

弱値増幅法を用いた信号検出法の提案とその統計的評価

東京工業大学 大学院理工学研究科 基礎物理学専攻 須佐 友紀

Yuki Susa

Department of Physics,
School of Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

弱値増幅とは弱測定により得られる効果で精密測定への応用が期待されている [1, 2]. 本稿では文献 [3] に基づき, 統計的推測の手段の一つである仮説検定を用いて通常の量子測定と弱測定の検出力の比較を行うという形で, 弱測定の有用性に関して議論を行う.

弱測定は 1988 年にアハラノフらにより提案された量子測定の手法である [4]. 通常の量子間接測定では, 測定器系と事前選択された被測定系の始状態 $|i\rangle$ を準備し, 相互作用ハミルトニアンに従い時間発展させる. そして最後に測定器系の波動関数を読み取り, 測定前からどの程度並進したかを測る. 相互作用ハミルトニアンがフォン・ノイマン型の場合, 測定器系の波動関数が (相互作用の強さ g) $\times$ (被測定系の観測量 $\hat{A}$ の固有値) 程度に並進する. 一方で, 弱測定では相互作用後に被測定系の終状態 $|f\rangle$ を事後選択してから, 波動関数を読み取る. このとき波動関数の並進は $\psi(x) \rightarrow \psi(x - g\text{Re}\langle\hat{A}\rangle_w)$ のように相互作用の強さと “弱値” ($\langle\hat{A}\rangle_w := \langle f|\hat{A}|i\rangle/\langle f|i\rangle$) という量によって決まる [5]. これは相互作用が十分に弱いという仮定のもと 1 次近似を用いて計算されている. この弱値は被測定系の事前・事後選択状態で定義され, これらの状態を直交に近づけることで任意に大きくできることが知られている. この特徴により相互作用により並進が通常の間接測定より大きくなる効果を “弱値増幅” と呼ばれ, 実際の実験でも確認されている [6–8]. 弱値および弱測定の基礎については文献 [9] でまとめられている.

近年では, 弱い相互作用の精密測定に向けた弱値増幅の応用研究が行われている. 弱値増幅は技術的な雑音には強いことが示唆されているが [10, 11], 数理統計の面からパラメータ推定に関しては不利であると考えられている [12–16]. これらの研究では Fisher 情報量を計算することで相互作用の大きさのパラメータ推定精度について論じている. 弱測定では事後選択操作によるデータ損失が存在するため, データ数の取得が非効率になる. 結果として, 通常の測定と比較して弱測定で得られるデータ数は少なくなってしまうため不利になるとされている. 一方で実際の実験においてはデータ損失は本質的な問題にはならないという主張もある [17, 18].

これまで弱値増幅に関する議論は, 数理統計の観点からは上述のような点推定にのみ注目されてきたが, 本研究では, 統計的推測の手段として幅広い分野で多用されている “仮説検定” に基づいて弱値増幅の精密測定方法としての有用性の評価を行う. 仮説検定では相反する 2 つの仮説のうちどちらがより正しそうか測定結果から判断する [19–21]. このときの検定精度は, 点推定とは違い, データ数に直接的には依存しないため, 弱測定のようにデータ数が少数でも示唆的な結論を得ることができる. 本研究では 「量子関節測定中の相互作用の有無を判断するのに弱測定と普通の測定がどちらが検出力が優位であるか」 に焦点を当てる. 文献 [14] では, 同様の問題に関して尤度比検定を用いて評価している. 尤度比検定は仮説がいずれも単純仮説であるときに一様最強検定であることがネイマン=ピアソンの補題 (文献 [22]) により知られているが, 相互作用の有無に関する検定は両側検定で扱われるべき問題であり, 尤度比検定は適切な検定ではない. また, 一般的に両側検定には一様最強検定は存在しないため, 良い検定を提案する場合は一様最強力不偏検定を求める必要がある.

