

# 制限三体問題について

東大 教養 齊藤 利弥

この講演の目的は制限三体問題の数学的定式化と, G. D. Birkhoff の論文

The Restricted Problem of Three Bodies, Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 39 (1915), 265-334

のほんの一部とを紹介することである.

## §1. 運動方程式

三つの天体  $S, J, P$  が互いに万有引力を引きあうながら運動しているとき, それらの天体の運動を調べると三体問題であるが, 特に,  $P$  の質量が  $S, J$  の質量に比べてきわめて小さいという仮定のもとでこの問題をとりあうのが, 制限三体問題 (Restricted problem of three bodies) である.

$S$  と  $J$  の質量の和を質量の単位にとり,  $S$  の質量を  $\mu$ ,  $J$  の質量を  $1-\mu$ ,  $P$  の質量を  $m$  とする.  $m \rightarrow 0$  とする極限の場合が制限三体問題である.

このとき,  $S$  と  $J$  の運動には  $P$  からの引力の影響を与えないから,  $S$  と  $J$  の運動は二体問題として決定される. し

たが、 $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  はそれぞれ  $S$  と  $J$  の重心と焦点とする楕円の上を動く。問題を簡単にするために、 $S$  と  $J$  の軌道が円となる場合のみを考える。(エネルギー積分の値を  $E$ , 角運動量積分の値を  $L$ , 万有引力定数を  $k$  とすれば、 $2h^2E + k^2\mu^6 = 0$  のとき、このように状況が実現される。)

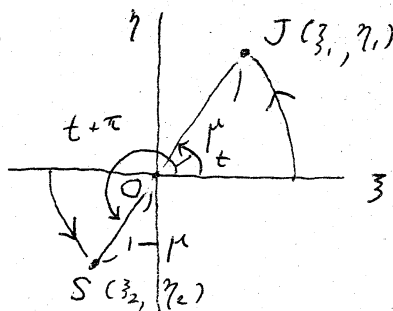
$S$  と  $J$  の運動のあこつてゐる平面上に、 $S$  と  $J$  の重心を原点とする直交座標系  $(\xi, \eta)$  を  $\frac{1}{r}$  入れ、また  $SJ$  の距離を長さの単位にとり、 $\xi$  軸を適當な方向にとれば、時刻  $t$  にあつて  $J$  の座標  $(\xi_1, \eta_1)$  は時間の単位を適當にとれば

$$\xi_1 = \mu \cos t, \quad \eta_1 = \mu \sin t$$

$S$  の座標  $(\xi_2, \eta_2)$  は

$$\xi_2 = (1-\mu) \cos(t+\pi), \quad \eta_2 = (1-\mu) \sin(t+\pi)$$

で与えられることが、簡単な計算により確かめられる。ゆゑに  $S, J$ , および座標の原点 (すなわち  $S, J$  の重心)  $O$  はつねに一直線上にあり、この直線は角速度 1 で回転してゐる。



これら二つの質点  $S, J$  からの引力の下で  $P$  の行方運動は次の運動方程式によつて与えられる。

$P$  の座標を  $(\xi, \eta)$  とし、

$$PJ = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} = r_1, \quad PS = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2} = r_2$$

とあるは、

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{(1-\mu)(\xi - \xi_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\xi - \xi_2)}{\rho_2^3},$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = - \frac{(1-\mu)(\eta - \eta_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\eta - \eta_2)}{\rho_2^3},$$

$$\xi_1 = \mu \cos t, \eta_1 = \mu \sin t, \xi_2 = (1-\mu) \cos(t+\pi), \eta_2 = (1-\mu) \sin(t+\pi)$$

この微分方程式はたゞ explicit に含んでゐる二つの力学系として  
のとりあつかひがてきない。  $t$  は explicit に含まれてゐる方程式に  
直するに、  $O$  を原点、直線  $SOJ$  を  $x$  軸、それに垂直な  
直線と  $y$  軸にとり、  $\xi\eta$  系に對して角速度 1 で回転する座標  
系  $(x, y)$  を用ゐる。この座標系に對する運動方程式は

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - y = - \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$U = - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}, \quad \rho_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}$$

( $\mu$  は  $L$  の座標系に對する  $J, S$  の座標はそれぞれ  $(\mu, 0)$ ,

$(-1+\mu, 0)$  とするから  $\rho_1 = \overline{PJ}$ ,  $\rho_2 = \overline{SJ}$  は上式で与えられる。)

