

確率過程と非線型方程式

阪大 理 池田信行

§ 1. はじめに. 粒子の衝突, 個体の相互依存, 物質の化学反応, 神聖伝播, 乱流等の自然界の沢山の問題で非線型方程式によって律せられるものが沢山認識されつつある。そしてその中のいくつかの問題は密度や割合に関係したもので, 分子論的な考え方ではいわゆる確率の概念にかかわっている。

一方实例の豊富さに比べて, 系統的な考察で非線型特有の構造を確立するに至ったものは少ないように思える。(I. M. Gelfand [7])。確率過程論の立場から見た非線型方程式の取扱も体系化されたものは多くはない。そののみならずそのような立場の考察が非線型方程式の中, どのような範囲まで可能かという点にすらまだ定見はないように思える。しかしいくつかの題材については古くから確率論的な試みが行われており, 実際応用上の成果も得られている。たとえば分枝現象については分枝過程を用いる研究はそのような例の一つと言えるだろう。また非線型偏微分方程式については典型的な研究

の 1 つと思える A. N. Kolmogorov - I. Petrowsky - N. Piscounoff 等の研究等も、もともと確率論的な考察から出て来たものである。このような事実からおして非対称型方程式の研究がこれから進むにつれ、確率論との関係も一層深まることは充分期待される。そののみならず、当面確率過程論に関連してこの範囲は非対称型としてはいったって簡単なものであるが、それでも対称型と違った事情の系統的な把握の出発点としては大いに役に立ちそうに思える。

このような現状を考慮に入れてこの報告では現在確率論で取扱われている非対称型に関連してこの問題が、微分方程式論または解析一般の立場ではどんなことに関連してゐるかを出来るだけ簡単な例を通じて説明して行きたい。しかし日常は確率論の研究には直接にはたがさぬといふ人達を中心にした集まりでの報告であるので、説明の仕方としては可能な限り確率論的な手法をさけて行きたい。その結果、どうしても問題の考え方が中心になつて具体的な結果の話が少なくなると思うが、やむを得ないと思う。しかも出て来る微分方程式は簡単なもののだけで、その方の研究者には全く役に立たない可能性もあるが、違った方向の研究者の間の交流の第一歩になれば幸いである。

§ 2. semi-linear 方程式の解型化----(I). 確率過程

の中, 最もよく研究されているものは Markov 過程であるが, これは原理的には解型の発展方程式に関連している。したがって Markov 過程と非解型方程式を関連づけて考えようと思うと, まずその方程式を解型化して考えることが必要になる。ここで解型化という時は単に近似ではなくて, 与えられた方程式と同等な解型方程式を得ることを言う。semi-linear 方程式の中にはこのような解型化が比較的簡単に出来る時がある, まずその考えを非解型項に重点のある例を用いて説明することから始めよう。分岐問題を始め多くの現象の取扱いで

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = u(t)^2 - u(t) \\ u(0) = \lambda \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty),$$

またはその一般化が出来る。ここで $0 < \lambda \leq 1$ の時を考えることにする。この解は

$$(2.2) \quad u(t) = \frac{\lambda e^{-t}}{1 - \lambda(1 - e^{-t})} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} (u(0))^n$$

と書ける。いま $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ とし, 上の解 $u(t)$ より

$$(2.3) \quad u(t, x) = (u(t))^x, \quad x \in \mathbb{Z}_+$$

で $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 上の関数 $u(t, x)$ を定義すれば, これは次の方程式を満たすことが容易にわかる。

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = x \{ u(t, x+1) - u(t, x) \} & , \quad x \neq 0, \\ u(t, 0) = u(0, 0) & , \quad x = 0, \\ u(0, x) = \lambda^x & . \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z}_+,$$

はじめに与えた (2.1) は常微分方程式ではあったが、とにかく 非線型 であつたのには異なし、(2.3) の規則で $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$ になつたと 線型 な方程式 (2.4) が得られる。しかも單に線型であるのみならず、非常に特殊な発展方程式の型に属してゐることも實際的に示してゐる。

$$(2.5) \quad \begin{cases} p(t, 0, x) = \delta_{0, x}(x) \\ p(t, x, y) = \begin{cases} 0, & y < x, \\ A_{x, y} e^{-xt} (1 - e^{-t})^{y-x}, & y \geq x, \end{cases} \end{cases} \quad x \neq 0$$

とおく。ただし $A_{x, y} = \# \{ (n_1, n_2, \dots, n_x) ; n_1 + n_2 + \dots + n_x = y, n_i \in \mathbb{Z}_+ \}$

とする。(2.5) の定義から明らかなるやうに $p(t, x, y)$ は

$$(2.6) \quad \begin{cases} p(t, x, y) \geq 0, & \sum_{y \in \mathbb{Z}_+} p(t, x, y) = 1, \\ p(t+s, x, y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_+} p(t, x, z) p(s, z, y), \end{cases}$$

をみたし (2.4) の基本解になつてゐる。すなわち (2.4) の解

$u(t, x)$ は

$$(2.7) \quad u(t, x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_+} p(t, x, y) \lambda^y$$

と表わされる。また (2.2) の右辺の表現の核 $e^{-t}(1-e^{-t})^{d-1}$ は $p(t, x, y)$ になつてゐることを加へかる。(2.6), (2.7) は仮定を示すように, (2.4) の発着方程式が $\mathbb{R}_+$ 上の Markov 過程に対応してゐることを示してゐる。この證は仮定を解して, この例と全く同じ形を以て非線型化される偏微分方程式の例に移さう。

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + k(x) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x) (u(t, x))^n, \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d$$

なる初期問題は semi-linear な方程式で最もしばしば考へられるものである。前の例で出て来た $\mathbb{R}_+$ に相当するものはこの例ではつぎのようにして構成される。

$\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$ とし, $\mathcal{S}$ の n -重の symmetric product を $\mathcal{S}^n$ と書き, $\mathcal{S}$ には通常の通り $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$ より自然に導かれる位相を考へる。 $\mathcal{S}^n$ の元は $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x_j \in \mathcal{S}$, $j=1, 2, \dots, n$ で表わされる。また $\mathcal{S}^0 = \{\omega\}$ は extra point ω 一つと考へる。

$$\mathcal{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n$$

は $\mathcal{S}^n$, $n=0, 1, 2, \dots$ の位相和とする。こゝか前の $\mathbb{R}_+$ の役割を果たすことを示すのには $\mathcal{S}$ 上の関数 f 及び $\mathcal{S}$ 上の関数 $\hat{f}$ を次の形で定めるとよい。

$$(2.9) \quad \hat{f}(\underline{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m f(x_j), & \underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n, \\ 1, & n \geq 1, \\ & \underline{x} = \partial. \end{cases}$$

この記号を用いると $u(t, \underline{x})$ が (2.8) の解である時 $u(t, \underline{x})$

$= \widehat{u(t, \cdot)}(\underline{x})$ はつぎの方程式

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, \underline{x})}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, \underline{x}) + \sum_{j=1}^n k(x_j) \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x_j) u(t, [x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j, \dots, x_j}^m, x_{j+1}, \dots, x_n]) \\ u(t, \partial) = u(0, \partial) \\ u(0, \underline{x}) = \hat{f}(\underline{x}) \end{cases} \quad \underline{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n, \quad n \geq 1,$$

をみたす。(2.10) は $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ 上の方程式としてみたす時、弱型

であつて (2.9) の規則によつて (2.8) と同等なものである。

(2.6) へのべた性質を得るにはこゝに於ての仮定が不十分で、

$k(x)$, $\{p_k(x); k=0, 1, 2, \dots\}$ にもう少し仮定が必要である。それは

つゞいて仮に示すこととして次に述べる時と同じことが可能

なことを例をもちて示そう。

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u_j(t, x) + k^{(j)}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} p_{k_1, k_2}^{(j)}(x) (u_1(t, x))^{k_1} (u_2(t, x))^{k_2}, \\ u_j(0, x) = f_j(x) \end{cases}, \quad j=1, 2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

に替へては $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d \times \{1, 2\}$ ととり、上と同様に $\mathcal{S}$ を定義する。

$\mathcal{S}$ の点 $\underline{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ には $\underline{z}_j = (x_j, k_j)$, $x_j \in \mathbb{R}^d$,

$k_j \in \{1, 2\}$ とする。いま

$$k(x, j) = k^{(j)}(x), \quad p_{m_1, m_2}(x, j) = p_{m_1, m_2}^{(j)}(x)$$

$$u(t, (x, j)) = u_j(t, x), \quad f(x, j) = f_j(x),$$

とおく。また、 $u(t, \Xi) = \widehat{u(t, \cdot)}(\Xi)$ とする。

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, \Xi)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, \Xi) + \sum_{j=1}^n k(z_j) \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} p_{m_1, m_2}(z_j) u(t, [z_1, \dots, z_{j-1}, \overbrace{(x_j, 1), \dots, (x_j, 1)}^{m_1}, \\ \overbrace{(x_j, 2), \dots, (x_j, 2)}^{m_2}, z_{j+1}, \dots, z_n]) \\ u(t, \partial) = u(0, \partial) \\ u(0, \Xi) = \hat{f}(\Xi) \end{cases}, \quad \Xi = [z_1, z_2, \dots, z_n] \in \mathcal{S}^n,$$

と表す。ただし

$$\Delta v(\Xi) = \sum_{j=1}^n \prod_{m \neq j} \pi v(z_m) \Delta_{x_j} v(x_j, k_j),$$

$$\Xi = [(x_1, k_1), (x_2, k_2), \dots, (x_n, k_n)],$$

とする。もっと一般にしても類似のことかどこまで出来るかは上の3つの例を例とほゞ明らかである。=>まで来ると個別例に考えるより上の考察の逆の経路をたどるとか有効なとか次第に明らかになる。このことについては次の節で述べる。

§ 3. branching semi-group. " $\mathbb{C}_0(\mathbb{Z}_+) = \{f; f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{連続}, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ とし, $p(t, x, y)$ は (2.5) で与えられているものとする, "

$$(3.1) \quad T_t: \mathbb{C}_0(\mathbb{Z}_+) \longrightarrow \mathbb{C}_0(\mathbb{Z}_+),$$

$$T_t f(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_+} p(t, x, z) f(z)$$