そこで本研究では、尤度比検定に代わる一様最強力不偏検定を提案し、弱値増幅の検出力の評価を行った。我々の検定手法では測定装置の初期揺らぎよりもおよそ大きい測定結果が得られた場合に、相互作用があると判断する。この検定においては、弱値の絶対値が被測定系の観測量の固有値より大きい場合、弱測定が普通の測定より有利になることを示した。この問題を扱う上で、測定器系の初期波動関数がガウシアンで、被測定系はブロッホ球で表現できるような2状態系 ($|\pm\rangle$) であり観測量は $\hat{A} = \lambda(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, \hat{A}^2 = \lambda^2$) であると仮定する。この仮定は文献 [17, 23, 24] において近似を用いずに弱測定に関する計算を行うために用いられたものである。

2 弱測定と弱値増幅

ここでは弱測定と弱値増幅に関する簡単なレビューを行う。特にここで重要になるのが通常の測定後と弱測定後に得られる測定器系の確率分布の違いである。測定器系の初期分布は以下のようなガウシアンとする。

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (1)$$

x は位置, σ は揺らぎとする。測定器系と被測定系間の相互作用はフォン・ノイマン型であるとするので、ハミルトニアン $\hat{H}$ とユニタリー演算子 $\hat{U}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \hat{H} &= g\delta(t)\hat{A} \otimes \hat{p}, \\ \hat{U} &= e^{-ig\hat{A} \otimes \hat{p}} \end{aligned}$$

である。 $\hat{p}$ は測定器系の運動量演算子である。フォン・ノイマン型ハミルトニアンは測定器系の位置を並進させる演算子である。通常の測定では、被測定器系の始状態 $|i\rangle$ と測定器系の初期状態 $|\psi\rangle$ を相互作用させた後に測定器系の位置を観測するので、このとき得られる相互作用後の測定器系の確率分布は以下のように計算される。

$$f_{\text{mps}}(x|g) = |\langle x|\hat{U}|\psi\rangle|i\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[|\langle +|i\rangle|^2 e^{-\frac{(x-\lambda g)^2}{2\sigma^2}} + |\langle -|i\rangle|^2 e^{-\frac{(x+\lambda g)^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (2)$$

また弱測定の場合は相互作用の後に被測定系の終状態を事後選択する。よって弱測定を行った場合に得られる測定器系の確率分布は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f_{\text{ps}}(x|g) &= \frac{|\langle x|\langle f|\hat{U}|i\rangle|\psi\rangle|^2}{|\langle f|\hat{U}|i\rangle|\psi\rangle|^2} \\ &= \frac{\mathcal{N}^{-1}}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left\{ \left(1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} + 2\frac{\text{Re}\langle \hat{A} \rangle_w}{\lambda} \right) e^{-\frac{(x-\lambda g)^2}{2\sigma^2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} - 2\frac{\text{Re}\langle \hat{A} \rangle_w}{\lambda} \right) e^{-\frac{(x+\lambda g)^2}{2\sigma^2}} + 2 \left(1 - \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) e^{-\frac{x^2 + \lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\mathcal{N} := 1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} + \left(1 - \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

図1は、測定操作による測定器系の確率分布の遷移をプロットしたものである。相互作用により、初期分布が被測定系の初期状態に従って並進する。この例の場合、初期状態は $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の重ねあわせ状態なので、(それぞれの観測量の固有値 $\pm\lambda$) $\times$ (相互作用の強さ g) だけガウシアンが並進する。よって図1の右図の点線のような中央値が異なる2つのガウシアンの重ねあわせの分布になる。一方弱測定の場合は右図の実線のようにになる。事後選択により、通常の測定の分布における2つのガウシアンが重なっている部分(図1での y 軸付近)の値が小さくなることがわかる。これは式(3)の第3項目に起因する。このため分布のピーク間距離が、通常の測定の場合より弱測定の方が外側に広がる[25]。この分布の変化具合は弱値に依存する。

