

同変コホモロジーと Quillen 同値 (Equivariant cohomology and Quillen equivalences)

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

G をコンパクトで連結な Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\Omega(M)$ を M の微分形式全体とすると, Cartan 複体とよばれる $((S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\text{inv}}, d_{\mathfrak{g}})$ は同変コホモロジーを与える. Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は Cartan 複体がより “小さい” $((S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \Omega(M)_{\text{inv}}, \tilde{d}_{\mathfrak{g}})$ と擬同型であると主張した. Maszczyk-Weber [5] がその証明にギャップを指摘したが, ほどなくして Alekseev-Meinrenken [1] により正しい証明が与えられた. ただし Goresky-Kottwitz-MacPherson の方法と Alekseev-Meinrenken の方法は大きく異なる. 本稿では Lefèvre により与えられた Koszul 双対性の拡張を用いて, Goresky-Kottwitz-MacPherson の方法に近い別証明を与える.

2 小 Cartan 複体

この節の詳細については原論文 [1], もしくは [6] を参照.

以下では $\mathfrak{g}$ を標数 0 の体 F 上の reductive Lie 代数とする.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$ -微分空間とは次数付きベクトル空間 $\mathcal{M}$ とその微分 $d^{\mathcal{M}}$, そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする:

- $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ 0, -1 ,
- $[d^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$,

$$- [L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}}),$$

$$- [\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0.$$

□

定義 2.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とするとき

$$\mathcal{M}_{\text{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$$

$$\mathcal{M}_{\text{hor}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$$

$$\mathcal{M}_{\text{basic}} := \mathcal{M}_{\text{inv}} \cap \mathcal{M}_{\text{hor}}$$

とおく.

□

$\mathfrak{g}$ の基底を $\{e_a\}$, その双対基底を $\{e^a\}$ とする. そして以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1 \mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1 \mathfrak{g}^*$$

と書くことにする. また $S\mathfrak{g}^*$ の次数は

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i \mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0 \quad (i \geq 0)$$

と定める.

定義 2.3. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とするとき

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}}, \quad d_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a \otimes \iota^{\mathcal{M}}(e_a)$$

を Cartan 複体とよび, そのコホモロジーを $\mathcal{M}$ の同変コホモロジー (の Cartan モデル) とよぶ.

□

$(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ と $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の間には非退化な pairing が存在するので, $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$, $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の積はそれぞれ $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$, $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ の余積を導く. このとき $x \in (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ が primitive であるとは, Δ を $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ の余積とすると

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

を満たすこととする. $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の場合も同様にして, $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$, $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の primitive な元全体からなる次数付き部分空間をそれぞれ $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$ とする. 実は $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$ の間にも非退化な pairing が存在し, $\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間となる. $\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底, $\{c^j\}$ をその双対基底とする.

また “Chevalley’s transgression theorem” により c^j に対応する元を $p^j \in (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ と書くことにする.

そして $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$ を次数付き代数の準同型として

$$\iota: \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$$

と自然に拡張する.

定義 2.4. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とすると,

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\text{inv}}, \quad \tilde{d}_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j)$$

を小 Cartan 複体とよぶ. □

$\wedge \mathfrak{g}$ の次数を

$$(\wedge \mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i \mathfrak{g}, \quad (\wedge \mathfrak{g})^i := 0 \quad (i \geq 0)$$

と定めるとき, Alekseev-Meinrenken[1] は

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge \mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j \quad (1)$$

をみたす次数 0 の元 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$ が存在することを示し, これを用いて次を得た.

定理 2.5 ([1, Theorem 4.2]). $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数, $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とする. 方程式 (1) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\text{inv}}$ に対して

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は微分 $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群としてのホモトピー同値写像である. □

これより $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は擬同型であることが従う.

3 Lefèvre による Koszul 双対性の拡張

この節の詳細については [4], [3] を参照.

A を augmented DG (Differential Graded) 代数, C を cocomplete augmented DG 余代数とする. そして $\tau: C \rightarrow A$ を twisting cochain, つまり次数 1 の線型写像で

$$d^A \circ \tau + \tau \circ d^C + \mu^A \circ (\tau \otimes \tau) \circ \Delta^C = 0, \quad \varepsilon^A \circ \tau \circ \varepsilon^C = 0$$

を満たすものとする. ここで d^A, d^C はそれぞれ A, C の微分, μ^A は A の積, Δ^C は C の余積, そして $\varepsilon^A, \varepsilon^C$ はそれぞれ A, C の augmentation とする.