で定まる $\{T_t; t \geq 0\}$ は $\mathbb{C}_0(\mathbb{Z}_+)$ 上の線型作用素の作半群で, しかも強連続, 非負で contraction semi-group である. このことは § 2 の (2.6) の T_t ことと主として起因している. このような性質を持った半群を § 2 の他の例で与えるのには条件が足りぬ. " $\mathbb{C}_0(\mathbb{Z}_+)$ かつ

$$(3.2) \quad 0 \leq h(x) < \infty, \quad h \neq 0$$

を仮定しよう. さうに

$$F(x; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \xi^n, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

とし T_t 時

$$(3.3) \quad F(x, 0) = F(x, 1) = 0,$$

$$F(x, \xi) < 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

を仮定する. そうすると (2.8) の初期条件 f が $0 \leq f \leq 1$ を

満たせば解 $u(t, x) = u(t, x; f)$ は

$$(3.4) \quad 0 \leq u(t, x) \leq 1$$

を満たすことが言える. 通常 (2.8) を semi-linear 方程式としてだけみれば (3.2), (3.3) より導かれる (3.4) の性質

T に注目することが多し。しかしわれわれが注目したいのはもう少し深い性質である。(3.4) より任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ と $0 \leq f \leq 1$ に対し

$$(3.5) \quad 0 \leq u(t, x; \lambda f) \leq 1$$

が成立する。これを形式的には

$$u_n(t, x; f) = \left(\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} u(t, x; \lambda f) \right)_{\lambda=0}$$

が定義出来る。問題は任意の正整数 $n \geq 1$ に対し

$$(3.6) \quad u_n(t, x; f) \geq 0$$

が成立つかどうかは深い関係がある。もしわれわれが (3.2)

の他に

$$(3.7) \quad \begin{cases} p_0(x) = 0, & p_1(x) = -1, & p_n(x) \geq 0, & n \geq 2 \\ \sum_{n \geq 2} p_n(x) = 1 \end{cases}$$

を仮定すれば実際 (3.6) を導くことが出来る。この事情は例えは N. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe [10] に詳しいが、もう少し簡単のため $k(x) \equiv 1$ とし、この事情の概略を述べておこう。まず記号とし、 $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}$ の逆りとし、

$$\langle f|g \rangle(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \underline{x} = \partial, \\ g(x), & \underline{x} = x \in \mathcal{S}, \\ \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{1!} f(x_k) g(x_k) \prod_{j=k+1}^n f(x_j), & \underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n, \\ & n \geq 2, \end{cases}$$

を導入する。また半群 $\{T_t^0; t \geq 0\}$ は

$$\widehat{(T_t^\circ f)}_{|S}(x) = T_t^\circ \hat{f}(x)$$

と $T_t = I$,

$$T_t^\circ f(x) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

と与えられるとする。ここで $f|_S$ は S 上の関数 f の S 上

への制限を意味するとする。良く知られたように (t, x)

$\in \mathbb{R}_+ \times S$ を固定した時 S 上の substochastic な測度 $T^\circ(t, x, d\gamma)$

が存在し

$$T_t^\circ f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} T_t^\circ(t, x, d\gamma) f(\gamma)$$

と書ける。いま行列に関する permanent についての公式と近似

定理に注意すれば $\mathbb{R}_+ \times S$ 上の非負な substochastic な測度

$\Xi(x; ds d\gamma)$ が存在し、任意の S 上の連続関数 (有界) に対し

$$\int_0^t \int_S \Xi(x; ds d\gamma) \hat{f}(\gamma) = \int_0^t \left\langle T_s^\circ f \mid \int_0^s T^\circ(s, \cdot, dz) \sum_{m \geq 2} p_m(z) f(z)^m \right\rangle (x) ds$$

が成り立つ。これを (2.10) と同等な積分方程式

$$(3.8) \quad u(t, x) = T_t^\circ \hat{f}(x) + \int_0^t \int_S \Xi(x; ds d\gamma) u(t-s, \gamma), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times S$$

が得られる。とこの方程式は線型であるので通常の場合同様に

ノイマン級数式に解が得られる。実際つぎのようには

よい。

$$\gamma_0(x; t, d\mathbb{P}) = \delta_{\{x\}}(d\mathbb{P}), \quad \gamma_1(x; t, d\mathbb{P}) = \int_0^t \mathbb{P}(x; ds d\mathbb{P})$$

$$\gamma_n(x; t, d\mathbb{P}) = \int_0^t \int_S \mathbb{P}(x; ds d\mathbb{P}) \gamma_{n-1}(z; t-s, d\mathbb{P})$$

$$\int_0^t \mathbb{P}^{(n)}(x; ds d\mathbb{P}) = \gamma_n(x; t, d\mathbb{P})$$

$$T^{(n)}(t, x, d\mathbb{P}) = \int_0^t \int_S \mathbb{P}^{(n)}(x; ds d\mathbb{P}) T^{(n-1)}(t-s, z, d\mathbb{P})$$

として逐次定義して行けば (3.8) の解は

$$(3.9) \quad T(t, x, d\mathbb{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}(t, x, d\mathbb{P})$$

$$u(t, x) = \int_S T(t, x, d\mathbb{P}) \hat{f}(\mathbb{P}) \quad (\equiv T_t \hat{f}(x))$$

と心得る。しかも $\gamma_n, \mathbb{P}^{(n)}, T(t, x, d\mathbb{P})$ の定義より

$$(3.10) \quad u(t, x) = T_t \hat{f}(x) = \widehat{(T_t \hat{f})}_{\mathcal{B}}(x)$$

を示すことが出来る。このことは当然期待出来ることである。至として (3.7) から、任意に固定した $T = (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times S$ に対して $T(t, x, d\mathbb{P})$ は S 上の測度で、非負であり

$$T(t, x, S) \leq 1$$

を示す。再び (2.6) に相当する性質を示すことは出来る。 (3.7) の条件より示す性質は期待出来ることである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2(u-1), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

としるべしと形式的に T_t を定義することは出来るが、
(3.6) の性質がこわい、 $T(t, x, dy)$ は非負の性質を持つて
くたさることからわかる。

これまでの2つの例をふくめて一般の事情をはずきりさ
せるためには、特定の空間ではなく一般に compact な距離空間を
をとってくる。(具体的例では必要ならば適当な方法で、
与えられた空間を compact 化しておく。)。それから示して
る、 S の作り方はこれまでと同じにする。さうして

$$\hat{S} = S \cup \{\Delta\}$$

は S の一長 compact 化とし、 S 上の関数 $\hat{f}$ も

$$\hat{f}(\Delta) = 0$$

とし $\hat{S}$ 上に拡張しておく。そして $\hat{S}$ 上の連続関数
全体の作る Banach 空間を $C(S)$, $C(\hat{S})$ の記号で表わす。また
 $C_0(\hat{S}) = \{f; f \in C(\hat{S}), f(\Delta) = 0\}$ とする。これは非負, contraction,
群型作用素

$$T_t : C_0(\hat{S}) \longrightarrow C_0(\hat{S})$$

の作る強連続な semi-group $\{T_t; t \geq 0\}$ を考える。この場合良
く知られているように、各 $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \hat{S}$ には $x \neq \Delta$ と、 $\hat{S}$ 上の
substochastic な測度 $T(t, x, dy)$ が存在し、

$$(3.11) \quad T_t f(x) = \int_{\hat{S}} T(t, x, dy) f(y), \quad f \in C_0(\hat{S}),$$

と書ける。さらに、任意の $f \in C(S)$, $0 \leq f < 1$ に対して

$$(3.12) \quad T_t \hat{f}(x) = \widehat{(T_t f)}_g(x), \quad x \in \hat{S},$$

が成り立つならば、 $x \mapsto T_t$ 半群 $\{T_t; t \geq 0\}$ は 分枝半群 (branching semi-group) と呼ばれる。そうすると §2 の方程式 (1) に関連して構成した (3.1) と (3.10) の半群は分枝半群の特別の場合になる。

一般に compact な距離空間 (必要に応じてもう少し一般化出来る) E があるとし、 E の上の連続関数全体の作る Banach 空間 $C(E)$ と contraction の性質を持った非負な射型作用素

$$T_t: C(E) \longrightarrow C(E)$$

の作る強連続な semi-group $\{T_t; t \geq 0\}$ を考える。この時、

$(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times E$ に対して E 上の substochastic な測度,

$T(t, a, db)$ が存在し

$$T_t f(a) = \int_E T(t, a, db) f(b), \quad f \in C(E)$$

と書ける。さらに $w: \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ なる第 1 種不連続な右連続な関数全体の作る空間を W とし、 W のすべての cylinder set を含む最小の σ -algebra を $\mathcal{B}$ とする。このとき W の cylinder set とは $\mathbb{R}$ のように与えられる集合のことである。

任意の n と任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ なる組 $(t_1, t_2, \dots, t_n)$,
 と任意の E の Borel subset $A_1, A_2, \dots, A_n$ に対して

$$(3.13) \quad G = \{w; w \in W, w(t_1) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n\}.$$

上の semi-group $\{T_t; t \geq 0\}$ があるならば $\{W, B\}$ 上の確率測
 度の系 $\{P_a; a \in E\}$ が存在しつぎの関係を満たす: (3.13)

の形の任意の cylinder set に対して

$$P_a[G] = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} T(t, a, db_1) T(t_2 - t_1, b_1, db_2) \dots T(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, db_n).$$

こうして出来る組 $\{W, B, P_a; a \in E\}$ は state space E を持つ
Markov 過程 といひ, $T(t, a, db)$ はその推移確率といひ。

とすると分枝半群 $\{T_t; t \geq 0\}$ がある時は任意の $f \in C(\hat{S})$
 に対して $T_t f(\Delta) = f(\Delta)$ とし $C(\hat{S})$ 上に作用出来る。そうすると
 上に説明した T は $state\ space\ \hat{S}$ を持つ Markov 過程が
 存在する。この Markov 過程 $\{W, B, P_x; x \in \hat{S}\}$ は分枝半群
 $\{T_t; t \geq 0\}$ に対応する 分枝 Markov 過程 といひ。この用語を
 用いると方程式 (2.1) または条件 (3.2), (3.7) を満たす方程式
 (2.8) に対応して分枝 Markov 過程 $\{W, B, P_x; x \in \hat{S}\}$ が与
 えられる。作らねばならない。しかも $u(t, x)$ の解 $u(t, x)$
 はこの分枝 Markov 過程の推移確率 $T(t, x, dx)$ より

