

Analytic K-theory

早大 理工 大学院 神谷誠一郎

近年、様々な場合に対して「Riemann-Roch Theorem」が研究されてきているが、一般の compact $\mathbb{C}$ -analytic mfd (及び complete variety over k) 上の「Grothendieck-Riemann-Roch Theorem」は、今だに無い。Atiyah-Hirzebruch ('61) によって Embedding の場合は示されているが、Projection に対しての証明がまだ無いのである。そしてそこで用いられているものは Higher Topological K-theory なり Algebraic K-theory である。それでは Analytic cycles の情報を提供してくれるような Higher analytic K-theory なるものはないのであろうか。このようなことを考えてみるのであるがよく判らない。それならいっそのこと、空間概念の方を代数幾何学における構成法に近づけてみてはどうかと考えると今から10年程前斎藤恭司氏が Stein space (及び algebraic な scheme) の一般化として Analytic scheme の理論を展開していた。我々はこの Analytic scheme 上に望むべき性質

を持った Higher Analytic K-theory を構成してみようというのであり、今回の話はその第一歩である。

岩橋の定理 (1960)

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\text{-analytic space } (X, \mathcal{O}_X) \text{ に対して次は同値} \\ & \text{(i) } (X, \mathcal{O}_X) \text{ は Stein,} \\ & \text{(ii) } \rho_X: |X| \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\text{top. } \mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathcal{O}(X), \mathbb{C}) \text{ は homeo.} \\ & \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad x \longmapsto \rho_{X,x} := (f \mapsto f(x)) \end{aligned}$$

の一般化としての

Forster-斎藤の定理 (1967)

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\text{-analytic space } (X, \mathcal{O}_X) \text{ に対して次は同値:} \\ & \text{(i) } (X, \mathcal{O}_X) \text{ は Stein,} \\ & \text{(ii) } \forall (T, \mathcal{O}_T): \mathbb{C}\text{-analytic space に対し} \\ & \quad \rho: \operatorname{Hom}_{\text{Esp. } \mathbb{C}\text{-an.}}(T, X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\text{top. } \mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(T)); \text{ homeo.} \end{aligned}$$

より、Stein space $(X, \mathcal{O}_X)$ の analytic structure は topological ring $\mathcal{O}(X)$ によって完全にきまってしまふことがわかる。これを背景にして、Stein space に affine scheme の役割を演じさせることに依り、正則函数環よりさらに一般の位相環に対して analytic scheme が構成された。これを簡単に復習してみると、

Definition.

A ; commutative ring with unit とするとき

$\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ が semi-norm であるとは

$$(i) (\forall a, b \in A) ; q(a+b) \leq q(a) + q(b)$$

$$(ii) (\forall a, b \in A) ; q(a \cdot b) \leq q(a) \cdot q(b)$$

$$(iii) q(0_A) = 0, \quad q \not\equiv 0$$

また, semi-norm $q: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ に対して

$$\text{rad } q: A \rightarrow \mathbb{R}_+ ; a \mapsto \text{rad } q(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} q(a^n)^{\frac{1}{n}}$$

とおく、これをも semi-norm となり、次の同値な条件を満たす

semi-norm q を reduced と呼ぶ;

$$(i) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall a \in A) ; q(a^n) = q(a)^n$$

$$(i) \stackrel{\text{bis}}{(\forall a \in A)} ; q(a) = \text{rad } q(a)$$

又, 次の条件を満たす semi-norm q を prime と呼ぶ;

$$(ii) (\forall a, b \in A) ; q(a \cdot b) = q(a) \cdot q(b)$$

2. の semi-norm $q_1, q_2: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ に対して

$$q_1 \leq q_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists c > 0) (\forall a \in A) : q_1(a) \leq c \cdot q_2(a)$$

semi-norms の family $\mathcal{T}_A$ が convex topology であるとは

$$(i) q_1, q_2 \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \sup(q_1, q_2) \in \mathcal{T}_A$$

$$(ii) q \in \mathcal{T}_A, q' \leq q \Rightarrow q' \in \mathcal{T}_A$$

を満たす事とし, $(A, \mathcal{T}_A)$ を convex ring と呼ぶ。

又, $(q)A := A/\text{Ker}(q)$ において associated normed ring としたとき, その

完備化を $(q)A := (q)\hat{A}$ とすれば, $A \xrightarrow{\text{surj}} (q)A \xleftarrow{\text{inj}} qA$ は dense image

を持つ。このとき, convex ring $(A, \mathcal{T}_A)$ に対して $((q)A, q)_{q \in \mathcal{T}_A}$ は

Banach ring の inverse system となり, $\forall q \in \mathcal{T}_A$ に対して

$(A, \tau_A) \longrightarrow ({}_g A, g)$ が連続であることから

$$\iota : (A, \tau_A) \longrightarrow \varprojlim_{g \in \tau_A} ({}_g A, g)$$

が定まる。 ι が surjective のとき, (A, τ_A) は complete, ι が injective のとき, separated. separated, complete な convex ring のことを pro-Banach ring と呼ぶ。そして convex ring (A, τ_A) に対して

$$\text{Sred}(A, \tau_A) := \{ \gamma : A \rightarrow \mathbb{R}_+; \text{reduced semi-norm} \mid (\exists g \in \tau_A) : \gamma \leq g \}$$

$$\text{Spec}(A, \tau_A) := \{ \phi : A \rightarrow \mathbb{R}_+; \text{prime semi-norm} \mid (\exists g \in \tau_A) : \phi \leq g \}$$

とおき, $\text{Spec}(A, \tau_A)$ にかかるべき topology を与え, ringed space として見た $(\text{Spec}(A, \tau_A), \tilde{A})$ であって, “ある条件” を満たすものを Stein Scheme (もしくは affine analytic scheme, affine analytic space) と呼ぶ。この $(\text{Spec}(A, \tau_A), \tilde{A})$ を“貼り合わせて”作った $(X, \mathcal{O}_X)$ が analytic scheme と呼ばれるものであった。ここで, (A, τ_A) が $(\mathbb{C}, 1, 1)$ -algebra であれば, $\text{Spec}(A, \tau_A) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}((A, \tau_A), (\mathbb{C}, 1, 1))$ となり, 特に (A, τ_A) が Banach $\mathbb{C}$ -algebra であれば $\text{Spec}(A, \tau_A)$ は maximal ideal space となる。

解析的背景

$(A, \|\cdot\|)$ を Banach $\mathbb{C}$ -algebra, $\mathcal{M}(A)$ を maximal ideal space とすればこれは weak topology に関して compact となっている。又, $A^* \subset A$ を A の invertible elements とするとき, 次の事が知られている:

$$1) (\text{Arens-Royden}) : H^0(\mathcal{M}(A), \mathbb{Z}) \cong \text{Ker}(A \xrightarrow{\exp} A^*) \stackrel{(\text{Shilov})}{=} \text{Idemp}(A)$$

$$H^1(\mathcal{M}(A), \mathbb{Z}) \cong A^*/\exp(A)$$

写像の homotopy classes: $[M(A), GL_n(\mathbb{C})] \cong GL_n(A)/GL_n^0(A)$

但し, $GL^0(A)$ は identity component.

2) (O. Forster) : Gelfand 変換 $\mathcal{G}: A \rightarrow C^0(M(A)): x \mapsto \mathcal{G}_A(x) := (f \mapsto f(x))$

は, semi-ring isomorphism :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{P}(C^0(M(A))) & \xrightarrow{\sim} & VB(M(A)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{projective} \\ A\text{-modules} \\ \text{of finite type} \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{l} \text{projective } C^0(M(A)) \\ \text{-modules of} \\ \text{finite type} \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{l} \text{vector bundles} \\ \text{over } M(A) \end{array} \right\} \end{array}$$

を induce する.