L を DG A -加群とすると, $L \otimes C$ は $1 \otimes \Delta^C$ を余積とする C -余加群になる. また

$$T: X \otimes X' \rightarrow X' \otimes X, \quad x \otimes x' \mapsto (-1)^{|x||x'|} x' \otimes x$$

として

$$d^L \otimes 1 + 1 \otimes d^C + (\mu^L \otimes 1) \circ (T \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (1 \otimes \Delta^C)$$

は微分になる. こうしてできる DG C -余加群を $L \otimes_\tau C$ と書くことにする.

次に $\text{Mod } A$ を DG A -加群のなす圏, $\text{Comc } C$ を cocomplete DG C -余加群のなす圏として, $\phi: L \rightarrow L'$ を $\text{Mod } A$ の射とすると, $\phi \otimes 1: L \otimes_\tau C \rightarrow L' \otimes_\tau C$ は $\text{Comc } C$ の射となる.

以上のようにしてできる関手を

$$? \otimes_\tau C: \text{Mod } A \rightarrow \text{Comc } C$$

と書く.

同様に M を cocomplete DG C -余加群とすると, A -加群 $A \otimes M$ において

$$d^A \otimes 1 + 1 \otimes d^M + (\mu^A \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (1 \otimes T) \circ (1 \otimes \Delta^M)$$

は微分になり, こうしてできる DG A -加群を $A \otimes_\tau M$ と書き, 関手を

$$A \otimes_\tau?: \text{Comc } C \rightarrow \text{Mod } A$$

と表す.

このとき $(? \otimes_\tau C, A \otimes_\tau?)$ は随伴関手の組となる ([4, Lemme 2.2.1.2]).

以下では $\tau: C \rightarrow A$ は acyclic, つまり任意の DG A -加群 M に対して, adjunction morphism $A \otimes_\tau (M \otimes_\tau C) \rightarrow M$ が擬同型であると仮定する.

$\text{Mod } A$ において weak equivalence として擬同型, fibration として全射準同型とするとモデル圏になることが知られているが, Lefèvre は次を示した.

定理 3.1 ([4, Théorème 2.2.2.2]). (a) $\text{Comc } C$ において weak equivalence として射 f で $A \otimes_\tau f$ が擬同型になるもの, cofibration として単射準同型とするとモデル圏になる.

(b) $(? \otimes_\tau C, A \otimes_\tau?)$ は Quillen 同値になる. □

これから $\text{Mod } A$, $\text{Comc } C$ を weak equivalence のクラスで局所化した圏をそれぞれ $D(A)$, $D(C)$ と書くことにすると,

$$D(A) \xrightarrow{\sim} D(C)$$

が成り立つことがわかる.

ここで $A = (Sg^*)_{\text{inv}}$, $C = (\wedge g^*)_{\text{inv}}$, そして

$$\tau: (\wedge g^*)_{\text{inv}} \cong \wedge P^* \rightarrow P^* \rightarrow S\tilde{P}^* \cong (Sg^*)_{\text{inv}}$$

とする. ただし $\wedge P^* \rightarrow P^*$ は自然な射影, $\tilde{P}^* := P^*[-1]$, そして $P^* \rightarrow S\tilde{P}^*$ は transgression とする.

このとき上記定理より圏同値

$$D((Sg^*)_{\text{inv}}) \xrightarrow{\sim} D((\wedge g^*)_{\text{inv}}) \quad (2)$$

を得る.

次節ではこれを用いて $\tilde{C}_g(M)$ と $C_g(M)$ が擬同型であることを示す.

4 $\tilde{C}_g(\mathcal{M})$ と $C_g(\mathcal{M})$ が擬同型であることの証明

g -微分代数とは次数付き結合代数 A であり, g -微分空間の構造をもち, さらに $d^A, L^A(\xi), \iota(\xi)^A$ が A の積に関して derivation になるものとする. 重要な例として Weil 代数 $Wg := Sg^* \otimes \wedge g^*$ がある.

次に g -微分 A -加群とは g -微分空間 $\mathcal{N}$ であり, A -加群の構造をもち, さらにその作用 $A \otimes \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ が g -微分空間の準同型になるものとする.

定義 4.1. $\mathcal{N}$ を g -微分 Wg -加群とするとき

$$\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}, \quad d^{\mathcal{N}} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^{\wedge}(c_j)$$

を Chevalley-Koszul 複体とよぶ. □

任意の g -微分 Wg -加群 $\mathcal{N}$ に対して horizontal projection

$$P_{\text{hor}} := \prod_a \iota^{\mathcal{N}}(e_a) y^a : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}$$

が定義できる. これは Sg^* の作用, $L^{\mathcal{N}}(\xi)$ とは可換であることを注意しておく.