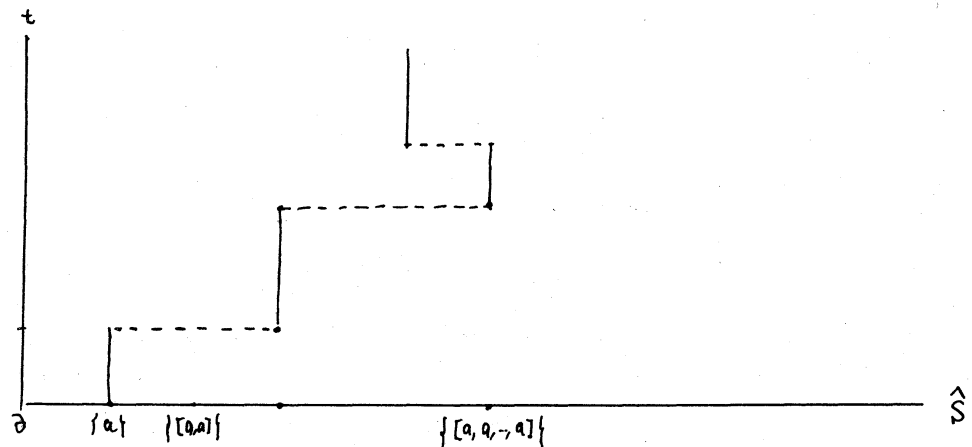
$$(3.14) \quad u(t, x) = \int_{\hat{S}} T(t, x, d\mu) \hat{f}(\mu), \quad f \in C(\mathcal{S}), \quad 0 \leq t < 1,$$

の形で作られることがわかる。逆に言うと、これらの方程式は分枝 Markov 過程より (3.14) の形で解が構成される非群型方程式のクラスに属していることとなる。とにかく、われわれは確率過程のクラスに対応して非群型方程式の1つのクラスを設定すること出来たことになる。これは群型作用素の作る半群と言えば分枝半群のクラスに相当している。

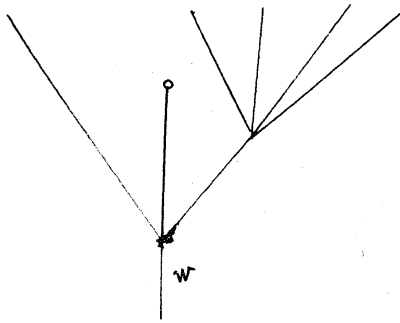
確率論的な話にはあまり深入りしない方針であるが、なぜ分枝 Markov 過程の用語が用いられるかだけ簡単にのべることにしよう。与えられた集合 $\{a\}$ の時は $\hat{S}$ は

$$\{a\}, \{a\}, \{[a, a]\}, \dots, \{[a, a, \dots, a]\}, \dots, \Delta$$

なる集合である。 $\bar{W}$ の元 w は $w(0) = a$ ならば例えば下の図のような形をしている。したがって t における $w(t)$



は下の tree の高さ h の枝の数で表わされる。すなわち W の



元 w は tree と同一視出来る。と

こゝで tree は粒子が分裂を繰り返して増加して行く状態を記述していると考えられる。

上の同一視で分枝 Markov 過程の $P_x, x \in \hat{S}$ は tree の集りの

上に定義されていると考えられるので、

分枝 Markov 過程は random なある法則に従って分裂

して行く粒子の集まりについての数学的模型と考えられる。一

般の場合も類似の説明が出来、 $\mathcal{S}^n$ は粒子が n 個になった

時の粒子の軌跡が之がなすべき空間である。特に $\mathcal{S}^1$ は粒

子がなくなってしまう所で、 Δ は粒子の数が無限大になった

ことを表わす集合になっている。もちろんこのように説明

はあくまで数学的事実と応用上の現象とつながり直観的な証に

ちがなにか、分枝 Markov 過程についての数学としての研究

を進めるときの筋道の理解に非常に役には立つことが多々ことは

注意するに値すると思われる。

こゝで分枝 Markov 過程は分裂現象の模型とすべきだが、形

式的に統一して表したので、実際は分裂は全くなく増え続ける

場合をふくんでいる。たとえば $\mathcal{S} = \{a\}$ とし、 $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^+$

の場合を考えると、

$$\begin{cases} \frac{du(t, n)}{dt} = n(u(t, n-1) - u(t, n)) \\ u(0, n) = \lambda^n \end{cases}$$

が成り立ち、 u の解は

$$u(t, n) = [(1 - e^{-t}) + \lambda e^{-t}]^n$$

であるので、

$$T_t f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} T(t, n, k) f(k), \quad f \in C_0(\hat{S}),$$

$$T(t, n, k) = \begin{cases} \binom{n}{k} (1 - e^{-t})^{n-k} e^{-kt} & , \quad k \leq n, \\ 0 & , \quad k > n, \end{cases}$$

なる半群を持つた分枝 Markov 過程が存在する。上の推移確率の形から、

$$P_n[\{w; w(t) \geq n+1 \text{ なる } t \text{ が存在する}\}] = 0$$

が言える。従って先に行つた現象的説明によれば粒子の数は増加するとはなかり。さきのやみから Markov 過程について基礎的な事実を用ゐると、粒子の数は逐次1つづつ減つて行くことが容易に示される。

§4. semi-linear な方程式の非線型化。---- (II)。本質的に

は §3 で取扱った場合と同じであるが、もう少し強い条件に
 ついては multiplicative な性質に対応する非線型方程式のク
 ラスがある。§2 の方程式と似ているが、例として初期値問
 題

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{d\gamma(t)}{dt} = -\frac{\beta}{2} \gamma(t)^2 + \alpha \gamma(t) \\ \gamma(0) = \lambda \end{cases}$$

を考えてみよう。ここで $0 < \beta < \infty$ とする。この解は

$$\gamma(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{\alpha t} \left(1 - \frac{\beta \lambda}{2\alpha} (1 - e^{\alpha t})\right)^{-1}, & \alpha \neq 0, \\ \lambda \frac{1}{1 + \frac{\beta t}{2} \lambda}, & \alpha = 0, \end{cases}$$

で与えられる。いま

$$(4.2) \quad u(t, x) \equiv u(t, x; \lambda) = e^{-x \gamma(t, \lambda)}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

とおけば $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上の関数を得られ、これは

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = x \left\{ \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right\}, \\ u(0, x) = e^{-\lambda x} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

をみたす。これは今回も線型の方程式である。ここで (4.2)

の性質は (2.3) に相当するが、前者は $\mathbb{R}_+$ での条件での評価

値は $\mathbb{Z}_+$ のみでの条件にまつている。これは、(2.4) は

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 上の方程式であるのに対し (4.3) は $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上の

方程式にまつている。Markov 過程論で良く知られているよう

(4.3) は一次元拡散過程に対応する熱力学方程式である。(K. Ito - H.P. McKean [12] 参照)。

もう少し一般な例としてほつぎのようになるものが得られる。

$]0, \infty[$ 上の非負な測度 $\eta(d\eta)$ を

$$\int_0^\infty \frac{\eta^2}{1+\eta^2} \eta(d\eta) < \infty$$

を考へ、関数 $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^1$ を

$$h(\xi) = c_0 + c_1 \xi - c_2 \xi^2 - \int_0^\infty \left(e^{-\xi \eta} - 1 + \frac{\xi \eta}{1+\eta} \right) \eta(d\eta)$$

で定める。 $\Rightarrow$ c_1 は定数で、 $c_0, c_2 \geq 0$ である。このように h を 1 つ定め初期値問題を

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta \psi(t, x) + h(\psi(t, x)) \\ \psi(0, x) = f(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

を考へる。これは (4.1) の一般化であるが、(4.3) に相当するものはほつぎのようになり得る。 $\mathbb{R}^d$ の一兵 compact 化を $\mathcal{S}$ とし、 $\mathcal{S}$ 上の非負な Radon 測度の作る空間を $\mathcal{G}$ とする。この $\mathcal{G}$ には標準的な方法で位相が定義出来、Markov 過程の議論を進めるには充分な性質を持っている。現在は形式的な話と重複にしているののでこの点にはふれず、必要をこは成り立っているとして前に進む。 $\mathcal{G}$ の一兵 compact 化を $\hat{\mathcal{G}}$ とする。(2.9) にあつて、 $\mathcal{S}$ 上の関数 f から $\hat{\mathcal{G}}$ 上の関数を

$$\varphi_f(\mu) = \begin{cases} \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx) \right], & \mu \in \hat{G}, \\ 0, & \mu = \Delta, \end{cases}$$

で定める。ただし Δ は $\hat{G}$ の compact 化で附加された点とする。

$\hat{G}$ 上の連続関数の作る Banach 空間を $C(\hat{G})$ で表わし, $C_0(\hat{G})$

$= \{ f; f \in C(\hat{G}), f(\Delta) = 0 \}$ とする。いま $0 < f < \infty$, $f \in C(\mathbb{R})$

をとって来ると, それは対応する (4.4) の解 φ_t である

$$T_t[\varphi_f](\mu) = \varphi_{\varphi_t}(\mu)$$

とし $\{T_t; t \geq 0\}$ を作れば $T_t[T_s[\varphi_f]](\mu) = T_{t+s}[\varphi_f](\mu)$

であり T_t は $C_0(\hat{G})$ 上の非負, 強連続な contraction semi-group

に自然な形で拡大される。(S. Watanabe [30] 参照)。この

とは確率論ではよく知られた無限分解可能な確率分布のラフ

ス変換の性質にまついて示されることであることは事実

を認めれば先に進むことになる。こうして出来る半群の生成作

用素を A とすれば, compact support を持つ又連続的微

分可能な f かつ $f > 0$ なるものに對し

$$A\varphi_f(\mu) = -\varphi_f(\mu) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} \Delta f + h(f) \right)(x) \mu(dx)$$

とあることに注意すれば, そのようなる f は存在し

$$u(t, \mu) = T_t[\varphi_f](\mu)$$

と仮定す

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u(t, \mu) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} \Delta \varphi(t, x) + h(\varphi(t, x)) \right) \mu(dx) \\ u(0, \mu) = g_f(\mu) \end{cases}$$

