

氏 名	桑 原 敏 郎
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3221 号
学位授与の日付	平 成 20 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Characteristic cycles of standard modules for the rational Cherednik algebra of type $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ 型有理チェレドニク代数に関する標準加群の特性サイクルについて)
論文調査委員	(主 査) 教 授 三 輪 哲 二 教 授 上 野 健 爾 教 授 柏 原 正 樹

論 文 内 容 の 要 旨

A_{n-1} 型の有理Cherednik代数 $H_c(\mathfrak{S}_n)$ は, Cherednikによる A_{n-1} 型の2重アフィンヘッケ代数の $q=1$ の極限であり, 他方EtingofとGinzburgは, A_{n-1} 型の場合を含む一般の定義を与えている。GordonとStaffordは, Haimanの $n!$ 定理を非可換代数の立場から理解することをめざして $H_c(\mathfrak{S}_n)$ のフィルター付き加群のカテゴリーから, n 点のHilbert scheme上の接続層のカテゴリーへの函手を構成し, 加群 M のフィルターによらない不変量となる M の特性サイクルを接続層の台と定義し, 標準加群の場合にそれを決定した。本論文では対称群 $\mathfrak{S}_n$ を l 次巡回群 $\mathbb{Z}_l$ に置き換えたときの有理Cherednik代数 $H_k(\mathbb{Z}_l)$ についての同様な問題を解いている。

有理Cherednik代数 $H_c(\mathfrak{S}_n)$ は, $\mathfrak{S}_n$ が作用し, それぞれ可換な2組合計 $2n$ 個の生成元 $\chi=(\chi_1, \dots, \chi_n)$ と $y=(y_1, \dots, y_n)$ を持つ。 χ と y の間の交換関係は値を $\mathfrak{S}_n$ に取りパラメタ c に依存する。有理Cherednik代数 $H_k(\mathbb{Z}_l)$ は, $\mathbb{Z}_l$ の作用する2個の生成元 χ, y を持ち, χ と y の間の交換関係は値を $\mathbb{Z}_l$ に取り l 次元のパラメタ $\kappa=(\kappa_0, \dots, \kappa_{l-1})$ に依存する。加群のカテゴリーから接続層のカテゴリーへ移ることの要点は, 非可換な χ と y から, フィルター付きから次数付きへと主シンボルに移ることによって可換なものを得ることにある。この部分では $H_c(\mathfrak{S}_n)$ の場合は $2n$ 次元の多様体が出てくるのに対して, $H_k(\mathbb{Z}_l)$ では2次元となって簡易化されている。2次元とはいえ, $\mathbb{Z}_l$ の作用で割った空間は特異点をもつ。この特異点は $A_{l-1}^{(1)}$ 型のDynkin図形に対応する次元ベクトルが $\delta=(1, \dots, 1)$ のquiver varietyによる特異点解消をもつ。

他方, 不変量としての特性サイクルの記述には, パラメタ空間の次元が1から l に増加していることからくる複雑さがある。本論文の第一の結果は, 加群のパラメタを κ から $\kappa+\theta$ に移動する函手を構成し, それがカテゴリーの同型になるための十分条件を非自明な場合を含む形に決めたことである。 θ は l 次の整数ベクトルである。この結果は, l 次元のパラメタ空間において κ と θ を扱っているという点が新しい。 $H_k(\mathbb{Z}_l)$ を, quiverの表現空間の上の l 行 l 列の微分作用素環の $\mathfrak{gl}_1^{\otimes l}$ 不変式の部分空間のquotientとして実現したものを $\mathcal{T}_\lambda$ とする。 λ はquotientの取り方のパラメタであり κ から決まる。 $\mathcal{T}_\lambda$ の $(0,0)$ 成分のみを考えた部分代数 A_λ は $\mathcal{T}_\lambda$ と森田同値であり, 両者の加群のカテゴリーは同型となる。 A_λ においては微分作用素環の不変式の代わりに θ 半不変式を考えることによって, パラメタの移動函手を誘導する両側加群が構成できる。

第二の結果は, $\mathcal{T}_\lambda$ の加群のカテゴリーからquiver variety上の接続層のカテゴリーへの函手を構成し, 正則表現の像がquiver variety上のtautological bundleとなることを示した。函手の構成には, quiver variety $\mathfrak{M}_\theta(\delta)$ を, quiverの表現空間の余接空間のmoment mapの零点上に, quiverの安定性条件のパラメタ θ の自然数倍 $m\theta$ に対する半不変式の作る次数付き加群 S を考え, それに対する射影的概型として表示する。 $\mathcal{T}_\lambda$ 加群 M が与えられたとき, 自然に誘導される S 加群から, $\mathfrak{M}_\theta(\delta)$ 上の接続層を誘導する。 M として $\mathcal{T}_\lambda$ 自身を考えるとtautological bundleが得られることの証明には, $\mathfrak{M}_\theta(\delta)$ をトーリック多様体として表示しておいて, コホモロジーの消滅を示す。

第三の結果は, 標準加群 $\Delta_\lambda(\theta)$ の特性サイクルを決定した。よく知られているように, Klein特異点 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_l$ の特異ファ

イバーは A_{l-1} 型 Dynkin 図形で表される。安定性条件のパラメタ θ を決めると、標準表現の包含関係から決まる集合 $\mathbb{Z}_l$ の包含関係を細分した順序が定義できて、その順序を使って $\Delta_\lambda(\theta)$ に対応する連接層の台が決まる。

以上が本論文の主要結果である。

論文審査の結果の要旨

本論文は表現論と代数幾何学の交差する幾何学的表現論における最新的话题を扱ったものであり、quiver variety の新しい応用を示したという点で高く評価される。よって博士学位論文として優秀なものと認めた。

Haiman による $n!$ 定理の証明は可換代数と組み合わせ論における最近の最高到達点といえるが、非可換代数の立場からこの結果をどのように理解できるかは重要な問題である。この問題に対する Gordon による最新のアプローチにおいては有限群として $\mathfrak{S}_n$ と $\mathbb{Z}_l$ の wreath product を考えた場合の Cherednik 代数を用いた予想が定式化されている。これは Gordon と Stafford による $l=1$ の結果を拡張したものである。申請論文では $n=1$ の場合にこの予想を解いた。

申請者は、博士課程入学時より Gordon と Stafford の論文に注目しその結果の一般化を目指した。有限群を $\mathbb{Z}_l$ とし移動パラメタが特別な場合に結果を得て、Gordon 氏の来日の機会にその結果を話したところ、一般の場合も含めて考察するよう、助言をうけた。一般の場合の考察には quiver variety のコホモロジーの計算などの技術的な困難を乗り越える必要があったが、Gordon 氏の適切な指導のもと、完全な結果を得たことは高く評価できる。