3) (O. Forster) : $K_0(A) \cong K_0(M(A))$ は ring iso.

4) (O. Forster) : $H^2(M(A), \mathbb{Z}) \cong \text{Pic}(A) := \left\{ \begin{array}{l} \text{isomorphism classes of projective} \\ A\text{-modules of finite type of} \\ \text{rank 1} \end{array} \right\}$

(これらの事は最近, J.L. Taylor がもう少し詳しく議論している)

代数的背景

D. Quillen の Higher algebraic K-theory は約々次の如きものである : commutative ring with unit A に対し $\mathcal{P}_A$: projective left A -modules of finite type のなす category $\mathcal{P}_A$ を symmetric monoidal category, i.e. morphism は iso. $M \cong M'$, operation は直和 $\oplus: \mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_A \rightarrow \mathcal{P}_A: (M, N) \mapsto M \oplus N$ とすれば, $\mathcal{P}_A$ の $\mathcal{P}_A$ による localization $\mathcal{P}_A^{-1} \cdot \mathcal{P}_A := \langle \mathcal{P}_A, \mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_A \rangle$ は homotopy-associative, homotopy-commutative な H-space となりその

Geometric realization は $B(\mathcal{P}_A^+ \mathcal{P}_A) \simeq \pi_0(\mathcal{P}_A^+ \mathcal{P}_A) \times B(\mathcal{P}_A^+ \mathcal{P}_A)_0$, かつ abel 群 $\pi_0(\mathcal{P}_A^+ \mathcal{P}_A) \simeq K_0(A)$. 又, plus-construction に依って得られる $BGL(A) := B(\varinjlim_n GL_n(A))$ の universal な H-space $BGL(A)^+ \simeq B(\mathcal{P}_A^+ \mathcal{P}_A)_0$ となる. いる. ところで, $K_i(A) := {}_{\mathbb{I}}K_i(\mathcal{P}_A) := \pi_i(B(\mathcal{P}_A^+ \mathcal{P}_A)) = \pi_i(K_0(A) \times BGL(A)^+)$, $i \geq 0$ と定義される. 一方 exact category $\mathcal{M}$ に対して category $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ を

$$\text{Ob}(\mathcal{Q}(\mathcal{M})) := \text{Ob}(\mathcal{M})$$

$$\text{Mor}_{\mathcal{Q}(\mathcal{M})}(M, M') := \left\{ \begin{array}{c} N \xrightarrow{i} M' \\ \downarrow j \\ M \end{array} \right\} / \sim \quad \text{但し} \quad \begin{array}{c} N \xrightarrow{i} M' \\ \downarrow j \\ M \end{array} \sim \begin{array}{c} N' \xrightarrow{i'} M' \\ \downarrow j' \\ M \end{array} \iff \begin{array}{ccc} M' & = & M \\ \uparrow i & & \uparrow i' \\ N & \xrightarrow{\cong} & N' \\ \downarrow j & & \downarrow j' \\ M & = & M \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} N \xrightarrow{i} M' \\ \downarrow j \\ M \end{array} \right) \in \text{Mor}_{\mathcal{Q}(\mathcal{M})}(M, M') \quad \text{と} \quad \left(\begin{array}{c} N' \xrightarrow{i'} M'' \\ \downarrow j' \\ M' \end{array} \right) \in \text{Mor}_{\mathcal{Q}(\mathcal{M})}(M', M'') \quad \text{の composition は}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} N \times_M N' & \xrightarrow{p_2} & N' \xrightarrow{i'} M' \\ p_1 \downarrow & & \downarrow j' \\ N & \xrightarrow{i} & M' \\ j \downarrow & & \\ M & & \end{array} \right) \in \text{Mor}_{\mathcal{Q}(\mathcal{M})}(M, M')$$

と定義する. この時,

$${}_{\mathbb{I}}K_i(\mathcal{M}) := \pi_{i+1}(B\mathcal{Q}(\mathcal{M})) \quad \text{と定義され, } \mathcal{P}_A \text{ を exact category とみなせば}$$

$$K_i(A) := {}_{\mathbb{I}}K_i(\mathcal{P}_A) = \pi_{i+1}(B\mathcal{Q}(\mathcal{P}_A)) \quad \text{だが, 実は,}$$

$$1) \quad {}_{\mathbb{I}}K_i(\mathcal{P}_A) \simeq {}_{\mathbb{I}}K_i(\mathcal{P}_A), \quad K_0 A \times BGL(A)^+ \simeq \Omega B\mathcal{Q}(\mathcal{P}_A)$$

$$2) \quad K_i(A) \simeq {}_{\mathbb{I}}K_i(\text{category of } A\text{-mod. with } \mathcal{P}_A\text{-resolutions of length } \leq n), \quad \forall n \geq 0$$

特に A が regular なら $K_i(A) \simeq {}_{\mathbb{I}}K_i(\text{Mod } f(A))$, 但し $\text{Mod } f(A)$ は category of A -mod. of finite type.

$$3) \quad \text{Noetherian ring homo. } f: A \rightarrow B \text{ として } B_{[f]} \text{ が finite Tor dim. の時は}$$

$${}_{\mathbb{I}}K_i(\{M \in \text{Ob}(\text{Mod } f(A)) \mid \text{Tor}_n^A(B, M) = 0 \text{ for } n > 0\}) \simeq {}_{\mathbb{I}}K_i(\text{Mod } f(A))$$

4) (Devissage): Noetherian ring A の nilpotent two-sided ideal $I = \hat{x} \text{ L } \tau$

$$\coprod K_i(\text{Mod } f(A/I)) \simeq \coprod K_i(\text{Mod } f(A))$$

5) (Localization): Abelian category $\mathcal{A}$ の Serre subcategory $B = \hat{x} \text{ L } \tau$

$$\cdots \rightarrow \coprod K_1(\mathcal{A}) \rightarrow \coprod K_1(\mathcal{A}/B) \rightarrow \coprod K_0(B) \rightarrow \coprod K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \coprod K_0(\mathcal{A}/B) \rightarrow 0 \text{ は exact.}$$

6) Dedekind domain $A \not\subset \mathbb{Z}$ の quotient field $k = \hat{x} \text{ L } \tau$

$$\rightarrow K_{i+1}(k) \rightarrow \coprod_{m \in \text{spm}(A)} K_i(A/m) \rightarrow K_i A \rightarrow K_i(k) \rightarrow \cdots \text{ (exact)}$$

7) (Sherman): field $k \not\subset \mathbb{Z}$ Dedekind domain $k[t]$ $= \hat{x} \text{ L } \tau$

$$0 \rightarrow K_i(k) \rightarrow K_i(k[t]) \xrightarrow[\text{split}]{\text{split}} \coprod_{m \in \text{spm}(k[t])} K_{i-1}(k[t]/m) \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

8) Noetherian ring $A = \hat{x} \text{ L } \tau$

$$\text{i) } \coprod K_i(\text{Mod } f(A[t])) \simeq \coprod K_i(\text{Mod } f(A))$$

$$\text{ii) } \coprod K_i(\text{Mod } f(A[t, t^{-1}])) \simeq \coprod K_i(\text{Mod } f(A)) \oplus \coprod K_{i-1}(\text{Mod } f(A))$$

さらには A が Regular ならば,

$$\text{i) }^{\text{bis}} K_i(A[t]) \simeq K_i A$$

$$\text{ii) }^{\text{bis}} K_i(A[t, t^{-1}]) \simeq K_i A \oplus K_{i-1} A$$

Not necessarily commutative ring $A = \hat{x} \text{ L } \tau$

$$NK_q A := \text{Coker}(K_q A \rightarrow K_q A[t])$$

$$\mathcal{N}il_A \not\subset \text{Ob}(\mathcal{N}il_A) := \{(P, f) \mid P \in \text{Ob}(\mathcal{P}_A), P \xrightarrow{f} P \text{ は nilpotent}\}$$

なる exact category,

$$Nil_q(A) := \text{Ker}(K_q(\mathcal{N}il_A) \rightarrow K_q A) \text{ とする時,}$$

$$\text{iii) } NK_q A \simeq Nil_{q-1} A$$

$$\text{iv) } K_q(A[t, t^{-1}]) \simeq K_q A \oplus K_{q-1} A \oplus NK_q A \oplus NK_q A$$

$$\text{v) } 0 \rightarrow K_q A \rightarrow K_q A[t] \oplus K_q A[t^{-1}] \rightarrow K_q A[t, t^{-1}] \rightarrow K_{q-1} A \rightarrow 0 \text{ (exact)}$$

9) Scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して, $K_i X := \pi K_i$ (category of vector bundles),
 Noetherian scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して $G_i X := \pi K_i$ (category of coherent $\mathcal{O}_X$ -Mod).
 とおく時,

$(X, \mathcal{O}_X)$ が Regular, Noetherian, separated なら $K_i X \simeq G_i X$.