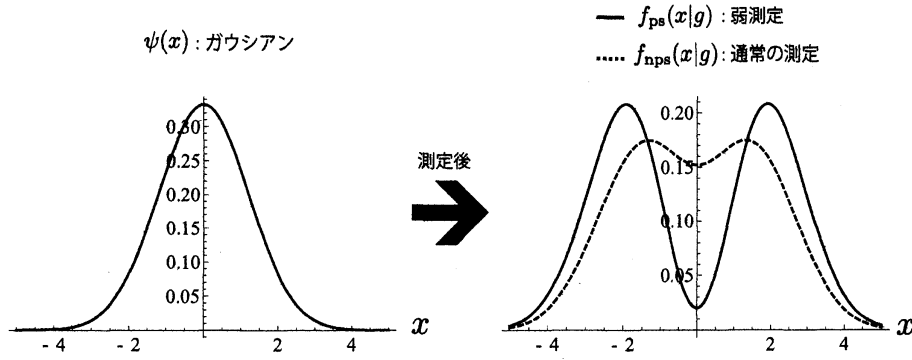


図1 測定器系の分布の変化. 左が初期分布で, 右が実線: 弱測定後, 点線: 通常の測定後である. 各パラメータは以下のようにした. $\sigma = 1.2$, $g = 1.5$, $\lambda = 1$, $|\langle +|i \rangle|^2 = |\langle -|i \rangle|^2 = 1/2$, $\text{Re}\langle \hat{A} \rangle_w = 0$, $|\langle \hat{A} \rangle_w| = 5$.

3 仮説検定

ここでは本研究で用いる範囲での仮説検定についてレビューをする [19–21]. 本研究では, 前述の通り, 被測定系と測定器系の間の相互作用の有無の判定を仮説検定を用いて行う. そこで二つの仮説は以下のようにおく.

帰無仮説 H_0 : 相互作用はない ($g = 0$)

対立仮説 H_1 : 相互作用はある ($g \neq 0$)

よって, 相互作用の有無に関する検定問題は相互作用パラメータ g に関しての両側検定となる. 仮説検定において, どちらの仮説がより正しそうであると受容するかは, 検定方式の設け方に依存し, 数学的には検定関数という形で記述される. 検定関数 $d(x)$ は測定値 x の値により 0 か 1 を与える 2 値関数である. ある測定値 x に対して $d(x) = 0$ であれば, 帰無仮説を受容し, $d(x) = 1$ であれば対立仮説を受容する. しかし, 検定関数による判断は常に正しいというわけではなく, ある確率で判断を誤ること (過誤) がある. 過誤は以下のように 2 種類ある.

第 1 種の過誤 帰無仮説が正しいにも関わらず, 対立仮説を受容する過誤

今回の場合は, 相互作用は本当はないにも関わらず, あると判断する過誤

第 2 種の過誤 対立仮説が正しいにも関わらず, 帰無仮説を受容する過誤

今回の場合は, 相互作用は本当はあるにも関わらず, ないと判断する過誤

これらの過誤が起こる確率を減らせるような検定関数は良い検定方式である. 検定したいパラメータの真値が θ であるときに測定値が x である確率が $f(x|\theta)$ とすると, 過誤が起きる確率は以下で定義するような検出力関数 $\beta(\theta)$ を用いることで計算することができる.

$$\beta(\theta) := \int d(x) f(x|\theta) dx \quad (5)$$

今回の場合だと, 第 1 種の過誤が起きる確率は $\Pr[\mathcal{E}_1] = \beta(0)$, 第 2 種の過誤が起きる確率は $\Pr[\mathcal{E}_2] = 1 - \beta(g \neq 0)$ となる. 検出力関数 $\beta(g \neq 0)$ の値そのものは検出力と呼ばれ, 対立仮説が正しい時に対立仮説を受容する確率となる. 言い換えると相互作用がある場合に相互作用があると判断する確率になる. 以上のようにして, 過誤が起きる確率をそれぞれ計算できるが, 第 1 種の過誤と第 2 種の過誤はトレードオフの関係にあるためこれらを同時に減らすことは通常はできない. よって仮説検定では, まず第 1 種の過誤が適当に設定したある許容できる確率 (有意水準: α) 以下に押さえた上で第 2 種の過誤を可能な限り減らすというのが習慣的戦略である. この戦略を踏まえた上で一般的に両側検定 $H_0: \theta = \theta_0$ 対 $H_1: \theta \neq \theta_0$ において, 不偏性 $\beta(\theta \neq \theta_0) \geq \alpha$ を仮定した上で良い検定

方式である一様最強力不偏検定を求めるために以下の補題が知られている [19, 21].

