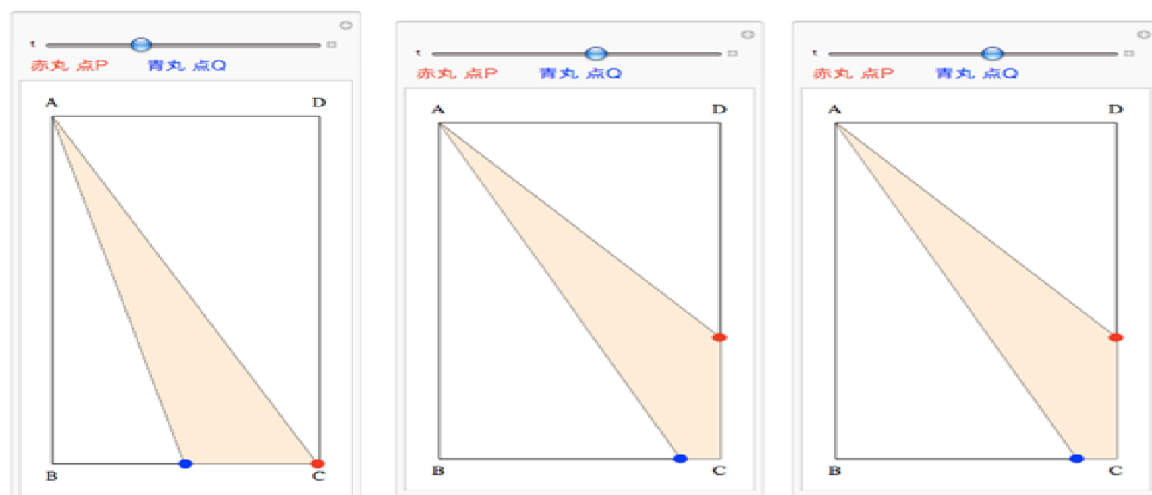


図 2 - 3 図形の上を動く点

2.2.4 教育効果

授業の後、内容が理解できているかを確認するため、簡単な試験を行った。今回の学習コンテンツを用いた目的は 1 次関数の式から、そのグラフの概形をイメージできるかどうかである。そこで以下の 2 つの問題によって、視覚的イメージがもてているかを調査した。

[問題 1] 傾き

1 次関数 $y = ax + b$ のグラフにおいて、傾き a の値が増加すると、グラフの傾きは急になりますか、緩やかになりますか。

[問題 2] 切片

1 次関数 $y = ax + b$ のグラフにおいて、切片 b の値が増加すると、グラフは y 軸の正の方向に移動しますか、負の方向に移動しますか。

授業を受けたのは 2 クラス合わせて 33 人。そのうち 24 人から回答を得た。問題 1 の正解者は解答者 24 人中 18 人、問題 2 の正解者は 24 人中 20 人であった。同程度の問題の過去の結果と比較すると、高い正答率を得ることができた。

この問題はパラメータが変化するとそのグラフがどのように変化するかを問う問題であるが、全員がグラフを描かずに解答した。多くの生徒が頭の中にグラフのイメージを描くことができるようになったと考えられる。

3 2次関数に関するコンテンツとその教育効果

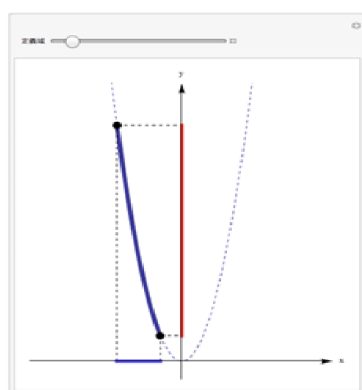
2章の実践では電子教材による教育効果があることがわかった。しかし、この実践では電子教材を活用した授業と活用しない通常の授業の比較をしていないため、はたして本当に電子教材を用いたことだけが生徒の理解が深まった原因かどうかは不明である。本章では2次関数の動画コンテンツを利用することにより、これを調査してみた。