$X := \text{Spec } A$ が Regular なら $K_i A \simeq K_i(\text{Mod } f(A)) \simeq K_i(\text{Spec } A) \simeq G_i(\text{Spec } A)$.

10) Noetherian separated scheme X の closed subscheme Z , $U := X \setminus Z$ に対して

$$\rightarrow G_{g+1} U \rightarrow G_g Z \xrightarrow{i_*} G_g X \xrightarrow{j^*} G_g U \rightarrow \dots \quad (\text{exact}).$$

さらに open $V \subset X$ に対して

$$\rightarrow G_{g+1}(U \cap V) \rightarrow G_g(U \cup V) \rightarrow G_g(U) \oplus G_g(V) \rightarrow G_g(U \cap V) \rightarrow \dots$$

11) Noetherian, separated scheme X の set of pt. of codim. $p \in X_p$ と書くとき

$$E_1^{p, g}(X) := \coprod_{x \in X_p} K_{-p-g}(k(x)) \Rightarrow G_{-p-g}(X)$$

なる spectral sequence がある.

12) 次は同値: $\mathcal{M}_p(X) := \{ \mathcal{F} \in \text{Coh}(X) \mid \text{codim}_X \text{supp}(\mathcal{F}) \geq p \}$ とする.

(i) X は very clean, i.e., $\forall p \geq 0$, $\mathcal{M}_{p+1}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}_p(X)$ は zero map.

$\pi K_n(\mathcal{M}_{p+1}(X)) \rightarrow \pi K_n(\mathcal{M}_p(X))$ for $\forall n \geq 0$ を induce する.

(ii) $\forall g$, $E_2^{p, g}(X) = 0$ if $p \neq 0$ & edge homo. $G_{-g} X \simeq E_2^{0, g}(X)$.

(iii) $\forall n \geq 0$.

$$0 \rightarrow G_n X \rightarrow \coprod_{x \in X_0} K_n k(x) \xrightarrow{d_1} \coprod_{x \in X_1} K_{n-1} k(x) \rightarrow \dots \quad (\text{exact}).$$

13) (Gersten): $\underline{G}_{n, X} \ni U \mapsto G_n U$ に associate した sheaf とする時

$\text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$ is very clean for $\forall x \in X$ なら

$$E_2^{p, g}(X) \simeq H_{\text{Bloch}}^{p, -g}(X) := H^p(X, \underline{G}_{-g, X}).$$

したがって Brown-Gersten's spectral sequence

$$E_2^{p,q}(X) = H_{\text{Bloch}}^{p-q}(X) := H^p(X, \underline{G}_{-q,X}) \Rightarrow G_{-p-q}(X)$$

が得られる。

14) (Sherman) : i) $E_2^{p,q}(X) \simeq E_2^{p,q}(X[t])$ 但し $X[t]$ は affine line over X

ii) $X, X[t]$ が very clean なら $H_{\text{Bloch}}^{p,q}(X) \simeq H_{\text{Bloch}}^{p,q}(X[t])$

iii) X が regular で $X, X[t]$ が very clean なら $H_{\text{Bloch}}^{p,q}(X[t,t']) \simeq H_{\text{Bloch}}^{p,q}(X) \oplus H_{\text{Bloch}}^{p,q-1}(X)$

15) (Gersten's conjecture) : Regular local rings are very clean?

16) Regular, Noetherian, separated scheme of finite type over a field
は very clean. 従って

(vanishing theorem) : $H_{\text{Bloch}}^{p,q}(X) := H^p(X, \underline{K}_{q,X}) = 0$, for $p > q$

(Bloch's formula) : $H_{\text{Bloch}}^{p,p}(X) := H^p(X, \underline{K}_{p,X}) \simeq A^p(X)$ (= Chow group)

17) (Grayson) smooth, quasi-projective variety X に対して

$$\bigoplus_p H_{\text{Bloch}}^{p,p}(X) := \bigoplus_p H^p(X, \underline{K}_{p,X}) \simeq \bigoplus_p A^p(X) \text{ as a graded rings}$$

etc. といった様に Quillen の higher alg. K-groups は実り多い内容を持っている。ここで "localization" の操作を "completion" に置き換える事に依って Quillen の考え方に基づく higher analytic K-theory の構成も可能と考えており、解析幾何においても上の諸性質に対応する事が成立して欲しいのであるがまだ出来てはいない。ここでは次の Karoubi-Villamayor 流の考え方に従って analytic K-theory が構成されてゆく。Exact category $\mathcal{M}$ に対する negative な alg. K-groups $K_{-i}(\mathcal{M})$ はまだ構成されていないが、

Karoubi-Villamayor の考え方に従えば, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して, analytic K-theory が構成できる.

Ring with unit A に対して cone $C(A)$ を permutants と呼ばれる $M = (\text{無限交代行列}) \times (A \text{ の有限集合の元よりなる対角行列})$ なる形をした無限行列で生成される ring, $\tilde{A} := \bigcup_n M_n(A)$ を高々有限個の A の元よりなる行列の両側イデアル, $SA := CA/\tilde{A}$ によって A の suspension を定義する。

18) (Karoubi-Gersten-Wagoner): $B_{GL}(CA)^+$ is contractible.

$$K_i(CA) = 0 \quad (i \geq 1).$$

19) (Gersten-Wagoner): fibre of $(B_{GL}(CA)^+ \rightarrow B_{GL}(SA)^+) \simeq K_0 A \times B_{GL}(A)^+$

すなわち $K_0 A \times B_{GL}(A)^+ \rightarrow K_0 A \times B_{GL}(CA)^+ \rightarrow K_0 A \times B_{GL}(SA)^+$ は fibration.

従って $\Omega B_{GL}(SA)^+ \simeq K_0 A \times B_{GL}(A)^+ \left(\underset{\text{Quillen}}{\simeq} B(\overline{P_A} \cdot P_A) \underset{\text{Quillen}}{\simeq} \Omega BQ(P_A) \right)$

$$K_{i+1}(SA) = K_i A \quad (i \geq 0)$$

20) (Quillen): $BQ P_A \rightarrow BQ P_{CA} \rightarrow BQ P_{SA}$ は fibration で Gersten-Wagoner's fibration の delooping.