が成り立つ。

このように (4.1) と (4.4) は同じことは § 3 と非常に良く似たことが成り立つということがわかって来たので、つぎのような一般化が自然に導かれる。非負対称型作用素

$$T_t : C_0(\hat{G}) \longrightarrow C_0(\hat{G}),$$

の作る強連続な contraction semi-group $\{T_t; t \geq 0\}$ で、

$$(4.6) \quad T_t[g_f](\mu) = g_{T_t[g_f]_{\mu}}(\mu), \quad 0 < f < \infty$$

を満たすものを continuous branching semi-group と呼ぶ。ただし $F|_S(x) = F(\delta_x)$ とする。§ 3 のべたような Markov 過程の一般論より continuous branching semi-group に対応して、Markov 過程で $\hat{G}$ を state space とする $\{W, B, P_\mu, \mu \in \hat{G}\}$ が存在するものを continuous branching Markov process と呼ぶ。こうして上にのべた例の逆を述べると continuous branching Markov process がある時 $u(t, x) = T_t[g_f]_{\mu}(x)$ の満たすものとして非対称型方程式の新クラスが得られることになる。これは § 3 の条件を強めたものであることを知るには

写像 ν

$$\nu: S \ni x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in G$$

を定義する。 $\nu(S)$ は離散測度の作る G の部分集合で和に閉じて閉じている。一方 (4.6) より

$$(4.7) \quad T_t[\varphi_f](\mu_1 + \mu_2) = T_t[\varphi_f](\mu_1) T_t[\varphi_f](\mu_2)$$

が $T=1$ のとき、これは $\nu(S)$ に PB を定義するところと等しい。 $T=1$ の場合に対応している。

G の部分集合で和に閉じて閉じているクラスとして考えれば (4.7) の性質が定義可能になる。 δ と ν のようなクラスのとおりを工夫することによってまた別の *multiplicative* な性質が定義出来る。そしてそれは非対称型方程式の1つのクラスを定めることになる。このように例として例えは T. Fujimagari - M. Motoo [4] の Cascade semi-group & cascade process の議論がある。

なお (4.5) は測度の空間の方程式でわかりにくい。 δ が PB の元からなる場合はこの節の初めの例で $T=1$ には PB 次元の空間の方程式になる。

§ 5. Boltzmann 型の方程式. 関数空間における積のとり方には工夫をすれば, それに対応した multiplicative な性質をもつて非線形型方程式のクラスがきまってくることを示すべし。最近 H. Tanaka [27] は Boltzmann 型の方程式に関連した multiplicative な性質を導入し, その方程式の Markov 過程と関連した取扱いを行った。その概略をのべる前に簡単な例の話から始めよう。いま

$$\ell^{(1)}(\mathbb{Z}_+) = \left\{ \xi; \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |\xi(n)| < \infty, \xi \in \mathbb{C}(\hat{\mathbb{Z}}_+) \right\}$$

とし, $\otimes$ は convolution を定義しよう。すなわち $\xi, \eta \in \ell^{(1)}(\mathbb{Z}_+)$ に対し

$$(5.1) \quad \xi \otimes \eta(n) = \sum_{i=0}^n \xi(i) \eta(n-i)$$

とおく。一方 state space $\hat{\mathbb{Z}}_+$ を持つ分枝 Markov 過程 $\{W, B, P_x; x \in \hat{\mathbb{Z}}_+\}$ を考え, それに対応する半群 $\{T_t; t \geq 0\}$ としよう。それから T_t の dual 非線形型作用素 H_t を

$$(5.2) \quad \sum_{x \in \hat{\mathbb{Z}}_+} H_t f(x) g(x) = \sum_{x \in \hat{\mathbb{Z}}_+} f(x) T_t g(x), \quad f \in \ell^{(1)}(\mathbb{Z}_+), g \in \mathbb{C}(\hat{\mathbb{Z}}_+)$$

で定める。 $\{T_t; t \geq 0\}$ の性質から $\{H_t; t \geq 0\}$ は半群を作っている。分枝 Markov 過程の一般論より $\{T_t; t \geq 0\}$ の生成作用素 A はつぎのように表わされる。

$$A f(n) = n \left\{ \sum_{\substack{k+n \\ k \geq n-1}} p_{k-n+1} f(k) - f(n) \right\}, \quad n \geq 1, \quad A f(0) = 0,$$

ただし,

$$p_k \geq 0, \quad p_1 = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

をみたす。また $\mathbb{Z}_+$ 上で f が ∞ へ近づくときは $Af(\infty) = 0$ とする。以下
話を簡単にするために

$$p_0 = 0$$

と仮定する。ここで $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \{H_t; t \geq 0\}$ の生成作用素 A
を以下のように形式的には

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_+} A f(x) g(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+} f(x) A g(x)$$

が成り立つ $\mathbb{Z}$ の f と g は意味のあるクラスの中でとれば

$$(5.3) \quad A f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ -f(x), & x=1, \\ \sum_{n=1}^{x-1} n p_{x-n+1} f(n) - x f(x), & x \neq 1, x \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & x = \infty, \end{cases}$$

であることがわかる。いま $k \leq x-1$ に對して

$$g(x, k) = \begin{cases} 0, & x=1, \\ \frac{k}{x} p_{x-k+1}, & x \geq 1, x \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

とおけば $g(x, k) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{x-1} g(x, k) \leq 1$ が言えるの

で, $\{H_t; t \geq 0\}$ は $C_0(\mathbb{Z}_+)$ 上の強連続な非負の contraction
semi-group と表わされ, §3 の $\mathbb{Z}$ の T は Markov 過程

が対応している。しかも $\{H_t; t \geq 0\}$ は

$$(5.4) \quad H_t \xi \otimes \eta = H_t \xi \otimes H_t \eta$$

なる multiplicative な性質を持つている。このことは convolution の generating function はそれぞれの generating function の積という、ラプラス変換の性質の反映に他ならない。実際任意の $0 < f < 1$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} H_t(\xi \otimes \eta)(n) \hat{f}(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi \otimes \eta(n) \widehat{T_t \hat{f}}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n) \widehat{T_t \hat{f}}(n) \sum_{m=0}^{\infty} \eta(m) \widehat{T_t \hat{f}}(m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_t \xi(n) \hat{f}(n) \sum_{m=0}^{\infty} H_t \eta(m) \hat{f}(m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (H_t \xi) \otimes (H_t \eta)(n) \hat{f}(n). \end{aligned}$$

よって (5.4) が成り立つ。左側の $\hat{f}$ である。この場合は (5.4) と branching の性質は同等である。とこのことは (5.4) を $T = \tau$ $\{H_t; t \geq 0\}$ があつた時 (5.2) で $\{T_t; t \geq 0\}$ を定義すれば

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \xi \otimes \eta(n) T_t \hat{f}(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_t(\xi \otimes \eta)(n) \hat{f}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (H_t \xi) \otimes (H_t \eta)(n) \hat{f}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n) T_t \hat{f}(n) \sum_{m=0}^{\infty} \eta(m) T_t \hat{f}(m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \xi(i) \eta(j) T_t \hat{f}(i) T_t \hat{f}(j) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $0 < g < 1$ にとり $\xi(i) = \eta(i) = g^i$ とすれば

$$(5.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g^n T_t \hat{f}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} T_t \hat{f}(i) T_t \hat{f}(j)$$

かつ $T_t = 1$. (5.5) を g について微分して

$$(5.6) \quad (n+1) T_t \hat{f}(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} T_t \hat{f}(i) T_t \hat{f}(j), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

を得る. (5.6) を $n=0$ とし $T_t \hat{f}(0) = 0$ or 1 を得る. $T_t \hat{f}(0) = 1$ とし $n=1$ の式, 同様に決めて行くと (5.6) より

$$T_t \hat{f}(n) = (T_t \hat{f}(1))^n$$

を得る. したがって $\{T_t; t \geq 0\}$ は branching semi-group になっている. T_t かつ方程式

$$(5.7) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \sum_{n \geq 2} p_n (u(t))^n - u(t) \\ u(0) = f \end{cases}$$

は $\{H_t; t \geq 0\}$ を対応していることを示すこともより. いま (5.7)

の解を $u(t)$ とし, それ以外に

$$\xi_{(n)} = (0, 0, \dots, 0, \overset{n}{\xi_n}, 0, \dots)$$

を考えると,

$$(5.8) \quad \widehat{u(t)}(n) \xi_n = \sum_{m=n}^{\infty} \hat{f}(m) H_t \xi_{(m)}$$

の式を得る. しかして $u(t) = T_t \hat{f}(1)$ と H_t の定義を用いた簡単な変形から得られる. 右の定義より明らかなように,

(5.3) および (5.8) の式はそれぞれ $\hat{\Sigma}_+$ 上の分枝 Markov 過程に対応する forward equation に関連している。(N. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe [9], II, §4.5, Example 4.3 参照)。

H. Tanaka [29] は branching の形ではなく、 $\pm$ の $\{H_t; t \geq 0\}$ のために (5.4) の multiplicative の性質に注目し、 δ が一般の場合もよくに相当するものを導き Boltzmann 型の方程式に適用することを行っている。こゝでは話を非常に簡単な場合には付き、しかも $\delta = \{-1, 1\}$ だけの方程式について H. Tanaka の考えの概略を説明し $T=1$:

$$(5.9) \quad \frac{du(t, x)}{dt} = \sum_{y \in \delta} \left\{ \sum_{z \in \delta} \pi(y, z; x) u(t, z) - \delta(x, y) \right\} u(t, y).$$

こゝで

$$\pi(\xi, \eta; 1) = \begin{cases} 1, & \xi = \eta \\ 0, & \xi \neq \eta \end{cases}, \quad \pi(\xi, \eta; 0) = \begin{cases} 1, & \xi \neq \eta \\ 0, & \xi = \eta. \end{cases}$$

実は (5.9) で $0 \leq u(t, x) \leq 1$, $\sum_{x \in \delta} u(t, x) = 1$ なる解が存在する。

そうすると (5.9) は

$$\frac{du(t, x)}{dt} = \begin{cases} u(t, 1)^2 + u(t, 1)^2 - u(t, 1), & x = 1 \\ 2u(t, 1)u(t, -1) - u(t, -1), & x = -1 \end{cases}$$

となり H. P. McKean [9] が導入した 2-state model of Maxwellian gas の方程式になる。

$\delta^{(n)}$ は δ の n -fold product space とし、direct sum の位

面 $\mathcal{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}^{(n)}$ と表す。 $\mathcal{E}_k$ は $\mathcal{S}^{(k)}$ 上の有界関数の空間で、
 $\mathcal{E}$ は $\mathcal{Q}$ 上の関数の空間で $\mathcal{S}^{(k)}$ への制限が $\mathcal{E}_k$ に属するよ
 うな元からなるものとする。

$$\mathcal{E} \ni \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$$

次の記号を用いる。この時

$$\|\varphi\|_k = \sum_{j=k}^{\infty} \|\varphi_j\|, \quad \|\varphi_j\| = \sup_{x \in \mathcal{S}^{(j)}} |\varphi_j(x)|$$