3.1 授業の概要

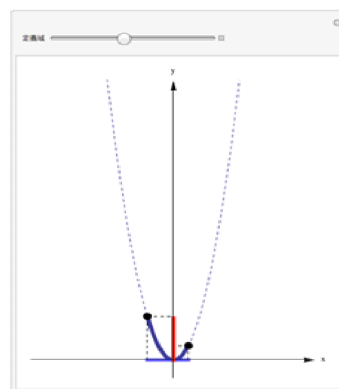
実践を行ったのは、2章と同じ中学校の2年生である。筆者の担当した2つのクラスのうち、片方（18人（男子0人、女子18人））のクラスでは電子教材を利用し、もう片方（19人（男子0人、女子19人））では利用しなかった。女子18人のクラスを仮にA組、女子19人のクラスを仮にB組とする。電子教材を用いた以外はA組、B組の授業に違いはない。この授業実践での目的は、電子教材を用いるか用いないかで教育効果に違いがあるかを確かめることである。

3.2 2次関数に関するコンテンツとその教育実践

2次関数の定義域・値域を理解させるために作成したコンテンツを図3-1に示す。これは定義域の変化にともない放物線 $y = ax^2$ の値域が変化するコンテンツである。この教材の目的は、与えられた定義域に対する放物線 $y = ax^2$ の値域を視覚的に理解させることである。スライダーを動かすと定義の値が変化し、 $y = ax^2$ のグラフの定義域が青の線、値域が赤の線が描画される。スライダーを使って定義域を変化させると、それに対応した値域が描画される。



(a) 定義域の端点の y の値が値域の端点の値になる場合



(b) 定義域の端点の y の値が値域の端点の値にならない場合

図3-1 $y = ax^2$ の定義域と値域

実践では関数 $y = ax^2$ の定義域、値域についてこのコンテンツを用いて考えさせた。関数 $y = ax^2$ の定義域、値域は1次関数の場合とは異なり、定義域の端点の y の値が値域の端点の値になるとは限らない。ここでは関数 $y = ax^2$ のグラフのイメージをもって問題を解けるように実践した。定義域に頂点を含む場合は、定義域の端点の y の値が値域の端点の値にならないことを確認させた。また、定義域に頂点を含まない場合は、定義域の端点の y の値が値域の端点の値になることを確認させた。

試験の A 組, B 組の正答率を図 3 - 3 (上段 A 組, 下段 B 組) に示す.