21) (Karoubi): $K_{-i}^{KV}(A) = K_{-i}^{\text{Bass}}(A) \quad (i \geq 0)$

$$\text{但し } K_{-i}^{KV}(A) := K_0 S^i A = K_1 S^{i+1} A$$

$$K_{-i}^{\text{Bass}}(A) := L^i K_0 A = \text{Coker}(K_{-i+1}^{\text{Bass}} A[t] \oplus K_{-i+1}^{\text{Bass}} A[t^{-1}] \rightarrow K_{-i+1}^{\text{Bass}} A[t, t^{-1}]).$$

22) (Bass): Noetherian, regular ring A に対して $K_{-i}^{\text{Bass}}(A) = 0 \quad (i > 0).$

23) (Gersten-Wagoner): Ω -spectrum $E(A) = \{E(A)_n\}_{n \geq 0}$ を

$$E(A)_n := K_0(S^n A) \times B_{GL}(S^n A)^+ \quad (n \geq 0)$$

によって定義すると, $E(A)_n \simeq \Omega E(A)_{n+1}$ で

$$\pi_i(E(A)) := \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{i+n}(E(A)_n) \quad (i \in \mathbb{Z})$$

と置く時,

$$\pi_i(E(A)) = K_i(A), \quad \pi_{-i}(E(A)) = K_{-i}^{KV}(A) \quad (i \geq 0)$$

24) (Gersten-Rector, Dror): $\mathbb{Z}_\infty$ を integral completion functor of Bousfield-Kan とする時, $B_{GL}^+(A) \simeq \mathbb{Z}_\infty B_{GL}(A)$

25) (Wagoner): Identity-preserving ring hom. $f: A \rightarrow B$ に対して $\Gamma(f)$ を次の pull-back diagram で定義する:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f) & \longrightarrow & SA \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow sf \\ CB & \longrightarrow & SB \end{array}, \quad \text{又, inductive に}$$

$$S^i f := S(S^{i-1} f): S^i A \rightarrow S^i B \quad \text{とおく.}$$

$$X(f) := (X_i(f)) \text{ を } \begin{aligned} X_{-i}(f) &:= \Omega^i(K_0 \Gamma(f) \times B_{GL}(\Gamma^+(f))) \\ X_i(f) &:= K_0(\Gamma(S^i f) \times B_{GL}(\Gamma^+(S^i f))) \end{aligned} \quad (i \geq 0)$$

で定義すると $X(f)$ は Ω -spectrum となり, relative K-group を

$$K_i(f) := \pi_i(X(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{i+n}(X_n(f))$$

で定義する. このとき long exact sequence:

$$\cdots \rightarrow K_i(A) \rightarrow K_i(B) \rightarrow K_{i-1}(f) \rightarrow K_{i-1}(A) \rightarrow K_{i-1}(B) \rightarrow \cdots$$

がある. 例えば ideal $I \subset A$ に対して $K_i(A, I) := K_i(A \rightarrow A/I)$

$$\text{とおけば } \cdots \rightarrow K_i(A) \rightarrow K_i(A/I) \rightarrow K_{i-1}(A, I) \rightarrow K_{i-1}(A) \rightarrow \cdots$$

§1. 図の原理

Stein mfd $(X, \mathcal{O}_X)$ に對して

$$1) \quad H^1(X^{an}, GL_n(\mathcal{O}_{X^{an}})) \simeq Vect_{hol}^n(X^{an})$$

$$H^1(X^{top}, GL_n(\mathcal{C}_{X^{top}})) \simeq Vect_{top}^n(X^{top})$$

$$2) \quad (\text{Grauert}): \quad H^1(X^{an}, GL_n(\mathcal{O}_{X^{an}})) \underset{bij}{\simeq} H^1(X^{top}, GL_n(\mathcal{C}_{X^{top}}))$$

従つて, これらのことより Grothendieck group に對して

$$3) \quad K_0^{an}(X^{an}) \simeq K_0^{top}(X^{top}) \quad ; \text{ ring iso.}$$

$$4) \quad \text{For } N \gg 0, \quad [X^{an}, \underset{\substack{\uparrow \\ Vect_{hol}^n(X^{an}) \\ \uparrow \\ H^1(X^{an}, GL_n(\mathcal{O}_{X^{an}}))}}{Grass(n, N)}]_{hol} \xrightarrow{\sim} [X^{top}, \underset{\substack{\uparrow \\ Vect_{top}^n(X^{top}) \\ \uparrow \\ H^1(X^{top}, GL_n(\mathcal{C}_{X^{top}}))}}{Grass(n, N)}]_{top}$$

$$5) \quad (\text{Grauert}) \quad [X^{an}, GL_n(\mathbb{C})]_{hol} \simeq [X^{top}, GL_n(\mathbb{C})]_{top}$$

従つて Atiyah-Hirzebruch の K-group に對して

$$6) \quad K^1(X^{an}) \simeq K^1(X^{top}), \quad K^1(X^{an}) \simeq K^{-1}(X^{top}) \quad (\text{Bott's periodicity})$$

次に ring with unit A に對して $GL_n A \hookrightarrow GL_{n+1} A : (*) \mapsto \begin{pmatrix} * & \\ & 1 \end{pmatrix}$ より

$GL(A) := \varinjlim_n GL_n A$ とおく時, Bass-Whitehead group $K_1(A)$ は,

$$K_1(A) := GL(A) / [GL(A), GL(A)], \quad \text{但し } [,] \text{ は commutator subgroup,}$$

と定義される。この時,

$$K_1(\mathcal{O}_{X^{an}}) \text{ を pre-sheaf } U \mapsto K_1(\Gamma(U, \mathcal{O}_{X^{an}})) \text{ に associate した sheaf,}$$

$$K_1(\mathcal{C}_{X^{top}}) \text{ を pre-sheaf } U \mapsto K_1(\Gamma(U, \mathcal{C}_{X^{top}})) \text{ に } "$$

とすれば, $K_1, GL, [GL, GL]$ は filtering direct limit と commute

$$\text{する, i.e. } K_1(\mathcal{O}_{X^{an}})_x \simeq K_1(\mathcal{O}_{X^{an}, x}), \quad K_1(\mathcal{C}_{X^{top}})_x \simeq K_1(\mathcal{C}_{X^{top}, x})$$

$$GL_n(\mathbb{C})/[GL_n\mathbb{C}, GL_n\mathbb{C}] \simeq GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \text{ だから}$$

$$K_1(\mathcal{O}_{X^{an}}) \cong \mathcal{O}_{X^{an}}^*, \quad K_1(\mathcal{E}_{X^{top}}) \cong \mathcal{E}_{X^{top}}^*$$

従って 2) の $n=1$ の場合として

$$7) \quad \text{Pic}(X^{an}) = H^1(X^{an}, K_1(\mathcal{O}_{X^{an}})) \simeq_{bij} H^1(X^{top}, K_1(\mathcal{E}_{X^{top}})) = \text{Pic}(X^{top})$$

次に $E(A) := \{\text{elementary matrix } e_{ij}(\lambda) := i \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\}$ によって生成される subgroup

とすると $E(A) \simeq [GL(A), GL(A)]$ で, Steinberg group $St(A)$ を

$$St(A) := \left\{ \begin{array}{l} X_{ij}(a), a \in A \\ 1 \leq i \neq j < +\infty \\ \text{で生成される} \end{array} \left| \begin{array}{l} X_{ij}(a) \cdot X_{ij}(b) = X_{ij}(a+b) \\ [X_{ij}(a), X_{j\ell}(b)] = X_{i\ell}(a \cdot b), i \neq \ell \\ [X_{ij}(a), X_{k\ell}(b)] = 1, j \neq k, i \neq \ell \end{array} \right. \right\}$$

と定義する時, Milnor group $K_2(A)$ は

$$K_2(A) := \text{Ker} \left(\begin{array}{ccc} St(A) & \longrightarrow & E(A) \\ \downarrow X_{ij}(a) & & \downarrow e_{ij}(a) \end{array} \right)$$

と定義される。この時, $K_2(A) = \text{Center of } St(A)$ で, A が

local ring の時は

$$\begin{array}{ccccccc} & & A^* \otimes_{\mathbb{Z}} A^* & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2(A) & \longrightarrow & St(A) & \longrightarrow & E(A) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & & & \parallel \\ & & 0 & & & & SL(A) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & E(A) \end{array}$$

が判っており, K_2, St, E は filtering direct limit と commute する

から, $SL(\mathcal{O}_{X^{an}}), St(\mathcal{O}_{X^{an}})$ etc. を $\mathcal{U} \mapsto SL(\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}})), \mathcal{U} \mapsto St(\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X^{an}}))$

etc に associate した sheaf とすれば

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{O}_{X^{an}}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X^{an}}^* & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2(\mathcal{O}_{X^{an}}) & \longrightarrow & St(\mathcal{O}_{X^{an}}) & \longrightarrow & SL(\mathcal{O}_{X^{an}}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

8) (問題): $H^2(X^{an}, K_2(\mathcal{O}_{X^{an}})) \cong H^2(X^{top}, K_2(\mathcal{C}_{X^{an}}))$ か?