Alekseev-Meinrenken [1] は次を示した.

定理 4.2 ([1, Theorem 5.5]). g を reductive Lie 代数, $\mathcal{N}$ を g -微分 Wg -加群, そして $f \in (Sg^* \otimes (\wedge g)^{-})_{\text{inv}}$ を方程式 (1) の任意の解とすると, 次の成り立つ.

(a)

$$\Psi : \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|} (e^{\iota^W(f)} \eta \cdot z)$$

は微分 $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の準同型である.

(b)

$$\Upsilon : \mathcal{N}_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}, \quad z \mapsto (P_{\text{hor}} \otimes 1) \circ e^{-\alpha} (e^{-\iota^{\mathcal{N}}(f)} z \otimes 1)$$

は微分 $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の準同型である. ここで $\alpha = \sum_j \iota^{\mathcal{N}}(c_j) \otimes c^j \in \text{End}(\mathcal{N}_{\text{inv}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}})$ とする.

(c) $\Upsilon \circ \Psi$ は恒等写像であり, $\Psi \circ \Upsilon$ は恒等写像とホモトピックである. □

$\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}$ は $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ の余積 Δ を用いて $1 \otimes \Delta$ により微分 $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の構造をもつ.

一方 $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ は余積を

$$\mathcal{N}_{\text{inv}} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \xrightarrow{1 \otimes \Delta} \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \xrightarrow{\Psi \otimes 1} \mathcal{N}_{\text{inv}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}$$

とすれば微分 $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群になる.

このとき Ψ, Υ は微分 $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の擬同型になることがわかるが, さらに weak equivalence になることが以下のようにわかる.

まず $C^j := \bigoplus_{i \leq j} (\wedge^i \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ とすると, $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ は $C^0 = \mathbb{F}$ を満たす exhaustive filtration

$$\mathbb{F} = C^0 \subset C^1 \subset \dots \subset C^{\dim \mathfrak{g}} = (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$$

をもつ.

次に $\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ において $\wedge^j \mathcal{P}$ の全ての元の contraction が 0 である元からなる部分空間を F^j とすると, $F^0 = 0$ を満たす exhaustive filtration

$$0 = F^0 \subset F^1 \subset \dots \subset F^{\dim \mathcal{P}+1} = \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$$

をもつことがわかる.

同様に $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ も $(F')^0 = 0$ を満たす exhaustive filtration $\{(F')^j\}$ をもつ. このとき定理 4.2 の Ψ, Υ は filtration を保つ擬同型であることがわかる.

補題 4.3 ([4, Lemme 2.2.2.5]). cocomplete augmented DG 余代数 C が $C^0 = \mathbb{F}$ である exhaustive filtration $\{C^i\}$ をもつとする. 2つの cocomplete DG C -余加群 M, M' がそれぞれ $F^0 = 0$ である exhaustive filtration $\{F^i\}$ をもつならば, M と M' の間の filtration を保つ擬同型は weak equivalence になる. $\square$

この補題より Ψ は weak equivalence になることがわかる. よって, $\text{Mod } (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ において擬同型

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \Psi : (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \rightarrow (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{N}_{\text{inv}}$$

を得る. ここでは簡単のため $\otimes_r$ を $\otimes$ と表した.

M, M' が擬同型であるとき $M \sim M'$ と書くことにすると, 任意の $\mathfrak{g}$ -微分空間 $\mathcal{M}$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) &= (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\text{inv}} \\ &\sim (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \\ &\sim (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \\ &\cong (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \\ &\sim (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \\ &= C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. ここで最初の $\sim$ は $W\mathfrak{g}$ が acyclic であること, 最後の $\sim$ は (2) から従う.

注意 4.4. 以上で示したことは $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であることのみであり, Alekseev-Meinrenken はより強い主張, ホモトピックであることを示している. 上記の方法でより強い主張を示すことが今後の重要な課題である. $\square$

参考文献

- [1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.
- [2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.
- [3] B. Keller, *A-infinity algebras, modules and functor categories*, math.RT/0510508.
- [4] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞ catégories*, math.CT/0310337.
- [5] T. Maszczyk, A. Weber, *Koszul duality for modules over Lie algebras*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 511–520.
- [6] 山崎啓太, 同変コホモロジーの小 Cartan モデルについて, 京都大学数理解析研究所講究録 1449 変換群論の新たな展開 (2005), 151–158.