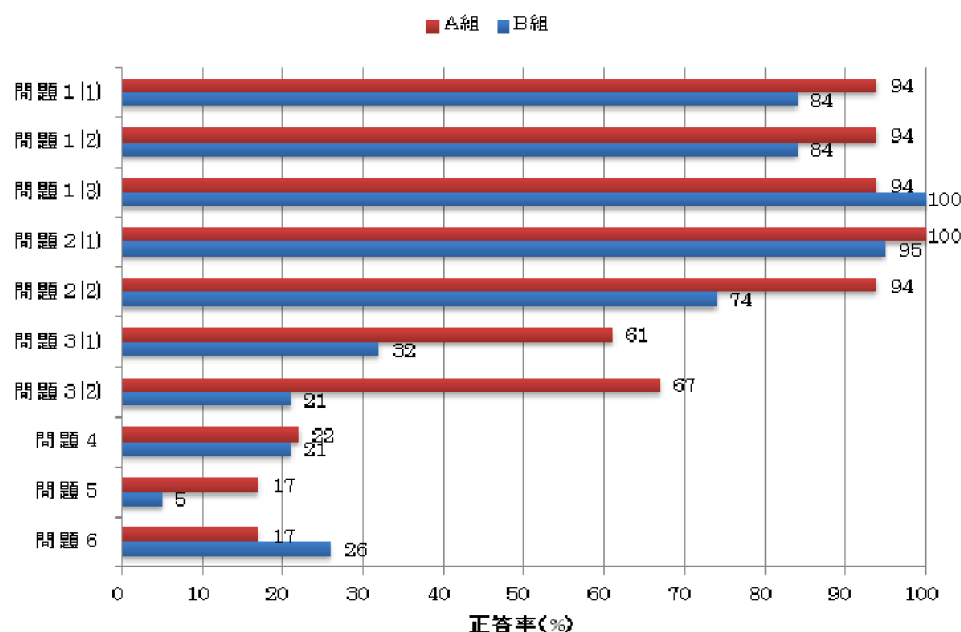


図 3 - 3 2 次関数の試験の正答率

問題 1, 2 は関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴についての問題である. A 組, B 組ともに正答率が高く, 差はでなかった. これはグラフの特徴はこの単元の基本であるため, 動画コンテンツ利用の有無にかかわらず, どの生徒も理解していたからだと考える. ただし, 問題 1(1), (2) は A 組で不正解であったのは 1 人であったのに対して B 組の不正解は 3 人であった. この授業を実施する前は A 組の方が B 組に比べ学力が低い生徒が多かったが, A 組の不正解者は少なかった. 正答率にはっきりとした差があるわけではないので断定はできないが, 動画コンテンツにより関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴を視覚的に理解できたことが影響した可能性がある.

問題 3 の定義域と値域の問題には A 組, B 組に顕著な差がでた. 動画コンテンツを見ていた A 組の正答率は (1) が 61 %, (2) が 67 % と 50 % を超えた. 動画コンテンツを見ていなかった B 組の正答率は (1) が 32 %, (2) が 21 % にとどまった. 定義, 値域については, この単元の中で最もグラフのイメージがもてることが大事になるところである. 関数 $y = ax^2$ のグラフをイメージですることができないと解くことができない. 問題 3 の試験の結果から動画コンテンツは, 式とそのグラフの関係の視覚的な理解を深めるのに適した教材であることがわかった.

問題 4 の定義域と値域の難易度の高い問題は差が出なかった. 問題の難易度が上がるととたんに正答率が下がる. 難易度が上がっても正答率が上がるようなコンテンツを作成するのは, 今後の課題である.

問題 5, 6 の変化の割合の問題も A 組, B 組ともに正答率が低く, 差はでなかった. この原因は, 問題 5 の問題文が長かったこと, 問題 6 は他の問題に比べ難易度が高かったことが考えられる. A 組, B 組とも生徒は文章題を苦手に行っている. 問題 6 程度の文章なら解けると判断したが, 難しかったようだ.

4 まとめと今後の展望

本稿では1次関数および2次関数を視覚的に理解させるようなコンテンツを作成し、それを授業において実践した結果について報告した。結果として生徒に視覚的に図を示した方が、はるかに理解が高まることがわかった。

生徒たちはこの電子教材をどのように感じているかを調査するために、授業を受けた生徒24人から、パソコンとプロジェクターを用いた授業について感想を自由記述で書いてもらった。結果を以下にまとめる。なお、否定的な感想は全く無かった。

関心・意欲・態度に関する評価

おもしろい 11人

電子教材を活用した授業に関する評価

良い授業であった 3人

毎回して欲しい 1人

知識・理解に関する評価

わかりやすい 15人

移動の様子を想像できるようになった 7人

まず、関心・意欲・態度に関する高い評価が多かった。これはプロジェクターを活用した授業が数学の授業では初めてだったこともあると考えられる。しかし、他の教科の授業ではプロジェクターは活用されている。それでも生徒は興味津々で、やや興奮していたようである。普段寝ている生徒も起きており、電子教材により生徒の興味を引き出した。電子教材を活用した授業に関しても良い感想が得られ、電子教材を用いた授業への批判した生徒は1人もいなかった。知識・理解に関しても良い感想を得た。「移動の様子を想像できるようになった」とう感想から、生徒が時間変化や動きをイメージすることができるようになり、試験の結果でも示された通り、そのイメージが内容の理解につながったと考えられる。

本実践において、グラフをイメージさせるコンテンツの教育効果が確かめられたため、他の単元においてもコンテンツを作成し、教育実践していきたいと考えている。