さらに一般に Quillen の higher alg. K-groups に対して

$$H^p(X^{an}, K_p(\mathcal{O}_{X^{an}})) \cong H^p(X^{top}, K_p(\mathcal{C}_{X^{top}})) \text{ か?}$$

Bloch's formula を考慮に入れると, $H^p(X^{an}, K_p(\mathcal{O}_{X^{an}}))$ は analytic cycles の情報を, $H^p(X^{top}, K_p(\mathcal{C}_{X^{an}}))$ は topological cycles の情報を持っていると思われる。勿論 analytic cycles と topological cycles とは異っており, その食違いの様子が K-theory の立場から判り, 又これら cycles の "良い equivalence relation" が見つければ面白いと思われる。

§2. Path ring, Loop ring, Cone and Suspension

以後, convex ring はすべて Hausdorff topology を備えているものとする。

1) $(A, \tau), (B, \tau_B)$ を二つの convex rings とする時,

$\varphi: (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ が bounded morphism

$\Leftrightarrow$

(i) $\varphi: A \rightarrow B$ は ring homo.

(ii) $(\exists c > 0)(\forall g \in \tau_B)(\exists c' > 0)(\forall x \in A): g(\varphi(x)) \leq c \varphi^* g(x) + c' \inf_{\varphi^* g \leq p} p(x).$

但し, この時の φ は Banach ring homo. $(\varphi^* g, \varphi^* p) \rightarrow (g, p)$ とみる

2) pro-Banach ring (A, τ_A) に対して

$$(A, \tau_A)\{x\} := \left\{ f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \mid a_n \in A, (\forall g \in \tau_A): \sum_{n \geq 0} g(a_n) < +\infty \right\}$$

とおくと, これは $g(f) := \sum_{n \geq 0} g(a_n) < +\infty$ なる semi-norm をもち

pro-Banach ring となる。

3) $(A, \tau_A) \{x\} \xrightarrow[h_1]{h_0} (A, \tau_A)$ なる $\Rightarrow$ の morphism を

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in (A, \tau_A) \{x\} \text{ に対して}$$

$$h_0(f(x)) := a_0, \quad h_1(f(x)) := \sum_{n \geq 0} a_n$$

とおけばこれらは bounded morphisms.

4) $E(A, \tau_A) := \text{Ker}(h_0)$, $\Omega(A, \tau_A) := \text{Ker}(h_0) \cap \text{Ker}(h_1)$ は (A, τ_A) の subalgebra となり, (A, τ_A) より induce された semi-norms によって, pro-Banach rings となる。 $E(A, \tau_A)$ を path ring, $\Omega(A, \tau_A)$ を loop ring と呼ぶ。

5) 順々に, $(A, \tau_A) \{x_1, \dots, x_n\} := (A, \tau_A) \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \{x_n\}$ とおくと

$$(A, \tau_A) \{x_1, \dots, x_n\} = \{f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid a_{i_1, \dots, i_n} \in A, (\forall g \in \tau_A) : \sum_{i_1, \dots, i_n} g(a_{i_1, \dots, i_n}) < \infty\}$$

となっていて, $\|f(x_1, \dots, x_n)\|_g := \sum_{i_1, \dots, i_n} g(a_{i_1, \dots, i_n})$ なる semi-norm を持つ pro-Banach ring となる。

6) $M_\infty(A, \tau_A) := \{M = (a_{ij}), i, j \in \mathbb{N} \mid a_{ij} \in A, (\forall g \in \tau_A) \sup_j \sum_{i \geq 0} g(a_{ij}) < +\infty\}$

は, $\|M\|_g := \sup_j \sum_{i \geq 0} g(a_{ij})$ なる semi-norm を持つ pro-Banach ring.

7) $M \in M_\infty(A, \tau_A)$ が permutant

$\Rightarrow M = (\text{無限交代行列}) \times (A \text{ の有限集合の元よりなる対角行列})$ の形.

とし.

$$C(A, \tau_A) := \{M \in M_\infty(A, \tau_A) \mid M = \sum_{i \geq 0} M_i, M_i \text{ は permutant}\}$$

とおけば, $M_\infty(A, \tau_A)$ の closed subalgebra となっており, A の cone と呼ばれる. ($C(A)$ の semi-norms $\|\cdot\|, \|\cdot\|_g$ に関する completion.)

- 8) $M_n(A, \tau_A) := \{M = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n \mid a_{ij} \in A, (\varphi \in \tau_A): \|M\|_\varphi := \sup_{i,j} \varphi(a_{ij}) < +\infty\}$
 とおき, $M_n(A, \tau_A) \hookrightarrow M_{n+1}(A, \tau_A) : M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なる埋込みにより
 $M(A, \tau_A) := \varinjlim_n M_n(A, \tau_A)$ とおき, $(A, \tau_A)^\sim := \overline{M(A, \tau_A)} \subset M_\infty(A, \tau_A)$
 を (A, τ_A) の stabilized algebra と呼ぶ。これは $C(A, \tau_A)$ の closed ideal.
 9) Quotient algebra $S(A, \tau_A) := C(A, \tau_A)/(A, \tau_A)^\sim$ を (A, τ_A) の suspension
 と呼ぶ。

§ 3. Homotopy.

- 1) 二つの pro-Banach ring $(A, \tau_A), (B, \tau_B)$ に対して, bounded morphisms
 $(A, \tau_A) \xrightarrow[\varphi_1]{\varphi_0} (B, \tau_B)$ において, φ_0 と φ_1 とが simply homotopic とは
 $(\exists \varphi : (A, \tau_A) \rightarrow (A, \tau_A) \{x\}; \text{bounded morphism})$ s.t. $h_0 \cdot \varphi = \varphi_0, h_1 \cdot \varphi = \varphi_1$
 又は, $h_0 \cdot \varphi = \varphi_1, h_1 \cdot \varphi = \varphi_0$. 但し $h_0(\sum a_n x^n) := a_0, h_1(\sum a_n x^n) := \sum a_n$.
 2) さらに φ_0, φ_1 が homotopic とは $(\exists \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N : (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B) : \text{finite}$
 series of bounded morphisms) : $\psi_0 = \varphi_0, \psi_N = \varphi_1, \psi_i$ と ψ_{i+1} とは simply-
 homotopic $\forall i = 1, \dots, N-1$.
 3) pro-Banach ring (A, τ_A) が contractible とは $1_A : (A, \tau_A) \rightarrow (A, \tau_A)$ が homotopic
 to zero と定義する。例えば path ring $E(A, \tau_A)$ は contractible.
 4) pro-Banach ring (A, τ_A) に対して $(A^n, \tau_A^n) = (A, \tau_A)^n$ を考える。
 これは有限個の族であるから $(\bigoplus_n A, \bigoplus_n \tau_A) \simeq (\prod_n A, \prod_n \tau_A)$ で
 左辺は $(\varphi^{\bigoplus n})(x) := \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)$, 右辺は $(\pi \varphi)(x) := \sup \varphi(x_i), (x_1, \dots, x_n) \in A^n$
 なる semi-norms を持つのであった。このとき, A -係数行列

$$M := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : (A, \tau_A)^n \rightarrow (A, \tau_A)^n \in M_n(A, \tau_A)$$

に対して, その determinant $\det M \in A$ を考える.