力学系の取、扱ふに對する  $\mu$  は  $-1 \leq \mu \leq 1$  の方程式に  $\frac{P}{b}$  が通るは、

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{du}{dt} = x + 2v - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = y - 2u - \frac{\partial U}{\partial y}$$

あるは、(1) の、

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - U$$

は Lagrangian とする変分問題  $\delta \int L dt = 0$  の Euler 方程式に

なる二つの  $\mu$  とは注意されは、(1) の  $\mu$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (y p_x - x p_y) + U, \quad (p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x)$$

のようは Hamiltonian form に書くこともできる。

(3) から直ちに (1) は  $H$  の積分にもなるとわかる。これを Jacobi の積分 とする。Jacobi の積分はまた

$$(4) \quad H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U$$

と書くこともできる。

(以上の議論では  $S, J, P$  が同一平面上を動くと仮定してゐる。制限三体問題の重要な応用、一つである小惑星の運動、または  $S$  が太陽、 $J$  が木星、 $P$  が小惑星である場合にはこの仮定はほぼ実現されてゐるようである。)

## §2. 特異点

以後主として微分方程式 (2) について議論する。

(2) の trivial な解、すなわち特異点は

$$u = v = 0, \quad x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

で与えられる。ゆゑにこれは  $xy$  平面上で

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{((x-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu(x+1-\mu)}{((x+1-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - x &= 0, \\ \frac{(1-\mu)y}{((x-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu y}{((x+1-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - y &= 0, \end{aligned}$$

を満足する点がある。(5)から直す:

$$y=0, \quad \text{または} \quad \frac{1-\mu}{((x-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{((x+1-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 = 0$$

を得る.  $y=0$  の時には

$$\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{|x-\mu|^3} + \frac{\mu(x+1-\mu)}{|x+1-\mu|^3} - x = 0$$

で、これに満足する  $x$  の値は、 $(-\infty, -(1+\mu))$ ,  $(-(1+\mu), \mu)$ ,  $(\mu, \infty)$  にそれぞれ一つずつ存在することから容易にわかる。これら  $x_1, x_2, x_3$  とするときは、特異点は  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ ,  $(x_3, 0)$  である。

$y \neq 0$  の場合は、上に書き下した式を簡単な変形により、

$$(x-\mu)^2 + y^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 = 1$$

を得られ、特異点は  $SJ$  の一辺と交る二つの正三角形の頂点

$$P_1: \left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_2: \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

にあることがわかる。これは、特異点は Lagrange の平衡点 である。

これら二つの  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ ,  $(x_3, 0)$  が不安定であることは直ちにわかる。  $P_1, P_2$  については、

$$\mu(1-\mu) > \frac{1}{27}$$

のとき不安定になることが直ちにわかる。

$$\mu(1-\mu) \leq \frac{1}{27}$$

のときは、微分方程式の右辺を  $P_1, P_2$  の近傍の Taylor 展開  
 したときの 1 次項の係数をつくる行列の固有値がすべて純  
 虚数になるので、安定性は直ちにわかんない。しかし、く  
 つがの例外的な  $\mu$  の値を除けば、実は  $P_1, P_2$  は安定な（しか  
 も両側に安定な）特異点であることが証明されているように  
 ある。（C.L. Siegel & J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer,  
 1971）

### §3. 積分曲面の分類

$$F = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U$$

と  $\frac{P}{Q}$  ならば、Jacobi の積分 (4) は

$$(6) \quad H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + F$$

と  $\frac{P}{Q}$  ならば、 $H = E$  ( $E$ : 定数) としてえられる積分曲面のどの  
 ようなものがと調べるために、(6) を使って  $H = E$  と