なる semi-norm を与えると $\mathcal{E}$ は Fréchet space になる。 $\mathcal{M}$

は $\mathcal{S}$ 上の確率測度の全体とする。 $\mathcal{E}_k$ は $\mathcal{M}$ 上の関数で

$$(5.10) \quad \xi(f) = \int_{\mathcal{S}^{(k)}} f^k(dx) \varphi_k(x), \quad \varphi_k \in \mathcal{E}_k,$$

と表わされるものの全体とする。 $\Rightarrow$ f^k は $f \in \mathcal{M}$ の k
 重の直積測度とする。上の $\xi(f)$ の norm は (5.10) で特に φ_k

は symmetric にとり、これは $\mathcal{E}_k$ に対し $\|\xi\|_k = \|\varphi_k\|$ とすれば

$\mathcal{E}_k$ は Banach space になる。 $\mathcal{E}$ は $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $\xi_j \in \mathcal{E}_j$
 の作る空間とする。 $\sigma: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ をつぎの形で定義する。

$$(\sigma\varphi)_k(t) = \int_{\mathcal{S}^{(k)}} f^k(dx) \varphi_k(x), \quad \varphi \in \mathcal{E}.$$

次に $\mathcal{E}$ の元は積 $\xi \otimes \eta$ を

$$(5.11) \quad (\xi \otimes \eta)_k = \sum_{i+j=k} \xi_i \eta_j$$

で定義する。 $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$,

$$\underline{G} : \Xi \rightarrow \Xi$$

を

$$(5.12) \quad (\underline{G}\varphi)_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} -\varphi(x_1), & k=1, \\ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{z \in \mathcal{S}} \pi(x_i, x_k; z) \varphi_{k-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}) - k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_k), & k \geq 2 \end{cases}$$

で定義する。また $\sigma : \Xi \rightarrow \Xi$ は

$$\sigma \circ \varphi = \sigma \underline{G} \varphi$$

で定義する。いま $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$ なる恒等的に 1 の値をとる関

数に $\underline{G} \mathbb{1}$ をほどこすと $\underline{G} \mathbb{1} \leq 0$ になることに注意すると、

$\underline{G}$ は対応して自然の意味で minimal 対 Ξ 上の非負の射型作用

素 H_t の強連続な contraction semi-group $\{H_t; t \geq 0\}$ が存在す

る。少し注意すれば $\mathcal{W} = \mathcal{W}$ に対し Markov 過程 $\{W, B, P_x, x \in \mathcal{Q}\}$

が存在することになる。その推移確率を $P(t, x, \cdot)$ と書く

ことにしよう。上に定義した σ は derivation になっている。

すなわち, $\xi, \eta \in \Xi$ に対して

$$(5.13) \quad \sigma(\xi \otimes \eta) = (\sigma \xi) \otimes \eta + \xi \otimes (\sigma \eta)$$

が成り立つ。このことは実測つぎのようにして示される。一般

に Ξ を $\mathcal{S}$ に対応して (5.10) の内積にある Ξ の元を $\varphi^{(3)}$ と

書くことにしよう, (symmetric にとけば一意に決まる)。

そうすると定義から

$$\varphi_k^{(\xi \otimes \eta)} = \sum_{p+q=k} \varphi_p^{(3)} \varphi_q^{(1)} \quad (\text{またはその対称化})$$

とたす。さうすると、 $k=1$ の時は自然であるので、 $k \geq 2$

とし、

$$\begin{aligned}
 & (\alpha \zeta \otimes \eta)_k(+)+(\zeta \otimes \alpha \eta)_k(+)) \\
 &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) \sum_{p+q=k} \left\{ \varphi_p^{(\alpha \zeta)}(x_1, \dots, x_p) \varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1}, \dots, x_k) \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_p^{(\zeta)}(x_1, \dots, x_p) \varphi_q^{(\alpha \eta)}(x_{p+1}, \dots, x_k) \right\} \\
 &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) \sum_{p+q=k} \left\{ \pm \varphi_p^{(\zeta)}(x_1, \dots, x_p) \varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1}, \dots, x_k) \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_p^{(\zeta)}(x_1, \dots, x_p) \pm \varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1}, \dots, x_k) \right\} \\
 &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) \sum_{p+q=k} \left\{ -k \varphi_p^{(\zeta)}(x_1, \dots, x_p) \varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1}, \dots, x_k) \right. \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{z \in S} \pi(x_i, x_p; z) \varphi_{p-1}^{(\zeta)}(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_{p-1}) \varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1}, \dots, x_k) \\
 &\quad \left. + \sum_{i=p+1}^k \sum_{z \in S} \pi(x_i, x_k; z) \varphi_p^{(\zeta)}(x_1, \dots, x_p) \varphi_{q-1}^{(\eta)}(x_{p+1}, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_{q-1}) \right\} \\
 &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} f(x_1) \dots f(x_k) \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{z \in S} \pi(x_i, x_k; z) \varphi_{k-1}^{(\zeta \otimes \eta)}(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}) \right. \\
 &\quad \left. - k \varphi_k^{(\zeta \otimes \eta)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \right\} \\
 &= \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} f(x_1) \dots f(x_k) (\pm \varphi_k^{(\zeta \otimes \eta)})_k(x_1, x_2, \dots, x_k).
 \end{aligned}$$

よって (5.13) が示すところから $T = \pm 1 = \pm 3$.

11. $\mathcal{U}$ に対応する semi-group $\{S_t; t \geq 0\}$ とすれば定義より

$$S_t \sigma f = \sigma(H_t f)$$

となるが, (5.13) より S_t は multiplicative 性質, すなわち

$$(5.14) \quad S_t(\xi \otimes \eta) = S_t \xi \otimes S_t \eta$$

が成り立つ。これは (5.4) の性質の自然な拡張にすぎない。

このことを用いると方程式 (5.9) の解の性質を, あるいは有知な記号の表現式を得る。 $f \in \mathcal{M}$ を初期条件とする (5.9) の解を $u(t, x)$ とする。この時任意の $\varphi \in \mathcal{F}_R$ に対し

$$(5.15) \quad \sum_{x \in \mathcal{S}^{(k)}} u^k(t, x) \varphi(x) = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{x \in \mathcal{S}^{(m)}} f^m(x) (H_t \varphi)_m(x)$$

が成り立ち, ここで $\varphi = (0, \dots, 0, \overset{k}{\varphi}, 0, \dots)$ とする。この証明は $> k$ は省略するが, H. Tanaka [27], §3 の Theorem 1 の証明の step 3 にあり, (5.14) を用いて示される。

もっと一般の $\mathcal{S}$ の場合には (5.14) が成り立つ semi-group を研究すると, 仮にその結果の非群型方程式の応用について H. Tanaka [27] 参照。とにかく, $> k$ も (5.14) の性質と通して非群型方程式のあるクラスが (5.15) の表現を持つものとして定まってくる。

終りに $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k$ 上の branching semi-group に与える (5.4) の性

従ってこの固有値問題を正定値の T_t として用いることが出来ることを注意しておく。この時は前の仮定と違って $0 < \rho < 1$ となる。
 以下がよいが、しかも

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t 1$$

は常に存在するが、 $0 < c(1) < 1$ と仮定する。則ち $c(1) = c(n)$
 $= \hat{c}_B(n)$ とおける。 $0 < c \equiv \frac{1}{c(1)} \sum_{n=1}^{\infty} p_n c(n) - 1 < \infty$ と仮
 定すると、

$$H_t \varphi = e^{-ct} \varphi$$

なる Ξ_T 上の関数 φ が存在する。(5.4) より

$$H_t \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi}_n = e^{-nct} \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi}_n$$

となる。このことは $T_t^* f = \frac{1}{c} T_t [\hat{c} f]$ で定義される新 T
 は branching semi-group の固有値問題に非常に有効に使われ
 る。これらについては S. Karlin - J. McGregor [15], Y. Ogura [21],
 M. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe [9] 補足 II, 2 等参照。

また (5.4) の性質は convolution を $\mathbb{R}_+$ の場合には移すこと
 により、その代わりに continuous branching semi-group
 で $\mathcal{S} = \{a\}$ の場合には成り立つこともまた T_t 知られている。たと
 えばこの事実は Y. Ogura [21] の Theorem 3.1, Lemma 2.1, 2.2 等々
 で利用されている。この節については田中洋介との討論に
 及ぶ所が多い。

§ 6. creation について。 すでに § 3 で semi-linear 対称型作用素の正規化の方法を示したから、直接的に Markov 過程と対応するには (3.2), (3.7) のような性格の条件が必要であった。これらの条件のうちいくつかはわかれているようにあるかは当然問題になる。たとえば § 2 で示した

$$(6.1) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u(t)^2 - u(t) \\ u(0) = \lambda \end{cases}$$

のかわりに

$$(6.2) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u(t)^2 \\ u(0) = \lambda \end{cases}$$

を示しているようにあるか。いま $u(t)$ を (6.2) の解として、 $\mathcal{S} = \{1/x \mid x \in \mathbb{Z}_+$ とした時の $\mathcal{S}$ 上の関数

$$u(t, [(1, k_1), \dots, (1, k_n)]) = 2^{k_1 + \dots + k_n} (u(t))^n$$

を示すのは (6.2) は

$$(6.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, (1, 0))}{\partial t} = 2 \left[\frac{1}{2} u(t, [(1, 0), (1, 0)]) + \frac{1}{2} u(t, (1, 1)) - u(t, (1, 0)) \right] \\ u(0, (1, 0)) = \lambda \end{cases}$$

と書きかえられる。これをまた § 3 の方法で $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 上の非負対称型作用素の強連続 contraction semi-group $\{T_t; t \geq 0\}$ と対応させることが出来る。ただしこの作用素が正の測度による核で表現されることは注意して T_t が $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ 上の

なる正非有界なある種の関数にほどこせることと(4)の条件を
加えて来る。この考えはもっと一般に適用出来るが、たとえ

$$(6.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + k(x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) (u(t, x))^n \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

す、たとえ

$$(6.5) \quad k(x) \geq 0, \quad k \not\equiv 0, \quad p_n(x) \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) = 1$$