(A, τ_A) が separated, complete であるから,

$$M \text{ is invertible} \iff (\forall p \in \text{Spec}(A, \tau_A)) : p(\det M) \neq 0$$

$$GL_n(A) := \{ M = (a_{ij}) \in M_n(A, \tau_A) \mid a_{ij} \in A, M \text{ is invertible} \}$$

$$\begin{array}{ccc} M_n(A, \tau_A) & \xrightarrow{\det} & A \\ \cup & & \cup \\ GL_n(A) & \longrightarrow & A^* := \{ \text{invertibles} \} \\ & & (\text{open}) \end{array} \quad \text{によって}$$

$GL_n(A)$ に A より induce される convex topology を入れることができる。それは $\det$ を連続にする最弱位相。これを $GL_n(A, \tau_A)$

と書き, $GL_n(A, \tau_A) \hookrightarrow GL_{n+1}(A, \tau_A) : * \mapsto \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって,

$$GL(A, \tau_A) := \varinjlim_n GL_n(A, \tau_A) \quad \text{とおく.}$$

§4. Serre fibration

1) Bounded morphism of pro-Banach rings $\varphi : (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ が Serre fibration であるとは, $\forall n > 0$ に対して induced homo.

$$\varphi_* : GL((A, \tau_A)\{x_1, \dots, x_n\}) \longrightarrow GL((B, \tau_B)\{x_1, \dots, x_n\})$$

が次を満たす: $\forall \beta = \beta(x_1, \dots, x_n) \in GL((B, \tau_B)\{x_1, \dots, x_n\}) : \beta(0, \dots, 0) = 1,$

に対して $(\exists \alpha = \alpha(x_1, \dots, x_n) \in GL((A, \tau_A)\{x_1, \dots, x_n\})) : \varphi_*(\alpha) = \beta.$

例えば path ring からの projection $\text{pr} : E(A, \tau_A) \rightarrow (A, \tau_A)$ は Serre fibration である。Serre fibrations の composition も Serre fibration である。

2) Serre fibration $\varphi : (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ は surjective homo. である。

3) $\varphi: (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ を Serre fibration, $u \in GL(A, \tau_A)$, $v = \varphi(u)$,

$\beta \in GL((B, \tau_B)\{x_1, \dots, x_n\})$ s.t. $\beta(0, \dots, 0) = v = \varphi(u)$ とする時,

$\exists \alpha \in GL((A, \tau_A)\{x_1, \dots, x_n\}) : \varphi_*(\alpha) = \beta, \alpha(0, \dots, 0) = u$.

4) $\varphi: (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ を Serre fibration とする時,

i) $\tilde{\varphi}: (A, \tau_A)\{x\} \rightarrow (B, \tau_B)\{x\}$ は Serre fibration

ii) $E\varphi: E(A, \tau_A) \rightarrow E(B, \tau_B)$ は " "

iii) $\Omega\varphi: \Omega(A, \tau_A) \rightarrow \Omega(B, \tau_B)$ は " "

5) Serre fibration $\varphi: (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ に対して fibre product

$$M(\varphi) := (A, \tau_A) \times_{(B, \tau_B)} ((B, \tau_B)\{x\})$$

を φ の mapping cylinder と呼ぶ。

$M(\varphi)$ は $(A, \tau_A) \times ((B, \tau_B)\{x\})$ の subring である。

$$\begin{array}{ccccc} M(\varphi) & \xrightarrow{\quad} & (B, \tau_B)\{x\} & \ni & f(x) \\ \downarrow p & \searrow \psi & \downarrow m & & \downarrow \\ (A, \tau_A) & \xrightarrow{\varphi} & (B, \tau_B) & \ni & f(0) \end{array}$$

i) $\psi: M(\varphi) \rightarrow (B, \tau_B): (a, f(a)) \mapsto f(1)$ は Serre fibration.

ii) $p: M(\varphi) \rightarrow (A, \tau_A)$ は homotopy equivalence. その逆は

$\iota: (A, \tau_A) \hookrightarrow M(\varphi): a \mapsto (a, \varphi(a))$ 但し $\varphi(a)$ は constant polynomial.

§5. fibration と cofibration

1) short exact sequence of pro-Banach rings

$$0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0 \quad (*)$$

が fibration であるとは, φ が Serre fibration で, $\tau_{A'}$ が τ_A より

induce されたものと equivalent であることとする。

2) epimorphism $\varphi: (A, \tau_A) \rightarrow (A'', \tau_{A''})$ が strict とは, $\tau_{A''}$ が

$(A, \tau_A) / \ker(\varphi)$ の topology と equivalent であることとする時, short exact sequence (※) が cofibration であるとは, φ が strict で, $\tau_{A'}$ は τ_A より induce されたものと equivalent である事と定義する。

3) $0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ が fibration なら

i) $0 \rightarrow E(A', \tau_{A'}) \rightarrow E(A, \tau_A) \xrightarrow{E\varphi} E(A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ も fibration.

ii) $0 \rightarrow \Omega(A', \tau_{A'}) \rightarrow \Omega(A, \tau_A) \xrightarrow{\Omega\varphi} \Omega(A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ " .

4) $0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ が cofibration なら

i) $0 \rightarrow E(A', \tau_{A'}) \rightarrow E(A, \tau_A) \xrightarrow{E\varphi} (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ も cofibration.

ii) $0 \rightarrow \Omega(A', \tau_{A'}) \rightarrow \Omega(A, \tau_A) \xrightarrow{\Omega\varphi} \Omega(A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ "

iii) $0 \rightarrow C(A', \tau_{A'}) \rightarrow C(A, \tau_A) \xrightarrow{C\varphi} C(A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ "

iv) $0 \rightarrow S(A', \tau_{A'}) \rightarrow S(A, \tau_A) \xrightarrow{S\varphi} S(A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ "

§6. Admissible category

1) Full subcategory $\mathcal{C}$ of pro-Banach rings (pro-Ban) が positively admissible であるとは

i) $(A, \tau_A) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \implies E(A, \tau_A) \xrightarrow{\text{pr}} (A, \tau_A) \rightarrow 0$ は $\mathcal{C}$ の diagram.

ii) $0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ が fibration で

$(A, \tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ が $\mathcal{C}$ の diagram なら

$0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A)$ も $\mathcal{C}$ の diagram.

を満たすこと.