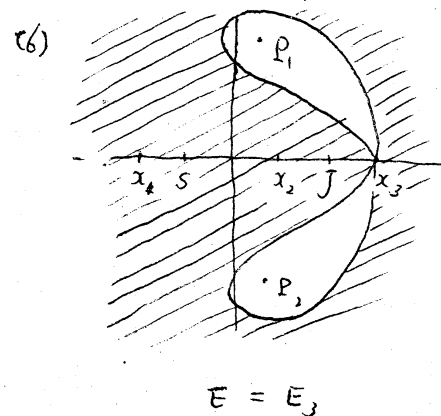
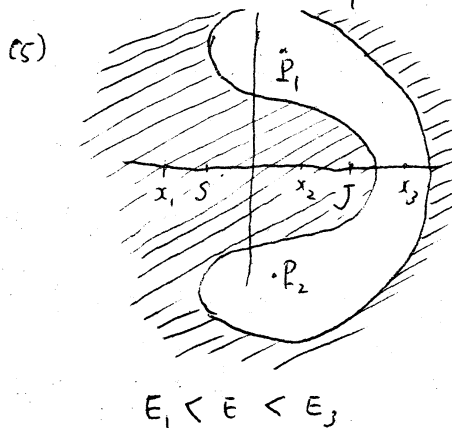
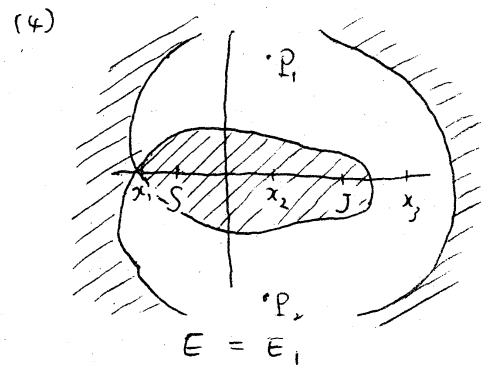
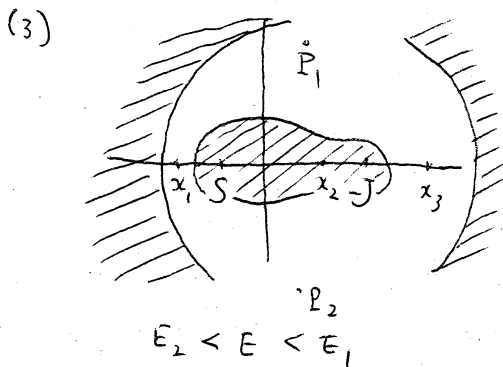
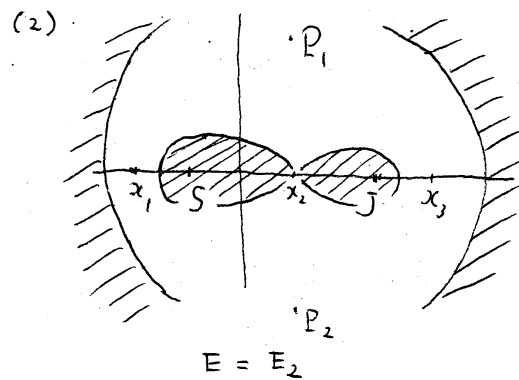
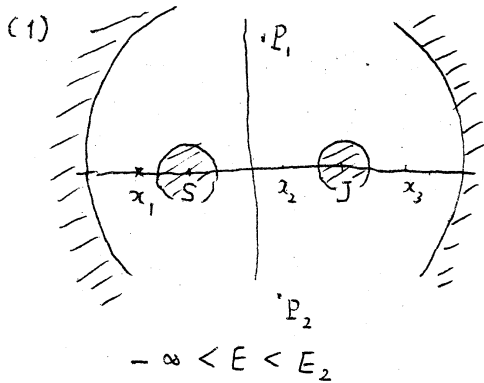
$$(7) \quad F = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + E$$

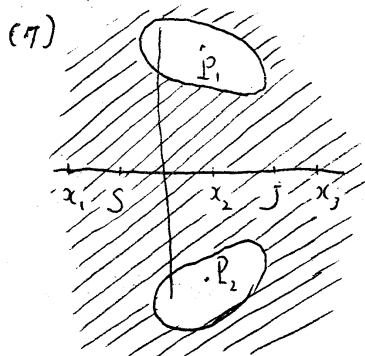
と書き直す。(7) から直ちに  $F \leq E$  で、 $H = E$  の上の点の、  
 $xy$  平面への射影は、領域  $F \leq E$  の中に属する。したがって、  
 積分曲面  $H = E$  の上にある orbit の  $xy$  平面への射影  
 は領域  $F \leq E$  に属する。この領域の境界  $F = E$  は、 $H = E$  と  
 $xy$  平面との交線で、零速度曲線と呼ばれる。  $E$  のいろいろな  
 値に対して  $F \leq E$  を調べてみよう。