補題. 両側検定 $H_0 : \theta = \theta_0$ 対 $H_1 : \theta \neq \theta_0$ において, ある検定関数 $d(x)$ が以下を満たしているとする.

$$\partial_\theta \beta(\theta) = \int d(x) \partial_\theta f(x|\theta) dx \quad (6)$$

$$\beta(\theta_0) = \alpha \quad (7)$$

$$\partial_\theta \beta(\theta_0) = 0 \quad (8)$$

今, $\theta_1 \neq \theta_0$ とする. ここで適当な c_1 と c_2 を用いて検定関数 $d(x)$ を

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathcal{F}(x) \leq 0 \\ 1, & \text{if } \mathcal{F}(x) > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathcal{F}(x) := f(x|\theta_1) - c_1 f(x|\theta_0) - c_2 \partial_\theta f(x|\theta)|_{\theta=\theta_0} \quad (10)$$

と記述できれば, 検定関数 $d(x)$ は一様最強力不偏検定である.

この補題を用いて, 通常の測定と弱測定のそれぞれの場合における一様最強力不偏検定を求め, それらの検出力の比較を行う. 第1種の過誤は式 (7) により α に固定されているため, 第2種の過誤つまり検出力 $\beta(g \neq 0)$ の比較をすれば, 通常の測定と弱測定の有用性の比較として仮設検定の枠組みの中では十分である.

4 一様最強力不偏検定

本章では, 通常の測定あるいは弱測定を用いる場合において, 以下で提案する検定関数が一様最強力不偏検定になることを前述した補題を用いて示す. 相互作用があるかないかの検定を行う上で, 相互作用の大きさは未知のパラメータなので検定関数には含んではならない. このことを踏まえた上で次の検定関数を提案する.

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } |x|/\sigma \leq c \\ 1, & \text{if } |x|/\sigma > c \end{cases} \quad (11)$$

c は棄却点であり, 理論的には任意の実数である. この検定関数は, 測定により得られた測定器系の値 x が測定器系の初期分布の揺らぎ幅 σ より 大きければ相互作用があったと物理的に解釈されるものである.

まず, 式 (6) を満たすのは自明なので, ここでは省略する. 式 (7) に関して計算を行う. 通常の測定 $f_{nps}(x|g)$ と弱測定 $f_{ps}(x|g)$ いずれの場合も

$$\beta(0) = 1 - \operatorname{erf} \left[c/\sqrt{2} \right] \quad (12)$$

となる. c は任意の値を取りえるので, いかなる α に対しても適当な c を選べば, $\beta(0) = \alpha$ とできる. 次に式 (8) も満たされることを示す. まず, 通常の測定を行った場合の検出力 $\beta_{nps}(g)$ は,

$$\beta_{nps}(g) = 1 - \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{c\sigma - \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{c\sigma + \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2} \right] \right) \quad (13)$$

である. $\operatorname{erf}[x] := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ は誤差関数である. よって

$$\partial_g \beta_{nps}(g)|_{g=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left(e^{-\frac{(c\sigma - \lambda g)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(c\sigma + \lambda g)^2}{2\sigma^2}} \right) \Big|_{g=0} = 0 \quad (14)$$

また弱測定をした場合の検出力 $\beta_{ps}(g)$ は

$$\beta_{ps}(g) = 1 - \frac{\mathcal{N}^{-1}}{2} \left[\left(1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{c\sigma - \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{c\sigma + \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2} \right] \right\} + 2 \left(1 - \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \operatorname{erf} \left[\frac{c}{\sqrt{2}} \right] \right] \quad (15)$$