が成り立つときは方程式を形式的に次のように変形し

て考えよう。 $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上の関数

$$u(t, [(x_1, k_1), \dots, (x_n, k_n)]) = 2^{k_1 + \dots + k_n} \widehat{u(t, \cdot)}(\underline{x})$$

$$\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]$$

と考えると、

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, (x, 0))}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, (x, 0)) + 2k(x) \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) u(t, [\widehat{(x, 0), \dots, (x, 0)}]) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u(t, (x, 1)) - u(t, (x, 0)) \right] \\ u(0, (x, 0)) = f(x) \end{cases}$$

と(6.4)の右辺は(6.5)の方法を適用すればよい。

(6.4)を更に連立の場合に1つ、 $\mathcal{S}$ や Δ の部分を一般
化するにとり(6.5)と同じ考え方で出来る。このように方程式を
偏微分方程式の解をいさぐのには実際適用した例として、

M. Nagasawa - T. Siraio [23] の結果がある。これは H. Fujita [6]
で論じられている問題と上のような変形を基礎に合枝 Markov 過程

を作った解いたものである。すなわち (6.1) と (6.2) の両者の関係は Markov 過程論では普通 creation と呼ばれる一般的な方法で相互に移るのと同じく、今は方程式が非線形であるのでもそのまゝは適用出来ず、しかも出来上がったものの形式は分枝 Markov 過程になっているようにするためには特別の工夫をしなければならないわけである。しかし本質的には基本に於いて同じであるので、上のよう変形をして分枝 Markov 過程の語に持ちこむことを creation によると言っている。

こうして (3.2), (3.7) が与えられた (6.5) があれば creation の形をとる方法と併せて分枝 Markov 過程について加え、逆にたどることにより新たな semi-linear なクラスが出現することになる。

§ 7. 符号のついた場合。たとえ § 6 の creation を入れても、

$$(7.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + u(1-u)^2$$

の取扱いは出来ぬ。この方程式は Fisher が集団遺伝に関する導いたもので、A. Kolmogorov - I. Petrowsky - N. Piskounoff [1] の興味深い研究の発表にまつているものである。これは S state space の変形で multiplicative な性質と関連させて来たが、その他にもっと一般的な方程式で解空間を制限

しと与えられた方程式を加えて来たと見ることも出来る。例え

ば“(7.1) ならば”

$$v = 1 - u$$

と新 $T = \frac{1}{2}$ に入ると (7.1) は

$$(7.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + u^3 + 2uv - u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v + v^3 + vu - v \end{cases}$$

となる。すなわち (7.2) の解 (u, v) が $u + v = 1$ をみたす時

と示すのは u は (7.1) をみたし、 v は

$$(7.1)' \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v - v^2(1-v)$$

なる (7.1) の dual とも言えるべき方程式をみたす。(7.2) ならば

§ 6 の creation と § 3 の 寿を合併せしめて用いるのは分枝 Markov

過程に帰着させることが出来る。この寿とは、例えは”

$$(7.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + F(u), \\ F(\xi) = \sum_{n=1}^{n_0} a_n \xi^n, \quad F(1) = 0 \end{cases}$$

ならば適用出来る。実際 $v = 1 - u$ とおけば”

$$(7.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + \sum_{n+m \geq 2} p_{n,m} u^n v^m - c_1 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v + \sum_{n+m \geq 2} q_{n,m} u^n v^m - c_2 v \end{cases}$$

$$p_{m,m} \geq 0, \quad g_{m,m} \geq 0$$

と変形される。もちろんこの型の変形は一通りではない。

(2.3) から (2.4) を導くのに重要なのは, (2.3) ならば $0 \leq u(0, x) \leq 1$ ならば $0 \leq u(t, x) \leq 1$ が成立していることで仮に形式的な計算である。(2.4) は § 6 と § 3 の矛盾を分枝 Markov 過程につけ加えるものである。

この矛盾を連立の場合に適用しようとするとき事情は非常に複雑になる。しかしいくつかの例についてはやはり適用出来る。たとえば超伝導の order parameter についての E. Abrahams - T. Tsuneto [7] の

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + (1 - u_1^2 - u_2^2) u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + (1 - u_1^2 - u_2^2) u_2 \end{cases}$$

については

$$v_1 = 1 - u_1, \quad v_2 = 1 - u_2$$

とおけば

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + u_1(1 + u_1)v_1 + u_1(1 + u_2)v_2 - u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + u_2(1 + u_1)v_1 + u_2(1 + u_2)v_2 - u_2 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = \Delta v_1 + u_1 u_2^2 + 2v_1^2 + u_1 v_1^2 - 2v_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = \Delta v_2 + u_1^2 u_2 + 2v_2^2 + u_2 v_2^2 - 2v_2 \end{cases}$$

とある。また M. Mimura - A. Nakaoke [2] 等が扱っている。

3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 - d_1 u_1 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 - d_3 u_2 u_4 + d_2 u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d_3 u_2 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} = -d_1 u_1 u_4 - d_3 u_2 u_4 \end{array} \right. , \quad d_i \geq 0$$

のとき $(u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2)$ を

$$v_1 = 1 - u_1, \quad v_2 = 1 - u_2, \quad v_3 = 1 - u_3, \quad v_4 = 1 - u_4$$

$$w_1 = 1 - (u_1 + u_2), \quad w_2 = 1 - (u_3 + u_4)$$

とおけば目的の変形が出来る。

こうして連立の方程式を高め *semi-linear* な方程式を *branching*

semi-group と対応するものとして得たもののことをここで

ことは出来ることになった。まず第1に注意することはこう

しても微分方程式の立場で考えたとすると *semi-linear* の中で

非常に特殊のケースだけが出て来るだろうということである。

第2に注意することはとにかく方程式を *branching semi-group*

と関連づけて考えられるだろうということであって、そのことから

どこだけ生産的な結論を引出せるかわからぬことである。

例えば解の漸近行動等とすべきものにはこのべた考えが有

効であった話を少くとも私は全く知らない。

§ 8. 爆発の問題について。 これまでお示した方程式にはいかんして Markov 過程を対応させるかに重点をおいて形式的なことをのべて来た。 そしてそのような対応のお示したものは非線型方程式の中では比較的単純なものであることも既に注意した。ところがそのようなクラスでも群型とは違った事情がある。そのような事情を調べる出発点みたいなものを示せるものとして分枝 Markov 過程との関連で非線型方程式の 2, 3 の問題をさつぎに挙げてみよう。最初はいわゆる爆発の問題を示せる。これまで何回もお示した方程式

$$(8.1) \quad \frac{du(t)}{dt} = F[u(t)] - u(t)$$

$$F[\xi] = \sum_{n \geq 2} p_n \xi^n, \quad p_n \geq 0, \quad F[1] = 1$$

を示せる。これははさるの意味で state space $\hat{\mathbb{Z}}_+$ を持つ分枝 Markov 過程 $\{W, B, P_x, x \in \hat{\mathbb{Z}}_+\}$ と branching semi-group $\{T_t; t \geq 0\}$ が対応している。記号をそろえるために (8.1) と同等に、 $v = 1 - u$ のお示す

$$(8.2) \quad \frac{dv(t)}{dt} = G[v(t)] - v(t)$$

$$G[\xi] = 1 - \sum_{n \geq 2} p_n (1 - \xi)^n$$

を示そう。そうすると常微分方程式論で古くからよく知られているように、解の一意性という定性的なことがある積分

の終端収束が判定される。具体的に言えば、初期条件

$$(8.3) \quad u(0) = 0$$

の下での (8.2) の解は

$$(8.4) \quad \int_0^+ \frac{d\beta}{G(\beta)} = \infty, \quad (< \infty)$$

に依り一意 (一意解でない) となる。このことを分枝

Markov 過程でみることのよりよいことになる。今 $w \in W$ の t 経路を確率論の慣習に従って $x(t) (\equiv x(t, w))$ と書き

$$(8.5) \quad e(w) = \inf \{ t; x(t, w) = \Delta \}$$

と置く。ここで Δ は $\Xi_+ = \Xi_+ \cup \{\Delta\}$ なる点で $t \rightarrow \infty$ と奔ることをいい。そうすると

$$(8.6) \quad e(t) \equiv 1 - T_t \hat{1}(1) = P_1[\{w; e(w) \leq t\}]$$

とおけば $e(t)$ が (8.3) の下での (8.2) の最大解になる。(

この事実はさすをみれば直接的にも容易に示せるが、もっと一般には例えば M. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe [10] 参照)。

したがって上のべた一意性の問題は

$$e(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

かどうかの問題と同等になる。とさす簡単にはかきこは

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e$$

が常に存在し、しかも

$$(8.7) \quad e = 0 \text{ または } 1$$

が言える。故に上の一意性の問題は $e=0$ であるかどうか

と同等になる。一方定義より

$$e = P[\{w; e(w) < \infty\}]$$

が容易に言えるので、 $e(w)$ が分枝 Markov 過程の道 $x(t, w)$ が始め $t = 0$ に到達する時間、すなわち分枝 Markov 過程が爆発する時間であることに注意すれば、(8.3) の下での (8.2) の解が一意的なことは分枝 Markov 過程の爆発が有限時間内には確率 1 で起きないことと同等であることが言える。そのおまけとして、この判定条件の (8.4) については

$$(8.8) \quad \int_W e(w) P_1(dw) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{G(\lambda)} + (\text{有界定数})$$

の関係式が分枝 Markov 過程についてこの標準的な計算によって示される。この式は、上の判定条件を仮定すれば

$$(8.9) \quad P_1[\{w; e(w) < \infty\}] = 1$$

が成り立つ

$$(8.10) \quad \int_W e(w) P_1(dw) < \infty$$

を意味している。また逆に確率論的な考察から (8.9) より (8.10) を示し、(8.8) と併せて上の判定条件を導くことも出来る。(M. Ikeda [8])。これらの事実は偏微分方程式の場合にも、一定の仮定の下で成り立つ。たとえば T. Saito [26] は次のような場合には一意性の問題と対応する分枝 Markov 過程の爆発の問題の関係を示している：

$$(8.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + k(x) (G(x; u(t)) - u(t)), \\ u(0, x) = 0. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$\Rightarrow$ G は

$$G(x; \xi) = 1 - \sum_{n \geq 2} p_n(x) (1 - \xi)^n, \quad p_n(x) \geq 0, \quad \sum_{n \geq 2} p_n(x) = 1$$