$$E_1 = F(x_1, 0), E_2 = F(x_2, 0), E_3 = F(x_3, 0),$$

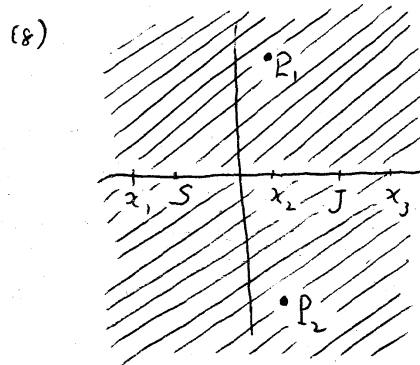
$$E_4 = F\left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = F\left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

と  $\mu < 2$ ,  $E_2 < E_1, E_3 < E_4$  であり,  $E_1$  と  $E_3$  の大小は  $\mu$  の値に關係する。とわかかる。仮に  $E_1 < E_3$  とすると,  $F \leq E$  の形は図の斜線部分で表わされる。





$$E_3 < E < E_4$$



$$E = E_4$$

今までの比較は  $<$  のしき調へはしてゐるが (1) の場合でしか、 $J$  または  $S$  のまわりの oval の内部に運動がある場合がある。

(2), (4), (6), (8) のように、 $H = E$  の singularity がある場合を除き、さらに  $F \subseteq E$  が有界である場合を除けば、上述の場合と、(3) で、運動の内側の oval の内部にある場合だけが残る。今後は主としてその場合を調べる。

#### § 4 Regularization

(1) および (3) で、しかも  $F \subseteq E$  が compact になる場合を考へても、その時には  $F \subseteq E$  の中に  $p_1 = 0$  又は  $p_2 = 0$  となる所があるかもしれない、 $z = z_0$  は  $u, v$  が有界になるから  $H = E$  は compact になる。Birkhoff は巧妙な変数変換と reparametrization を行なうと、微分方程式の上記の領域に特異性をもたず、しかも、 $H = E$  が compact な manifold になる

よゝにできる = と示した,

$$z = x + iy, \quad w = \xi + i\eta$$

$$(8) \quad \frac{z+1-\mu}{z-\mu} = \left( \frac{w+1-\mu}{w-\mu} \right)^2$$

よゝ,  $\tau(x, y)$  から  $(\xi, \eta)$  に変換できる. この変換によつ

$\tau$   $x=\mu, y=0$ ;  $x=-1+\mu, y=0$  はそれぞれ  $\xi=\mu, \eta=0$ ;  $\xi=-1+\mu, \eta=0$

に対応する.

$$R_1 = \sqrt{(\xi-\mu)^2 + \eta^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi+1-\mu)^2 + \eta^2}, \quad R_3 = \sqrt{(\xi+\frac{1}{2}-\mu)^2 + \eta^2}$$

と置き, さらに

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{4R_3^4}{R_1^2 R_2^2}$$

よゝ,  $\tau$  は  $t$  の  $x-y-\tau$  を定義する. 後の調へによゝ

に  $R_3=0$ , 7 がある  ~~$\xi=\mu-\frac{1}{2}$~~   $\xi=\mu-\frac{1}{2}$ ,  $\eta=0$  は  $xy$  平面の 無限遠 点に対応するから,  $F \leq E$  の有界な  $\xi$  は, その範囲では,

$\tau$  は  $t$  とともに単調に増加するパラメータである.

このとき微分方程式 (2) は

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi', \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \eta', \quad \frac{d\xi'}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^4} \eta' + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \quad \frac{d\eta'}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^4} \xi' + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}$$

$$\Omega = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^4} \left[ \frac{(1-\mu)R_1^4 + \mu R_2^4}{8R_3^4} + 2R_3 \left( \frac{1-\mu}{R_1^2} + \frac{\mu}{R_2^2} \right) - \frac{\mu(1-\mu)}{2} \right]$$

となり, この方程式は  $R_3=0$  上の特異点を持つ. それ

で Jacobian の値は

$$H = \frac{2R_3^4}{R_1^2 R_2^2} \left( \xi'^2 + \eta'^2 - \Phi(\xi, \eta) \right),$$