よって

$$\begin{aligned} \partial_g \beta_{\text{ps}}(g)|_{g=0} = & -\mathcal{N}^{-1} \left[\frac{-\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left(1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) \left(e^{-\frac{(c\sigma-\lambda g)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(c\sigma+\lambda g)^2}{2\sigma^2}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2 g}{\sigma^2} \left(1 - \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \operatorname{erf} \left[\frac{c}{\sqrt{2}} \right] + \frac{\lambda^2 g}{\sigma^2} \left(1 - |\langle \hat{A} \rangle_w|^2 \right) e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} (1 - \beta_{\text{ps}}(g)) \right] \Bigg|_{g=0} \\ = & 0 \end{aligned} \quad (16)$$

故に式 (8) も満たされることが示せた。次に検定関数 (11) が式 (9) の形で記述できるかを見てみる。通常の測定の場合、式 (10) は

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{nps}}(x)}{f_{\text{nps}}(x|0)} = \mathcal{G}_{\text{nps}}(x) - c_{1,\text{nps}} - c_{2,\text{nps}} \frac{|\langle +|i \rangle|^2 - |\langle -|i \rangle|^2}{\sigma^2} x, \quad (17)$$

$$\mathcal{G}_{\text{nps}}(x) := e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \left(|\langle +|i \rangle|^2 e^{\frac{\lambda g x}{\sigma^2}} + |\langle -|i \rangle|^2 e^{-\frac{\lambda g x}{\sigma^2}} \right) \quad (18)$$

となる。ここで $|\langle +|i \rangle|^2 \neq |\langle -|i \rangle|^2$ とした場合に $\mathcal{F}_{\text{nps}}(\pm c\sigma)/f_{\text{nps}}(\pm c\sigma|0) = 0$ となる $c_{1,\text{nps}}$ と $c_{2,\text{nps}}$ を求めると、

$$c_{1,\text{nps}} = \frac{\mathcal{G}_{\text{nps}}(c\sigma) + \mathcal{G}_{\text{nps}}(-c\sigma)}{2} = e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \cosh \left[\frac{\lambda c g}{\sigma} \right], \quad (19)$$

$$c_{2,\text{nps}} = \sigma \frac{\mathcal{G}_{\text{nps}}(c\sigma) - \mathcal{G}_{\text{nps}}(-c\sigma)}{2(|\langle +|i \rangle|^2 - |\langle -|i \rangle|^2)c} = \frac{\sigma e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}}}{c} \sinh \left[\frac{\lambda c g}{\sigma} \right] \quad (20)$$

である。 $\mathcal{G}_{\text{nps}}(x)$ は下に凸な関数なので、ここで得られた $c_{1,\text{nps}}$, $c_{2,\text{nps}}$ のもとでは

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{nps}}(x) & \leq 0 & \Leftrightarrow & |x|/\sigma \leq c \\ \mathcal{F}_{\text{nps}}(x) & > 0 & \Leftrightarrow & |x|/\sigma > c \end{aligned} \quad (21)$$

$|\langle +|i \rangle|^2 = |\langle -|i \rangle|^2$ の場合も同様の議論が成り立つ。よって通常の測定の場合は、検定関数 (11) は一様最強力不偏検定になる。