とする。彼が存在するのは例として $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ が存在し,

$$(8.12) \quad 0 < K_1 \leq k(x) \leq K_2 < \infty$$

が成り立つ場合がある。また全空間でなくためらう境界 ∂D を持つ有界領域 D で (8.11) が成り立つ、吸収壁の境界条件を持つ時は H. Fujita-S. Watanabe [6] で論じられている。

と $\Rightarrow$ が semi-linear 方程式の解の一意的性の問題については、これまでと違った事象の起る典型的な2つの場合がある。(M. Ikeda-S. Watanabe [17])。この二つの証明は省略して結果のべと事情を明らかにしよう。

(i) の場合。 D をためらう境界 ∂D を持つ有界領域とし,

$$(8.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u, & x \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha (G(u) - u), & x \in \partial D, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial n}$ は外法微分、 G は (8.2) に同じ。

(ii) の場合。(8.11) の特別の場合で (8.12) が成立している時。

成り立つ。

$$(8.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + |x|^\sigma (u - u^2) & , \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

(i) の場合は (8.11) で言えば $k(x)$ に相当するものが関数ではなく測度になつてゐるような時、対応する分枝 Markov 過程は D の内部では分裂 (死) して道 $X(t, \omega)$ が ∂D を訪問してゐる時にだけ分裂する。一意性については T とせば

$$G(\xi) \asymp \xi (\log \frac{1}{\xi})^p, \quad p > 0$$

の時とすると $p < 1/2$ の時は unique で $p > 1/2$ の時は non-unique である。

(ii) の場合については $\mathbb{R}^1$ の時は K Ito - H. P. McKean [2] で示す T ,

$$0 \leq \sigma \leq 2 \quad \text{ならば} \quad \text{unique}$$

$$\sigma > 2 \quad \text{ならば} \quad \text{non-unique}$$

ということが成り立つ。これは (8.11) で $k(x) = |x|^\sigma$ とした時は (8.12) の条件が成り立つ。この時は $G(\xi) = 2\xi - \xi^2$ であるのでも (8.11) が成立してゐれば常に一意であるが、 k が有界でないために一意性が成り立たないことがある。この時は対応する分枝 Markov 過程は $\mathbb{R}^d$ の外側に行けば行くほどしばしば分裂するようになる。 (8.12) の条件の下で問題を考えると偏微分方程式とは言ひながら一意的でなくなる

要因は非常に常微分方程式的であるのとは異なり、この場合は
この要因が真に偏微分方程式的とも言える場合である。

この場合については K. Ito - H. P. McKean [12] の証明と本質
的には同じである。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^b (u - u^2), & x \in]0, \infty[\\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

に於いてつぎのような結果が得られる。 $\Rightarrow$ 0 は $u=0$

は必要ならば境界条件とあわせて示される。

(A) $b > 0$ の時。

(a) $b > |a+2|$ ならば non-unique

(b) $a > -1, b \leq a+2$

または $a < -2, b < -a-2$ } ならば unique

(B) $b < 0$ の時。

(a) $a \leq -2, b < a+2$

または

$a > -2, b \leq -a+2$

} ならば non-unique

(b) $a < -3, b \geq a+2$

または

$a > -2, b > -a-1$

} ならば unique

(C) $b = 0$ の時は unique。

(M. Ikeda - S. Watanabe [11] 参照)。

$\Rightarrow$ ここで考えた semi-linear な方程式の解の一意的性の問題は
分枝 Markov 過程または branching semi-group $\{T_t; t \geq 0\}$ の立

場では言えは実は境界条件の問題に関連して来る。

[I] 一般に真に局所 compact な空間で Markov 過程と考
えり時はそこを忘れた境界と境界条件が自然に導かれること
は Markov 過程の一般的事実として知られている。現在の場
合も, (8.12) の下での (8.11) または (8.13) における方程式が
与えられることは "∧" の寫像をそこに代入しても, 実は S での
ことしか規定しているに過ぎない。そこから自然に Δ での
状態が規定されることもあるが, そうでない時もあること
うことも non-unique がおきることである。したがってその
時は Δ に境界条件を付け始めて $\hat{S}$ 上で規定したことに
なる。実際可能な境界条件は $t > 0$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow \Delta} u(t, x) = 1 \quad \text{あるいは} \quad \lim_{x \rightarrow \Delta} u(t, x) = 0$$

である。たゞし問題を一般に考えれば境界点と Δ の1点
とするところすら不自然になり, そこを忘れた境界条件も複雑
になる。このような考察が可能なことは (8.11) のような方程式
を群型化して考える自然さや或る意味で秀ゆれているとも
言える。

[II], (ii) の場合は S を構成する基礎になる $\mathcal{S}$ が真に局
所 compact で群型の時には出て来ない, 非群型項のためにお
きる要因で $\mathcal{S}$ の境界の点で境界条件が必要になる。 $\hat{S}$ で言
えば $\mathcal{S}$ の compact 化を $\mathcal{S}^*$ とすれば $\mathcal{S}^* - \mathcal{S}$ の点の関連する

3 $\sum_{n \geq 2} 8^{*n}$ の部分集合で境界条件が必要になることを意味している。

このように常微分方程式では古くから知られている解の一意性と現象との関連が、偏微分方程式の時も分枝 Markov 過程が対応する時は同様を示せることがわかる。そのおかげで偏微分であるために新たな事情も出て来ることがわかった。もちろん上の結果の中、確率論的な部分を取り除いた通常の意味で解析的なものは、分枝 Markov 過程が対応しなくとも成り立つことが多い。たとえば (8.12) の条件の下での (8.11) の結果等はその例である。そのためには証明法に *branching semi-group* にたよるだけで結果を導く必要があるが、現在までのところ上にも述べた (ii) の場合の結果の一部についてはそのような証明が得られている。

さらに §4 で論じた *continuous branching process* についても、関連する方程式の解の一意性と爆発問題の関連がある。その時も分枝 Markov 過程の時と同じく殆んど同じ示さざいくつかの結果を示すことが出来る。

§ 9. 解の成長の問題。

分枝 Markov 過程を対応さ

せて考えることから引き出される semi-linear 方程式について
このもう一つの問題を考えよう。すでに繰返し使ったよ
うな方程式

$$(9.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + u(t, x)^2 - u(t, x) \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

に對し $\mathbb{S}$ は $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$ の時の $\hat{\mathcal{S}}$ 上の分枝 Markov 過程 $\{W, \mathbb{B}, P_x; x \in \hat{\mathcal{S}}\}$ が対応する。いま $\mathcal{S}$ 上の関数 f に對し

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \emptyset \text{ または } \Delta, \\ \sum_{j=1}^n f(x_j), & x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n, n \geq 1, \end{cases}$$

が $\hat{\mathcal{S}}$ 上の関数を定義する。いま集合 $D \subset \mathbb{R}^d$ の indicator function とする時、有界 Borel 集合 D に對して

$$(9.2) \quad Z_t^D(W) = \prod_D(X(t, W))$$

とおけば集合 D の中に時間 t のときいる粒子数を現わすと考
えられる。このような量の性質をいふことは応用上も必
要であるので分枝 Markov 過程の研究では種々の型について試
みられ多くの結果が得られている。たとえば S. Watanabe [27]
によれば一般的研究の例として (9.2) の $Z_t^D(W)$ の漸近状態
についてつぎの結果が示されている。

$\{W, \mathbb{B}, P_x; x \in \hat{\mathcal{S}}\}$ 上の可測関数 $\xi(W)$ が $P_x[\xi(W) > 0] = 1$

, $x \in \mathcal{S}$, なるものが存在し,

$$(9.3) \quad P_x \left[\left\{ w; \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t^D(w)}{e^{t-d/2}} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} |D|^{-\frac{1}{2}} \zeta(w) \right\} \right] = 1, \quad x \in \mathcal{S},$$

となる。(併せて S. Watanabe [28] 参照)。ここで $|D|$ は D の Lebesgue 測度。これは実はどんな有界 Borel 集合でもその測度が正ならば, その中にはある粒子の個数は増大し無窮大に近づくこと, およびその近づく早さを示している。この事実を用いるとつぎのことを示すことが出来る。

f は $\mathcal{S}$ 上で有界連続な関数で $0 < f \leq 1$ で, しかも $f \neq 1$ となる。その f を初期条件にまつ (9.1) の解を $u(t, x) = u(t, x; f)$ とすれば

$$(9.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; f) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

となる。この事実はもし $0 < f \leq \delta < 1$ ならば常微分方程式 (9.1) のことと比較定理を用いることで簡単に示される。

自明であるのは

$$\{x; 1 - f(x) > 0\}$$

が compact な集合で空でない場合である。この場合も (9.3)

を前提にすればつぎのようにはじめよう。 (9.1) に対応する

branching semi-group を $\{T_t; t \geq 0\}$ とすれば, かつ

$$u(t, x; f) = T_t f(x) = \int_W \hat{f}(x(t, w)) P_x(dw)$$

がなりたつことは注意する。 $g(x) = -\log f(x)$ とおけば

$$\int_W \hat{f}(X(t, w)) P_x(dw) = \int_W e^{-\sum_{s=0}^t g(X(s, w))} P_x(dw), \quad x \in S_0.$$

一方 f についての仮定より定数 c と定数 C > 0 が存在し,

$$g \geq c I_D$$

となつてゐる。故に

$$u(t, x; f) = \int_W e^{-\sum_{s=0}^t g(X(s, w))} P_x(dw) \leq \int_W e^{-c \sum_{s=0}^t I_D(X(s, w))} P_x(dw)$$

$\Rightarrow$ Lebesgue の収束定理を用いると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; f) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_W e^{-c \sum_{s=0}^t I_D(X(s, w))} P_x(dw) = \int_W e^{-c \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^t I_D(X(s, w))} P_x(dw) = 0$$

となり結論が言える。この証明では実は (9.3) のように詳しく性質は必要なく単に $P_x[\{w; \lim_{t \rightarrow \infty} Z_t^D(w) = \infty\}] = 1$ があれば充分である。事実 (9.3) の証明には詳しく事を用いており、(9.4) の証明にそれを適用するのは実は話が逆行してゐる。しかしがある。そこで (9.3) のような確率論的な結果を用いて (9.4) をもっと直接的に示す問題が出て来る。その説明に進む前に (9.4) の意味についてもう少し示そう。

普通の話と云ふためには、 $v = 1 - u$ の代り、

$$(9.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + u - u^2 \\ u(0, x) = f \end{cases}$$