$\Phi(\xi, \eta) = \frac{R_1^2 R_2^2}{16 R_3^6} ((1-\mu) R_1^4 + \mu R_2^4) + \frac{1}{R_3^3} ((1-\mu) R_2^2 + \mu R_1^2) - \frac{\mu(1-\mu) R_1^2 R_2^2}{4 R_3^4}$   
 と書かれ, 同様四面  $H = E$  は

$$\xi^{1/2} \eta^{1/2} = \Psi(\xi, \eta) = \frac{R_1^2 R_2^2}{16 R_3^6} ((1-\mu) R_1^4 + \mu R_2^4) + \frac{1}{R_3^3} ((1-\mu) R_2^2 + \mu R_1^2) + (2E - \mu(1-\mu)) \frac{R_1^2 R_2^2}{4 R_3^4}$$

と書かれる. この変換は Birkhoff の regularization である.

変換 (8) により,  $z$  の値には一般に  $w = 0$  の値  $w_1, w_2$  が対応し, 分岐点は  $z = \mu, z = -(1+\mu)$  である.

$\text{Im } z \neq 0$  ならば  $z$  に対応する  $w$  も  $\text{Im } w \neq 0$  で, しかも  $\text{Im } w_1$  と  $\text{Im } w_2$  は反対符号になる. (したがって  $z$  と  $z^*$  は,  $\text{Im } w_1 > 0, \text{Im } w_2 < 0$  と対応する).

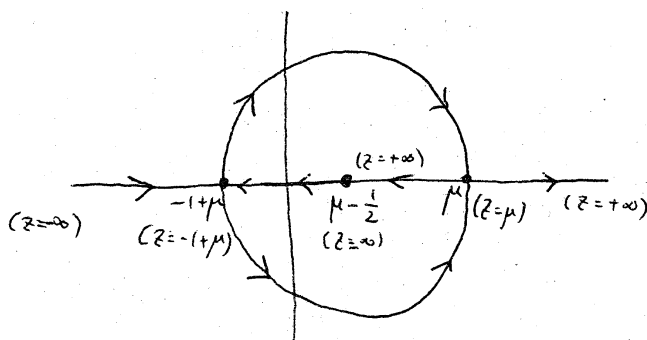
また, (8) は  $w$  に関する方程式で  $z = \infty$  の近傍で Taylor 展開可  
 である.

$$w = \begin{cases} 2z + \frac{1-2\mu}{2} + \dots \\ -\frac{1-2\mu}{2} + \dots \end{cases} \quad (\dots \text{は } \frac{1}{z} \text{ の正のべき級数})$$

となすから  $z = \infty$  は,  $w$  平面では  $\infty$  と,  $-\frac{1-2\mu}{2} = \mu - \frac{1}{2}$  とに対応する.

$z$  の実軸上  $-\infty$  から  $+\infty$  まで  $z$  が変化する  $w$  の変化は図  
 のようになる.

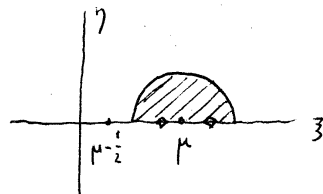
以上より  $z$  は,  $\text{Im } z = 0$   
 の点を除けば,  $z$  平面と  
 $w$  の上半平面との対応は  
 1-1 であり,  $\text{Im } z = 0$



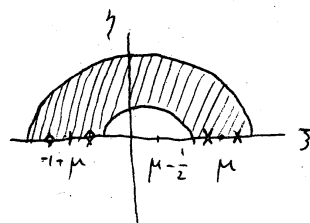
の所でも  $-1+\mu \leq z \leq \mu$  の範囲は, それに対応する  $w$  の値は,  
 $w$  の上半平面に一つしか存在しない. たゞ  $(-\infty, -1+\mu)$  と  $(\mu, \infty)$   
 に属する  $z$  に対してのみ,  $w_1, w_2$  のともに  $w$  平面の実軸上  
 にあらわれる.

領域  $F \leq E$  は,  $w$  平面では  $\Psi(z, \eta) \geq 0$  に変わる. ところで  
 領域  $\Psi(z, \eta) \geq 0$  の,  $\text{Im } w \geq 0$  に属する部分だけをとると, こ  
 の領域は  $\text{Im } w = 0$  の所を除けば, 領域  $F \leq E$  と 1-1 に対応  
 する.