弱測定の場合において、式 (10) は

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{nps}}(x)}{f_{\text{nps}}(x|0)} = \mathcal{G}_{\text{ps}}(x) - c_{1,\text{ps}} - c_{2,\text{ps}} \frac{\operatorname{Re} \langle \hat{A} \rangle_w}{\sigma^2} x, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{ps}}(x) := & \frac{e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \mathcal{N}^{-1}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} + 2 \frac{\operatorname{Re} \langle \hat{A} \rangle_w}{\lambda} \right) e^{\frac{\lambda x g}{\sigma^2}} \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} - 2 \frac{\operatorname{Re} \langle \hat{A} \rangle_w}{\lambda} \right) e^{-\frac{\lambda x g}{\sigma^2}} + 2 \left(1 - \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$\operatorname{Re} \langle \hat{A} \rangle_w \neq 0$ としたときの $\mathcal{F}_{\text{ps}}(\pm c\sigma)/f_{\text{ps}}(\pm c\sigma|0) = 0$ となる $c_{1,\text{ps}}$ と $c_{2,\text{ps}}$ を求めると、

$$c_{1,\text{ps}} = \frac{\mathcal{G}_{\text{ps}}(c\sigma) + \mathcal{G}_{\text{ps}}(-c\sigma)}{2} = e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \mathcal{N}^{-1} \left[2 \left(1 + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) \cosh \left[\frac{\lambda c g}{\sigma} \right] + \left(1 - \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) \right], \quad (24)$$

$$c_{2,\text{ps}} = \sigma \frac{\mathcal{G}_{\text{ps}}(c\sigma) - \mathcal{G}_{\text{ps}}(-c\sigma)}{2 \operatorname{Re} \langle \hat{A} \rangle_w c} = 2(\lambda c \mathcal{N})^{-1} \sigma e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \sinh \left[\frac{\lambda c g}{\sigma} \right] \quad (25)$$

が得られる。この $c_{1,\text{nps}}, c_{2,\text{nps}}$ を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{ps}}(x) \leq 0 &\Leftrightarrow |x|/\sigma \leq c \\ \mathcal{F}_{\text{ps}}(x) > 0 &\Leftrightarrow |x|/\sigma > c \end{aligned} \quad (26)$$

$\text{Re}\langle \hat{A} \rangle_w = 0$ の場合も同様の議論が成り立つ。よって弱測定の場合においても検関数 (11) は一様最強力不偏検定になる。

5 検出力の比較

前章の証明の過程に導いた通常の測定の検出力と弱測定の検出力の比較を行う。式 (13) と式 (15) より以下を得ることができる。

$$\frac{1 - \beta_{\text{ps}}(g)}{1 - \beta_{\text{nps}}(g)} - 1 = \mathcal{N}^{-1} \left(1 - \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \right) \left[\frac{2\text{erf}\left[\frac{c}{\sqrt{2}}\right]}{\text{erf}\left[\frac{c\sigma - \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2}\right] + \text{erf}\left[\frac{c\sigma + \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2}\right]} - 1 \right] e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \quad (27)$$

ここで

$$\left[\frac{2\text{erf}\left[\frac{c}{\sqrt{2}}\right]}{\text{erf}\left[\frac{c\sigma - \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2}\right] + \text{erf}\left[\frac{c\sigma + \lambda g}{\sqrt{2}\sigma^2}\right]} - 1 \right] e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} > 0 \quad (28)$$

$$\mathcal{N} = \left(1 + e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \right) + \frac{|\langle \hat{A} \rangle_w|^2}{\lambda^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda^2 g^2}{2\sigma^2}} \right) > 0 \quad (29)$$

なので、以下の不等式が示せる。

$$|\langle \hat{A} \rangle_w| \geq \lambda \Leftrightarrow \beta_{\text{ps}}(g) \geq \beta_{\text{nps}}(g) \quad (30)$$

つまり弱値が固有値より大きければ、弱測定の方が相互作用の検出力が大きいことがわかる。

6 まとめ

本研究では、間接測定モデルにおいて、測定過程に被測定系と測定器系の間における相互作用の有無を判断するという問題に対して、通常の量子測定と弱測定のどちらが優位であるかを仮説検定の枠組みで評価した。相互作用の有無に関する検定は、両側検定で扱われるべき問題である。今回用いた検関数は、測定値が測定器系の初期揺らぎより大きければ相互作用があると判断するものであり、通常の測定また弱測定のいずれの場合においても一様最強力不偏検定になることを示した。またこの検関数のもとでは、弱値の絶対値が被測定系の観測量の固有値より大きい場合は、弱測定の方が検出力、つまり相互作用が実際にあるときに相互作用があると検出できる確率が大きくなることを示した。この結果は、被測定系が2状態系で測定器系の初期分布がガウシアンであることを仮定した上で導かれたものである。