2) Full subcategory $\mathcal{C}$ of pro-Banach rings (pro-Ban) が negatively

admissible であるとは.

i) $(A, \tau_A) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \implies 0 \rightarrow (A, \tau_A) \rightarrow C(A, \tau_A)$ は $\mathcal{C}$ の diagram.

ii) $0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A) \rightarrow (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ は cofibration で,

$0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A)$ が $\mathcal{C}$ の diagram ならば

$(A, \tau_A) \rightarrow (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ も $\mathcal{C}$ の diagram

を満たすこととする。

§ 7. Positive analytic K-theory

1) $\mathcal{C} \subset (\text{pro-Ban})$ を positively admissible category とする時,

$\mathcal{C}$ 上の analytic K-theory とは, family $(K_n^{KV}, \partial^{n+1})_{n \geq 0}$ で,

$K_n^{KV} : \mathcal{C} \rightarrow (\text{Abelian groups})$ は functors, 又, $\mathcal{C}$ の

任意の fibration $0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \rightarrow (A, \tau_A) \rightarrow (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ に対し

$\partial_\psi^{n+1} : K_{n+1}^{KV}(A'', \tau_{A''}) \rightarrow K_n^{KV}(A', \tau_{A'})$ は abel 群の morphism で,

次を満たすものをいう:

i) ∂_ψ^{n+1} は次の意味で functorial:

$\mathcal{C}$ の任意の diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & (A', \tau_{A'}) & \rightarrow & (A, \tau_A) & \xrightarrow{\varphi} & (A'', \tau_{A''}) & \rightarrow 0 & (\text{fibration}) \\ & \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow f & & \\ 0 \rightarrow & (B', \tau_{B'}) & \rightarrow & (B, \tau_B) & \xrightarrow{\psi} & (B'', \tau_{B''}) & \rightarrow 0 & (\text{fibration}) \end{array}$$

に対して,

$$\begin{array}{ccc}
 K_{n+1}^{KV}(A'', \mathcal{T}_{A''}) & \xrightarrow{\partial_{\Psi}^{n+1}} & K_n^{KV}(A', \mathcal{T}_{A'}) \\
 K_{n+1}^{KV}(f'') \downarrow & \curvearrowright & \downarrow K_n^{KV}(f') \\
 K_{n+1}^{KV}(B'', \mathcal{T}_{B''}) & \xrightarrow{\partial_{\Psi}^{n+1}} & K_n^{KV}(B', \mathcal{T}_{B'})
 \end{array}$$

ii) 任意の fibration $0 \rightarrow (A', \mathcal{T}_{A'}) \rightarrow (A, \mathcal{T}_A) \xrightarrow{\Psi} (A'', \mathcal{T}_{A''}) \rightarrow 0$

に対して long exact sequence of abelian groups

$$\cdots \rightarrow K_{n+1}^{KV}(A', \mathcal{T}_{A'}) \rightarrow K_{n+1}^{KV}(A, \mathcal{T}_A) \rightarrow K_{n+1}^{KV}(A'', \mathcal{T}_{A''}) \xrightarrow{\partial_{\Psi}^{n+1}} K_n^{KV}(A', \mathcal{T}_{A'}) \rightarrow \cdots$$

がある。

iii) $(A, \mathcal{T}_A) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が contractible $\Rightarrow K_n^{KV}(A, \mathcal{T}_A) = 0$ for $n > 0$

2) pro-Banach ring $(A, \mathcal{T}_A)$ に対して

$\alpha \in GL(A, \mathcal{T}_A)$ が identity に homotopic $\stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists \alpha(x) \in GL(A, \mathcal{T}_A) \text{ f.s.t.}) : \begin{cases} \alpha(0) = 1 \\ \alpha(1) = \alpha \end{cases}$

$\alpha, \beta \in GL(A, \mathcal{T}_A)$ が homotopic $\stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha^{-1}\beta$ が identity と homotopic

3) $GL^0(A, \mathcal{T}_A) := \{ \alpha \in GL(A, \mathcal{T}_A) \mid \alpha \text{ は homotopic to identity} \}$

とする時, $GL^0(A, \mathcal{T}_A)$ は $GL(A, \mathcal{T}_A)$ の subgroup となり, かつ

$$[GL(A, \mathcal{T}_A), GL(A, \mathcal{T}_A)] \subset GL^0(A, \mathcal{T}_A).$$

この時, $\pi_0(GL(A, \mathcal{T}_A)) := GL(A, \mathcal{T}_A) / GL^0(A, \mathcal{T}_A)$ とおく。

4) $\mathcal{C} \subset (\text{pro-Ban})$ を positively admissible category とする時,

$(A, \mathcal{T}_A) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$K_n^{KV}(A, \mathcal{T}_A) := \pi_0(GL(\Omega^{n-1}(A, \mathcal{T}_A))) \quad (n \geq 1)$$

$$K_0^{KV}(A, \mathcal{T}_A) := K_0(A, \mathcal{T}_A) \quad (\text{普通の Grothendieck group})$$

とおけば, $(K_n^{KV}, \partial^{n+1})_{n \geq 0}$ は $\mathcal{C}$ 上の positive analytic K-

theory となっている。

5) pro-Banach ring (A, τ_A) が flabby とは, projective convex (A, τ_A) -
(left) bimodule of finite type (M, τ_M) が存在して,
 $(M, \tau_M) \oplus (A, \tau_A) \simeq (M, \tau_M)$ となることとする。例えば,
Infinite dim. Hilbert space H に対して $\text{End}(H)$ は flabby.

6) Flabby な pro-Banach ring (A, τ_A) に対して $K_n^{KV}(A, \tau_A) = 0$, $n \geq 0$

7) (problem 1) $K_{n+1}^{KV}(S(A, \tau_A)) \simeq K_n^{KV}(A, \tau_A)$ ($n \geq 0$) か?

8) (problem 2) $K_n^{KV}(C(A, \tau_A)) = 0$ for $n \geq 1$ か?

9) (problem 3) (periodicity) (A, τ_A) が pro-Banach $(\mathbb{C}, 1, 1)$ -
(resp. $(\mathbb{R}, 1, 1)$ -) algebra の時,

$K_i^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{i+2}^{KV}(A, \tau_A)$, (resp. $K_i^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{i+8}^{KV}(A, \tau_A)$) か?

10) (problem 4) (density) $(A, \tau_A), (B, \tau_B)$ を二つの Bornological

$(\mathbb{C}, 1, 1)$ -algebras, $\iota: (A, \tau_A) \hookrightarrow (B, \tau_B)$ を continuous injection と

i) $\text{Im}(\iota)$ is dense in (B, τ_B)

ii) $M_n(A, \tau_A)$ を ι によって $M_n(B, \tau_B)$ の sub algebra とみなせば,

$GL_n(A, \tau_A) = GL_n(B, \tau_B) \cap M_n(A, \tau_A)$ for $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow \iota$ は isomorphism $K_i^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_i^{KV}(B, \tau_B)$ を induce するか?

11) (problem 5) pro-Banach ring (A, τ_A) に対して $A = A^\delta$ によって discrete
topology を備えた ring, $GL(A)$ により, discrete topology を備え
た group とする時, classifying space 間の map

$$B_{GL}(A) \longrightarrow B_{GL}(A, \tau_A)$$

は $K_i(A) \xrightarrow{\rho_i} K_i^{KV}(A, \tau_A)$ を引きおこす. 但し $i \geq 1$ で $K_i(A) := {}_I K_i(PA) = \pi_i(K_0 A \times B_{GL(A)})$ $i \geq 0$ とする.

この morphism は $i=0$ に対しては同型であるが

$$0 \rightarrow A_0^* \rightarrow K_1(A) \rightarrow K_1^{KV}(A, \tau_A) \rightarrow 0$$

なる exact sequence があるか? ここで $A_0^* := GL_1^0(A)$.

$$\rho_2: K_2(A) \rightarrow K_2^{KV}(A, \tau_A) \text{ に対しては}$$

$$\text{Im}(\rho_2) = \pi_0(SL(\Omega(A, \tau_A))) \text{ か?}$$

12) (problem 6) $f: (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ を bounded morphism of pro-Banach rings とする時, relative K-group $K_i^{KV}(f)$ を構成せよ.