場合 (1) の,  $J$  のまわりの oval は, 図のようには,  $w$  平面で  
 9, 実  $(\mu, 0)$  のまわりの oval の上半部  
 とは 1-1 に対応する. たゞし  $\eta =$   
 0 の所では二つの  $w$  の値が  $z$  一つ  
 値に対応する.



場合 (3) の,  $S, J$  を同時にかきむ  
 oval は右図の斜線と施した部分と



は 1-1 に対応する. たゞし  $\eta = 0$  の部分だけは 1-2 にな  
 3 = 2 は上の場合と同様である.

## §5 積分曲面の形の決定

いままでに得られた結果を基にして Birkhoff は ~~積分曲面~~  
 積分曲面  $H = E$  がどのような多様体と位相同型であるかを決

定まる。その方はとわめて elementary な 15 巧みである。

まず  $w$  の上半平面  $\text{Im } w = \eta \geq 0$  において考える。  $H = E$  は  $\xi'^2 + \eta'^2 = \bar{\Psi}(\xi, \eta)$  であり得る。ゆえに

$$(9) \quad \eta' = \pm \sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta) - \xi'^2}$$

であるから、  $\bar{\Psi}(\xi, \eta) \geq 0$  であるような  $(\xi, \eta)$  に対して

$$\xi'^2 < \bar{\Psi}(\xi, \eta)$$

となるような  $\xi'$  の値は一つ決まると、それに対して (9) により  $\eta'$  の値が二つ決まる。また

$$\xi'^2 = \bar{\Psi}(\xi, \eta)$$

であるような  $\xi'$  の値は一つ決まると、それに対して (9) により  $\eta'$  の値がただ一つ、すなわち  $\eta' = 0$  が決まる。

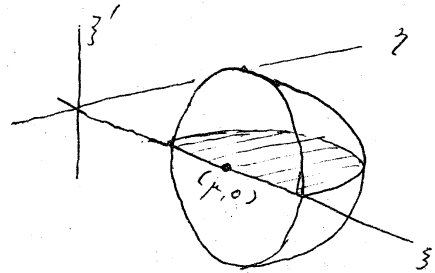
そこで次のようにする。

$\xi\eta$  平面の  $\eta \geq 0$  の部分に領域  $\bar{\Psi}(\xi, \eta) \geq 0$  をとり、その上の各点  $(\xi, \eta)$  に対し、部分  $-\sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta)} \leq \xi' \leq \sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta)}$  の積を  $\pi$  とし、これを  $\Pi$  とする。  $\Pi = \bigcup_{\bar{\Psi}(\xi, \eta) \geq 0} \{(\xi, \eta) \times \{\xi' \mid -\sqrt{\bar{\Psi}} \leq \xi' \leq \sqrt{\bar{\Psi}}\}\}$

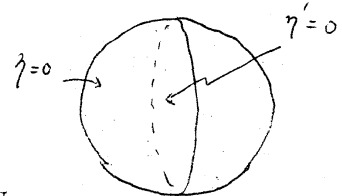
このような  $\Pi$  を用いて、一方は  $\eta' \geq 0$  に対応するものとしてそれを  $\Pi_+$ 、他方は  $\eta' \leq 0$  に対応するものとしてそれを  $\Pi_-$  で表わす。  $\Pi_+$ ,  $\Pi_-$  の表面である  $\xi'^2 = \bar{\Psi}(\xi, \eta)$  においては  $\eta'$  が一致してともに 0 になるから、  $\Pi_+$  と  $\Pi_-$  とは  $\eta' = 0$  の表面ではりあわせる。それを  $\Pi'$  とすればこれは  $H = E$  と同様な集合になる。しかし  $\eta = 0$  の部分では一組の  $(x, y)$  に対して  $\xi'$

より  $\xi$  の値が二つでてくるのを  $\pi'$  においてそれらを  $=$  と  
 を identify してやればよい。この identification によっ  
 て複分曲面  $H=E$  が完成する。

(1) の場合、 $J$  をとりま  $\text{oval}$  に  $\pi$  を  $\pi'$  と  $\pi$  と  $\pi'$  と  
 1. このとき  $\Psi(\xi, \eta) \geq 0, \eta \geq 0$   
 は  $\pi$  にしめしたような半球状  
 の領域になるのを、その各点に  
 座標  $-\sqrt{\Psi} \leq \xi' \leq \sqrt{\Psi}$  を立てると、