これまでの点推定に関する議論では、弱測定は被測定系の事後選択操作によるデータ損失の影響があるため、不利であるとされてきたが、仮説検定では少数データでも示唆的な結論を得られるという利点がある。一方で完全にデータを得られない場合は、そもそも検定を行うことができないので弱測定を用いることのリスクとなり得る。しかし、これまで複数の研究グループが弱値増幅の実験を行っているが、測定データを得た上で増幅効果を確認しているため、実際上においてデータが全く得られないケースを必ずしも考慮する必要はないと考えられる。

これまで弱値増幅は、弱値が大きくなることで測定器系の並進が大きくなるため技術的に有用であるとの理解であったが、これは近似計算による示唆であった。本研究では近似を用いずに、弱値が大きくなると検出力が大きくなるという弱値増幅の新たな理解を与えることができた。なお本研究では一様最強力不偏検定の提案を行った

がこれは必ずしも最適な検定という意味ではなく、また同様の問題を考察する上で仮説検定が最適な手法であるとは限らないことは留意しておく必要がある。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 25008633 の助成を受けて行われました。

参考文献

- [1] K. J. Resch, *Science* **319**, 733 (2008).
- [2] A. M. Steinberg, *Nature* **463**, 890 (2010).
- [3] Y. Susa and S. Tanaka, arXiv:1502.06334 (2015).
- [4] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351 (1988).
- [5] R. Jozsa, *Phys. Rev. A* **76**, 044103 (2007).
- [6] N. W. M. Ritchie, J. G. Story, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1107 (1991).
- [7] O. Hosten and P. Kwiat, *Science* **319**, 787 (2008).
- [8] P. B. Dixon, D. J. Starling, A. N. Jordan, and J. C. Howell, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 173601 (2009).
- [9] J. Dressel, M. Malik, F. M. Miatto, A. N. Jordan, and R. W. Boyd, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 307 (2014).
- [10] A. N. Jordan, J. Martinez-Rincon, and J. C. Howell, *Phys. Rev. X* **4**, 011031 (2014).
- [11] J. Lee and I. Tsutsui, *Quantum Studies: Mathematics and Foundations* **1** pp 65-78, (2014).
- [12] G. C. Knee, G. A. D. Briggs, S. C. Benjamin, and E. M. Gauger, *Phys. Rev. A* **87**, 012115 (2013).
- [13] S. Tanaka and N. Yamamoto, *Phys. Rev. A*, **88**, 042116 (2013).
- [14] C. Ferrie and J. Combes, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 040406 (2014).
- [15] G. C. Knee and E. M. Gauger, *Phys. Rev. X* **4**, 011032 (2014).
- [16] G. C. Knee, J. Combes, C. Ferrie, and E. M. Gauger, arXiv:1410.6252 (2014).
- [17] X. Zhu, Y. Zhang, S. Pang, C. Qiao, Q. Liu, and S. Wu, *Phys. Rev. A* **84**, 052111 (2011).
- [18] L. Vaidman, arXiv:1402.0199 (2014).
- [19] T. S. Ferguson, *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach*, (New York, Academic Press, 1967).
- [20] J. C. Kiefer, *Introduction to statistical inference*, (New York, Springer, 1987).
- [21] 竹村 彰通, 現代数理統計学, (創文社, 1991).
- [22] J. Neyman and E. S. Pearson, Egon S, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **231** (1933), 694-706.
- [23] T. Koike and S. Tanaka, *Phys. Rev. A* **84**, 062106 (2011).
- [24] K. Nakamura, A. Nishizawa, and M.-K. Fujimoto, *Phys. Rev. A* **85**, 012113 (2012).
- [25] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* **40**, 2112 (1989).