§8. Negative analytic K-theory

1) $\mathcal{C} \subset (\text{pro-Ban})$ を negatively admissible category とする時, $\mathcal{C}$ 上の analytic K-theory とは family $(K_{-n}^{KV}, \partial^{-n})_{n \geq 0}$ で,

$K_{-n}^{KV}: \mathcal{C} \rightarrow (\text{Abelian groups})$ は functors ($n \geq 0$), $\mathcal{C}$ の任意の cofibration $0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \xrightarrow{\varphi} (A, \tau_A) \rightarrow (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$ に対して, $\partial_{\varphi}^{-n}: K_{-n}^{KV}(A'', \tau_{A''}) \rightarrow K_{-n-1}^{KV}(A', \tau_{A'})$ は abel 群の morphism で, 次の満たすものという.

i) ∂_{φ}^{-n} は $\mathcal{C}$ の cofibration の category に属して functorial:

$\mathcal{C}$ の任意の diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (A', \tau_{A'}) & \xrightarrow{\varphi} & (A, \tau_A) & \longrightarrow & (A'', \tau_{A''}) \longrightarrow 0 \quad (\text{cofibration}) \\ & & \downarrow \varphi' & \curvearrowright & \downarrow \varphi & \curvearrowright & \downarrow \varphi'' \\ 0 & \longrightarrow & (B', \tau_{B'}) & \xrightarrow{\psi} & (B, \tau_B) & \longrightarrow & (B'', \tau_{B''}) \longrightarrow 0 \quad (\text{cofibration}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{I 対して} & K_{-n}^{KV}(A'', \tau_{A''}) & \xrightarrow{\partial^{-n}\psi} K_{-n-1}^{KV}(A', \tau_{A'}) \\
 & \downarrow K_{-n}^{KV}(g'') & \quad \quad \quad \downarrow K_{-n-1}^{KV}(g') \\
 & K_{-n}^{KV}(B'', \tau_{B''}) & \xrightarrow{\partial^{-n}\psi} K_{-n-1}^{KV}(B', \tau_{B'})
 \end{array}$$

ii) $\mathcal{C}$ の任意の cofibration

$$0 \rightarrow (A', \tau_{A'}) \xrightarrow{\varphi} (A, \tau_A) \rightarrow (A'', \tau_{A''}) \rightarrow 0$$

に対して 次の long exact sequence がある。

$$\cdots \rightarrow K_{-n}^{KV}(A', \tau_{A'}) \rightarrow K_{-n}^{KV}(A, \tau_A) \rightarrow K_{-n}^{KV}(A'', \tau_{A''}) \xrightarrow{\partial^{-n}\psi} K_{-n-1}^{KV}(A', \tau_{A'}) \rightarrow \cdots$$

iii) (A, τ_A) が flabby $\Rightarrow K_{-n}^{KV}(A, \tau_A) = 0$

iv) $(A, \tau_A) \hookrightarrow (A, \tau_A)^\sim$ は $K_{-n}^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{-n}^{KV}(A, \tau_A)^\sim$, ($n > 0$)
を induce する。

2) $\mathcal{C} \subset (\text{pro-Ban})$ を negatively admissible category とする時,

$(A, \tau_A) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$K_0^{KV}(A, \tau_A) := K_0(A, \tau_A) \quad (\text{普通の Grothendieck group})$$

$$K_{-n}^{KV}(A, \tau_A) := K_0(S^n(A, \tau_A))$$

とおけば, $(K_{-n}^{KV}, \partial^{-n})_{n \geq 0}$ は $\mathcal{C}$ 上の negative analytic K-theory となっている。

3) (problem 7) (A, τ_A) を pro-Banach $(\mathbb{C}, 1, 1)$ - (resp $(\mathbb{R}, 1, 1)$ -) algebra とする時,

$$K_{-n}^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{-n-2}^{KV}(A, \tau_A), \quad (\text{resp. } K_{-n}^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{-n-8}^{KV}(A, \tau_A))$$

となっているか?

4) (problem 8) pro-Banach ring (A, τ_A) に対して $A = A_\sigma$ により

discrete topology の与えられた ring を表わすことにすれば

$$K_{-n}^{KV}(A_\delta) = K_{-n}^{Bass}(A) \quad (n \geq 0)$$

$$\text{但 } K_{-n}^{\text{Bass}}(A) := \text{Coker}(K_{-n+1}^{\text{Bass}}(A[t]) \oplus K_{-n+1}^{\text{Bass}}(A[t^{-1}]) \longrightarrow K_{-n+1}^{\text{Bass}}(A[t, t^{-1}]))$$

$$3 = 2^u.$$

$$K_{-n}^{Bass}(A, \tau_A) := \operatorname{Coker} [K_{-n+1}^{Bass}(A, \tau_A) f_1] \oplus K_{-n+1}^{Bass}(A, \tau_A) f_1' \rightarrow K_{-n+1}^{Bass}(A, \tau_A) f_1']$$

とおく時に

$$K_{-n}^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{-n}^{Bass}(A, \tau_A) \quad (n \geq 0)$$

となっているか? いずれにせよ. $S^n(A_\delta) \rightarrow S^n(A, T_A)$

$$\text{Ex 1) } K_{-n}^{\text{Bass}}(A_\delta) \xrightarrow{\sigma_n} K_{-n}^{\text{KV}}(A, \tau_A) \quad \text{which induce the same map.}$$

この morphism を調べよ. 例えば, (A, τ_A) が pro- C^* -algebra over $\mathbb{C}$ のとき

$$K_{-1}^{\text{Bass}}(A_\delta) \longrightarrow K_{-1}^{\text{KV}}(A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow 0$$

は exact か?

5) (problem 9) pro-Banach ring (A, τ_A) . i.e. $(A, \tau_A) \cong \varprojlim_{\mathfrak{f} \in \tau_A} ({}_f A, \mathfrak{f})$
 1: $\forall 1 \in \tau$ natural exact sequence

$$0 \longrightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ \mathcal{E} \in \mathcal{T}_A}}^{(2)} K_{n+1}^{KV}(\mathcal{E}A, \mathcal{E}) \longrightarrow K_n^{KV}(A, T_A) \longrightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ \mathcal{E} \in \overline{\mathcal{T}}_A}}^{KV} K_n(\mathcal{E}A, \mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

$(n \in \mathbb{Z})$ があるか? 但し, $\varprojlim^{(1)}$ は functor $\varprojlim$ の 1st

derived functor.

6) (problem 10) $(K_n^{KV}(zA, z))_{z \in T_A}$ がいっ... Mittag-Leffler's condition
を満たし, $\varinjlim_{z \in T_A}^{(1)} K_n^{KV}(zA, z) = 0$ となるか?

7) (problem 11) Exact category $\mathcal{M}$ に対して analytic K-theory を作れ。

References

- [1] Springer Lecture Notes in Math. No 76, 136, 341, 342, 343, 551, 575, 725
- [2] Arens, R.F ; The group of invertible elements of a commutative Banachalgebras, Studia Math. (Ser. Specjalna) Zeszyt 1 (1963) 21-23
- [3] Bass, H ; Algebraic K-theory, Benjamin, 1968
- [4] Forster, O ; Functiontheoretische Hilfsmittel im der Theorie der Kommutativen Banach-Algebren, Jber. Deutsch. Math. Verein. 76 (1974) 1-17
- [5] Karoubi-Villamayor ; K-théorie algébrique et K-théorie topologique I, II, Math. Scand. 28 (1971) 265-307, 32 (1973) 57-86
- [6] Loday, J.L ; K-théorie algébrique et Representations de groupes. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e t. 9 (1976) 309-377
- [7] Milnor, J ; Introduction to algebraic K-theory, Princeton.
- [8] Royden, H.L ; Function algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 281-298
- [9] Saito, K ; Convex rings and analytic schemes (修士論文)
- [10] Taylor, J.L ; Topological invariants of the maximal ideal space of a Banach algebra, Advances in Math. 19 (1976) 146-206
- [11] Wagoner, J ; Delooping Classifying spaces in Algebraic K-theory. Topology vol. 11 (1972) 349-370

その他, alg. K-theory に関する論文は多数ある. [1] No 341, 551 が基本的.