の形にしたい。その他に (8.2) の G をもつて来て

$$(9.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + G(u) - u \\ u(0, x) = f \end{cases}$$

と表せる。いま $G(\xi) - \xi \geq \xi - \xi^2$, $0 \leq \xi \leq 1$, に注意すれば, $0 \leq f \leq 1$ に對する (9.6) の解は (9.5) の解より常に大きいか相等しい。したがって f が $0 \leq f \leq 1$ なる連続関数で $0 \neq f$ ならばこれに對する (9.6) の解 $u(t, x; f)$ は

$$(9.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; f) = 1$$

なることと (9.4) と比較定理を用いて言えることは (9.6) に對しては $u \equiv 0$ は非常に不安定な解で $u \equiv 1$ が安定な解になっていることを示している。この意味でいわゆる semi-linear 方程式に關する 成長問題 になっている。これは最近 遼高氏等によつて研究されているが、たとえば同氏によつて示された特別の場合で、しかも E. Abrahams - T. Tsuneto [1] で期待されている超伝導についての (9.5) の方程式に對するこのつぎの結果も上のことから言える。

$0 \leq u_1(0, x) \leq 1$, $u_2(0, x) \equiv 0$ ならば (9.5) の解に對して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t, x) = 1,$$

言いかえると,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_1(t, x)^2 + u_2(t, x)^2)^{1/2} = 1$$

が言える。成長問題は他にも W. E. Kastenbergl-P. L. Chambre [6] 等, 応用の方でいくつかの結果が期待されており, いくつかの数値実験もなされている。(J. Canosa [2] 参照)。

先にはのべた成長問題を正確論の結果 (9.3) を使わずに行うことは実際亀高氏等によって実行されている。それは亀高氏による報告 [13] や亀高一池田 [49] にまとめられているが, 厚理版には (9.3) の証明の途中に出て来る式を使う。亀高一池田 [49] に従って式の基本となるべきと次のようになる。たとえは G とし一般に (i) $G(0)=0$, $G(1)=1$, (ii) $G(\xi) \geq \xi$, G は 1 回連続的微分可能で $[0, 1]$ で強い意味で単調増大, (iii) $G'(\xi)$ は強い意味で単調減少 等をみたすものとして来て, 滑めらる境界条件を持つに有界領域 E で

$$(9.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + (G(u) - u) & \text{on } E \\ u|_{\partial E} = 0 \\ u(0, x) = f \end{cases}$$

を考へ, それに付する成長問題を取扱う。この問題は実は S. Watanabe [58] や A. Pazy - P. H. Rabinowitz [59] 等々で研究

さしづめ $\text{non-linear eigenvalue problem}$ (= の解 u が適当かどうかは別として) にかかわっている。それは (9.8) の安定な解, すなわち

$$(9.9) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u + (G(u) - u) = 0 & \text{on } E \\ u|_{\partial E} = 0 \end{cases}$$

を取替ったものである。それはついでに

$$(\Delta + \lambda) \varphi = 0 \quad \text{on } E, \quad \varphi|_{\partial E} = 0$$

なる固有値問題の固有値 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ とすれば

$$\alpha = G'(0) - 1 - \frac{\lambda_1}{2}$$

とおくとき, $\alpha \leq 0$ ならば (9.9) の解は $u = 0$ のみで,

$\alpha > 0$ ならば (9.9) は 2 つの解 $u = 0$ と $u_1(x) > 0, x \in E$

を持つことは S. Watanabe [28] に示されている。(9.8) の

成長問題は f が連続で $0 \leq f \leq 1$, $f \neq 0$, $f|_{\partial E} = 0$ ならば

(9.8) の解 $u(t, x; f)$ にはついでに, $\alpha > 0$ の時

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x; f) = u_1(x), \quad x \in E,$$

となることを主張するものである。この事実を基礎に最初の

成長問題の解決が出来る。(詳しくは亀高-池田 [14] 参照)。

いま (9.6) で $d = 1$, すなわち $\mathbb{R}^1$ で考え,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

の時に, (9.6) の解 $u(t, x) = u(t, x; f)$ はこれに対応する分枝半群 $\{T_t; t \geq 0\}$ を使えば

$$u(t, x; f) = 1 - T_t g(x), \quad g = 1 - f$$

と表わされる。したがって分枝 Markov 過程の言葉を使えば、時間 t の時少くとも 1 つの粒子が正の半直線上にいる確率が $u(t, x; f)$ になっている。上にのべた成長問題の結果から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 1$$

が言えるが、もっと詳しくこの近づく方については A. N.

Kolmogorov - I. Petrovsky - N. Pincusoff [10] の研究がある。これは

によると, $\alpha \equiv \sum_{n \geq 2} n p_n < \infty$ とするならば

$$(9.10) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} - \sqrt{2\alpha} \frac{dv}{dx} + G(v) - v = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 1,$$

の解が存在する。このような解は $x \rightarrow x + C$ の変換を除いて一意に決まる。 $u(t, x)$ は $\sqrt{2\alpha}$ に下から近づく速さで左に移動し、曲線の形は上の解に近づく。もし少し具体的な解には $\varphi(t)$ を定数 C に持たせて $u(t, \varphi(t)) = C$ なるように定めると $u(t, x + \varphi(t))$ は $t \rightarrow \infty$ の時 x について一定に収束する。そして $d\varphi/dt \rightarrow -\sqrt{2\alpha}$ での極限関数は (9.10) の解である。

この節の説明は亀高氏の未発表の最近の結果に基づいている。 (亀高 [13] による)。またここであげた文献のいくつかも同氏の注意によって知った。

§ 10. 種々の注意。 確率過程論に出て来る非線型方程式は(2)のベテ枠に遡入するものがあるが他にもあるし、また確率論に因縁して(2)でまた確率過程が研究せられるものがある。このように(2)で示されることは出来るが、(2)のベテのはあくまで非線型方程式の確率論取扱の例として理解して貰うと良いと思う。また解空間の値の簡単な変換で基本的な確率過程に帰する方程式が得られる場合もある。たとえば J. Burgers の方程式に於ける J. Cole [3] の論文で用いられた変換や E. W. Montroll [22] の論文で用いられた semi-linear な方程式に帰着するための変換はそのようなもの中最も典型的の一つであろう。この新しい変換そのものは解を求めるのに有効ではあるが解の性質をしろべのにも使えぬが、関連する確率論的な特性がどうなるのか明らかでないようなので(2)は(1)以上示されることにした。

また H. P. McKean [21], [20] はある種の関数方程式のいくつかのものについてその相互関係をつけるような試みを行って(1)の如く、(2)は(1)で代入することが出来なかった。

- [1] E.A. Abrahams - T. Tsuneto : Time variation of the Ginzburg-Landau order parameter. Phys. Rev. 152 (1966).
- [2] J. Canosa : Diffusion in non-linear multiplicative media. Jour. Math. Phys. 10 (1969).
- [3] J.D. Cole : On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quaxt. Appl. Math. 9 (1951).
- [4] T. Fujimagari - M. Motoo : Cascade semi-groups and their characterization. to appear.
- [5] H. Fujita : On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. Jour. of Fac. Sci. Univ. Tokyo. 13 (1966).
- [6] H. Fujita - S. Watanabe : On the uniqueness and non-uniqueness of solutions of initial value problems for some quasi-linear parabolic equations. Comm. Pure. Appl. Math. 21 (1968).
- [7] I.M. Gelfand : Some problems in the theory of quasi-linear equations. Amer. Math. Soc. Trans. Series. 2. Vol. 29 (1963).
- [8] N. Ikeda : Branching Markov processes: Stanford Univ. Seminar Notes. 1966-67.
- [9] N. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe : 分枝Markov過程の

基礎 . Seminar on Prob. Vol. 23 (1966).

- [10] N. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe : Branching Markov processes I, II, III, J. Math. Kyoto. Univ. 8 (1968), 9 (1969).
- [11] N. Ikeda - S. Watanabe : On uniqueness and non-uniqueness of solutions for a class of non-linear equations and explosion problem for branching processes. Jour. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo. 17 (1970).
- [12] K. Ito - H.P. McKean : Diffusion processes and their sample paths. Springer. 1965.
- [13] 亀高惟倫 : 拡散と飽和に伴う成長現象。(京都大学微分方程式セミナー発表)
- [14] 亀高惟倫 - 池田信行. 準備中.
- [15] S. Karlin - J. McGregor : Spectral representation of branching processes. I. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 5 (1966).
- [16] W.E. Kastenberg - P.L. Chambré : On the stability of non-linear space-dependent reactor kinetics. Nuclear science and engineering. 31 (1968).
- [17] A.N. Kolmogorov - I. Petrovsky - N. Piscounoff : Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la

quantité de matière et son application à un problème biologique. Bull. de l'Université d'état à Moscou, 1 (1937).

- [18] H.P. McKean : Chapman-Enskog-Hilbert expansion for a class of solutions of the telegraph equation. Jour. Math. Phys. 8 (1967).
- [19] H.P. McKean : A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 56 (1966).
- [20] H.P. McKean : A simple model of the derivation of fluid mechanics from the Boltzmann equation. Bull. of Amer. Math. Soc. 75 (1969).
- [21] M. Mimura - A. Nakaoka : On some degenerate diffusion system related with a certain reaction system. to appear.
- [22] E.W. Montroll : On non-linear processes involving population growth and diffusion. Jour. Appl. Prob. 4 (1967).
- [23] M. Nagasawa - T. Sirao : Probabilistic treatment of blowing up of solution for a non-linear equation. Trans. Amer. Soc. 139 (1970).
- [24] Y. Ogura : Spectral representation for branching processes on the real half line. Publ. Presearch Inst. Math. Sci.

Kyoto Univ. 5 (1970).

- [25] A. Pazy - P.H. Rabinowitz : A non-linear integral equation with application to neutron transport theory. Arch. Rat. Mech. Anal. 32 (1969), 35 (1969).
- [26] T.H. Savits : The explosion problem for branching Markov processes. Osaka Jour. Math. 6 (1969).
- [27] H. Tanaka : Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interactions. Jour. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 17 (1970).
- [28] S. Watanabe : On the branching process for Brownian particles with an absorbing boundary. Jour. Math. Kyoto Univ. 4 (1965).
- [29] S. Watanabe : Limit theorem for a class of Branching processes. Markov processes and potential theory edited by J. Chover. 1967.
- [30] S. Watanabe : A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes. Jour. Math. Kyoto Univ. 8 (1968).