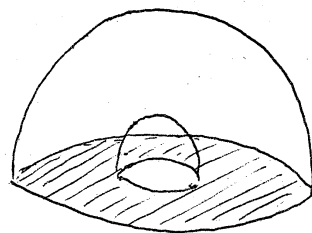
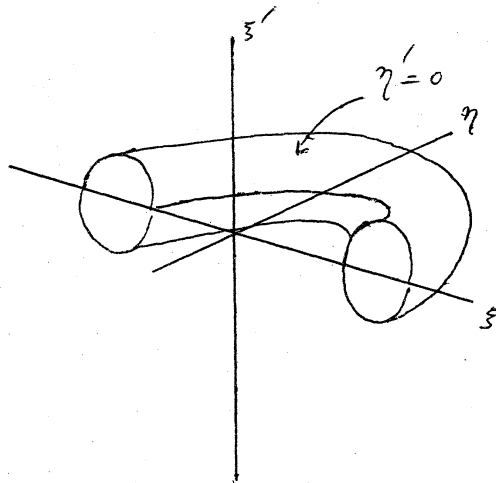
図のような半球状の立体ができる。これを  $\pi$  とする。そして  
 この半球の表面に  $\eta=0$  と  $\xi' = \Psi(\xi, \eta)$ 、すなわち  $\eta'=0$   
 に対応する。そして、この半球を  $\pi_+$  と  $\pi_-$  とく、 $\pi_+$   
 半球の表面に  $\eta=0$  と  $\xi' = \Psi(\xi, \eta)$  とく、 $\pi_-$   
 半球の表面に  $\eta=0$  と  $\xi' = -\Psi(\xi, \eta)$  とく、 $\pi_+$  と  $\pi_-$   
 の表面の  $\eta=0$  に対応する。この  $\pi$  は、 $(x, y)$   
 $\rightarrow (\xi, \eta)$  の対応が (分岐点  $x=\mu, y=0$  を  
 除く) 1対2なのを、 $=$  と  $\pi$  を identify して



ければよい。  $x=\mu, y=0$  に対しては  $(\xi, \eta)$  は  $\rightarrow$  しか定  
 まらないが、この分岐点に対して  $(\xi', \eta')$  の値が  $x \rightarrow \mu, y \rightarrow 0$   
 のとき一致するのを、この球面の上ではやはり二つの点  
 それに対応する。したがって、 $H=E$  は、solid sphere に  $\pi$   
 の表面上の二点を identify したものである。適当に defor-  
 mation を行えば、これは antipode を identify するのと

る。で、 $H = E$  は射影空間  $P^3$  と同相なことがわかる。

(3) の場合、 $J, S$  が  $\eta$  なる oval によって同様に考察を  
おこなえば、 $\Pi$  は図のよう  
に solid torus を半分に切っ  
た形になる。torus の表面が  
 $\eta' = 0$  に対応するから、こ  
ういふ solid torus を二つ、  
表面に貼、てはうつけられ  
たはならない。それを見や  
す。可るには、solid torus  
を半分に切、左図形を、二  
つの同心半球の内側の領域に  
deform する。このとき、



torus の表面が下の図の斜線部分に対応し、torus の切り口  
にある二つの円弧がそれぞれ同心半球の内面と外面とに対応  
する。torus をはらあかせた操作は、このような同心半球を二  
つとく、この図の斜線部分でそれとをはらあかせること  
なり、したがって同心半球の内側の領域が得られる。 $\eta = 0$  の部分  
での identification は、外側の球面、内側の球面それぞれに  
て antipode を identify したと同等になる。

## § 6, その他の結果

Birkhoff は次に, 場合 (1) の, 運動量が  $J$  をとり  $\mu < \text{oval}$  の内部にある場合をくわしく調べている. 彼はそれと  $\mu=0$  からの perturbation としてあつかった.

Kepler 変数に変数変換し, この変数について力学系の ring domain の surface of section をもつことを示し, 問題を ring domain の twist map に帰着させる. これは本質的には Poincaré の idea である.

この twist map に対して, Poincaré によって予想され, Birkhoff によって証明された不動点定理 (Poincaré の最後の定理) を適用するところにより, 無限の周期軌道の存在の証明されることがあるが, それによって述べられている余地はない.